УДК 517.938

Реализация структурно устойчивых диффеоморфизмов с двумерными поверхностными базисными множествами

© **В.З. Гринес[1], Ю.А. Левченко[2]**

Аннотация. Настоящая работа является продолжением работы [2], в которой были найдены необходимые и достаточные условия тологической сопряженности структурно устойчивых диффеоморфизмов f и f' с неблуждающими множествами, состоящими из связных поверхностных двумерных базисных множеств, удовлетворяющих некоторому условию на структуру пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий точек из различных базисных множеств.
В настоящей работе допускается, что базисные множества могут быть несвязными и приводится обобщение введенного ранее топологического инварианта. Более того решена проблема реализации, то есть выделено множество допустимых инваринтов, для каждого из которых предъявлен стандартный представитель, принадлежащий рассматриваемому классу диффеоморфизмов.
Ключевые слова: диффеоморфизм, базисное множество, аттрактор, топологическая классификация

1. Введение и формулировка результатов

В работе рассматриваются сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы f, заданные на замкнутых ориентируемых связных 3-многообразиях M^3, удовлетворяющие аксиоме A С. Смейла.

Согласно спектральной теореме С. Смейла [7], неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств, называемых базисными множествами, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию.

В силу [8], [9] каждое базисное множество $\mathcal{B}$ представляется в виде конечного объединения $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup \mathcal{B}_k$ ($f^k(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}_i, f(\mathcal{B}_i) = \mathcal{B}_{i+1} \quad (\mathcal{B}_{k+1} = \mathcal{B}_1)$) замкнутых подмножеств ($k \geq 1$), которые называются периодическими компонентами множества $\mathcal{B}$, а число k - периодом базисного множества $\mathcal{B}$.

Напомним, что базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется аттрактором, если существует замкнутая окрестность U множества $\mathcal{B}$ такая, что $f(U) \subset int\ U$, $\bigcap\limits_{j\geq 0} f^j(U) = \mathcal{B}$. Аттрактор для диффеоморфизма f^{-1} называется репеллером диффеоморфизма f. Согласно [1] базисное множество $\mathcal{B}$ диффеоморфизма f называется поверхностным, если оно принадлежит f-инвариантной замкнутой поверхности $M^2_{\mathcal{B}}$ (не обязательно связной), топологически вложенной в 3-многообразие M^3 и называемой носителем множества $\mathcal{B}$.

В [1] установлено, что любое поверхностное двумерное базисное множество совпадает со своим носителем, являющимся объединением конечного числа многообразий, каждое

[1] Заведующий кафедрой высшей математики, Нижегородская сельскохозяйственная академия, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

[2] Старший преподаватель кафедры высшей математики, Нижегородская сельскохозяйственная академия, г. Нижний Новгород; ulev4enko@gmail.com

из которых ручно вложено в M^3 и гомеоморфно двумерному тору. Более того, ограничение некоторой степени диффеоморфизма f на носитель сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора[3]. Следует подчеркнуть, что носитель двумерного поверхностного множества диффеоморфизма f может быть не гладким в каждой своей точке (соответствующий пример имеется в [10]).

Далее мы будем всегда предполагать, что неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ состоит только из двумерных поверхностных базисных множеств и ограничение диффеоморфизма f на носитель любого базисного множества из сохраняет его ориентацию. Это означает, что ограничение отображения f^k на любую периодическую компоненту (периода k) этого множества сохраняет его ориентацию. Обозначим через $\mathcal{A}$ ($\mathcal{R}$) объединение всех аттракторов (репеллеров), принадлежащих $NW(f)$.

Следующая лемма (доказательство приводится в разделе 1.2.) устанавливает связь между динамикой диффеоморфизма f и структурой многообразия M^3.

Лемма 1.1. *Множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты и состоят из одинакового числа $n_f \geq 1$ базисных множеств, периодические компоненты каждого из которых имеют один и тот же период $k_f \geq 1$. Множество $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ состоит из $2n_f k_f$ компонент связности, граница каждой из которых состоит в точности из одной периодической компоненты аттрактора и одной периодической компоненты репеллера.*

Зафиксируем любую периодическую компоненту B базисного множества диффеоморфизма f. Обозначим через U_B трубчатую окрестность поверхности B и U^+, U^- компоненты связности $U(B) \setminus B$. Тогда для $k_f > 1$ существует единственное минимальное число $l_f \in \{1, \dots, k_f - 1\}$ такое, что хотя бы одна из компонент связности множества $M^3 \setminus (B \cup f^{l_f}(B))$ не содержит образов множества B под действием f^i для всех $i \in \mathbb{Z}$. В случае $k_f = 1$ положим $l_f = 0$. При этом, если $k_f \neq 2$, то существует в точности одна компонента с этим свойством и мы обозначим ее через K_B, а если $k_f = 2$, то существует ровно две такие компоненты, которые обозначим через K_B^+ и K_B^- таким образом, что $U^+ \subset K_B^+$, $U^- \subset K_B^-$. Кроме того, если $k_f = 1$, то граница K_B состоит только из одной компоненты B и $M^3 = cl(K_B)$, если $k_f = 2$, то граница K_B^+ и K_B^- состоит из объедиения $B \cup f(B)$ и $M^3 = clK_B^+ \cup clK_B^-$, если $k_f > 2$, то граница K_B состоит из объединения $B \cup f^{l_f}(B)$ и $M^3 = \bigcup\limits_{i=0}^{k_f-1} f^i(clK_B)$. Непосредственно проверяется, что число l_f не зависит от выбора компоненты B и числа k_f, n_f, l_f являются инвариантами топологической сопряженности.

Обозначим через G класс диффеоморфизмов $f : M^3 \to M^3$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $f \in G$ является структурно устойчивым[4];

2. $NW(f)$ состоит из двумерных поверхностных базисных множеств;

3. ограничение диффеоморфизма $f \in G$ на носитель любого базисного множества из $NW(f)$ сохраняет его ориентацию;

[3] Гиперболическим автоморфизмом тора $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм f_C, задаваемый целочисленной унимодулярной матрицей $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, собственные значения λ_1, λ_2 которой удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| > 1$. То есть $f_C(x, y) = (ax + by, cx + dy) \; mod \; 1$

[4] В силу [5], [6], [3], необходимым и достаточным условием структурной устойчивости диффеоморфизма f является выполнение аксиомы A и строгого условия трансверсальности.

4. для любых точек x, y таких, что $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{R}$ пересечение $W^s(x) \cap W^u(y)$ либо пусто, либо каждая компонента связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ является открытой дугой, имеющей ровно две граничные точки, одна из которых принадлежит $\mathcal{A}$, а другая $\mathcal{R}$.

Л е м м а 1.2. *Пусть V — компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ такая, что $\partial V = A \cup R$, где A - периодическая компонента некоторого аттрактора и R - периодическая компонента некоторого репеллера. Тогда существует гомеоморфизм $H_V : T^2 \times [0,1] \to cl(V)$, такой что $H_V(T^2 \times \{0\}) = A$, $H_V(T^2 \times \{1\}) = R$ и для любой точки $z \in T^2$ существуют точки $x \in A$, $y \in R$ такие, что $H_V(z \times [0,1])$ есть замыкание компоненты связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ с граничными точками x, y, где $x = H_V(z,0), y = H_V(z,1)$.*

Доказательство приведено в разделе 2..

Следующая лемма является следствием леммы 1.2. и мы приводим ее без доказательства.

Л е м м а 1.3. *Пусть B — периодическая компонента некоторого базисного множества диффеоморфизма f периода k_f. Тогда:*

a) если $k_f = 1$, то существуют непрерывные отображения $H_1^+, H_1^- : T^2 \times [0,1] \to cl(K_B)$ и $0 < \varepsilon < 1$ такие, что $H_1^+(T^2 \times \{0\}) = B$, $H_1^-(T^2 \times \{0\}) = B$, $H_1^+(T^2 \times (0,\varepsilon]) \subset U^+$, $H_1^-(T^2 \times (0,\varepsilon]) \subset U^-$ и $H_1^+|_{T^2 \times [0,1)}$, $H_1^-|_{T^2 \times [0,1)}$ есть взаимно однозначные отображения;

b) если $k_f = 2$, то существуют гомеоморфизмы $H_2^+ : T^2 \times [0,1] \to cl(K_B^+)$, $H_2^- : T^2 \times [0,1] \to cl(K_B^-)$ такие, что $H_2^+(T^2 \times \{0\}) = B$, $H_2^-(T^2 \times \{0\}) = B$;

c) если $k_f > 2$, то существует гомеоморфизм $H : T^2 \times [0,1] \to cl(K_B)$, такой что $H(T^2 \times \{0\}) = B$.

Отображения H_i^σ ($i = 1,2$, $\sigma \in \{+,-\}$) обладают следующим свойством: для любой точки $z \in T^2$ множества $H_i(z \times [0,1])$, $H(z \times [0,1])$ являются объединением замыкания $2n_f$ дуг, каждая из которых является компонентой связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ для некоторых точек x, y, где $x \in \mathcal{A}$ и $y \in \mathcal{R}$.

Рассмотрим два случая: $k_f \leq 2$, $k_f > 2$, в каждом из которых зададим гомеоморфизмы множества B на $f^{l_f}(B)$ следующим образом.

В случае $k_f \leq 2$ зададим гомеоморфизм $h_i^\sigma : T^2 \to B$ по формуле $h_i^\sigma = H_i^\sigma|_{T^2 \times \{0\}}$, где $i = 1,2$, $\sigma \in \{+,-\}$, и гомеоморфизм $\tau^\sigma : B \to f^{l_f}(B)$ по формуле $\tau^\sigma(b) = H_i^\sigma((h_i^\sigma)^{-1}(b), 1)$, где $b \in B$, $i = 1,2$, $\sigma \in \{+,-\}$. Заметим, что в случае $k_f = 1$, τ^σ есть отображение множества B на B и справедливо равенство $\tau^+ = (\tau^-)^{-1}$.

В случае $k_f > 2$ зададим гомеоморфизм $h : T^2 \to B$ по формуле $h = H|_{T^2 \times \{0\}}$ и гомеоморфизм $\tau : B \to f^{l_f}(B)$ по формуле $\tau(b) = H(h^{-1}(b), 1)$ для любой точки $b \in B$.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Пусть $f, f' \in G$ такие что $k_f = k_{f'} = k$, $l_f = l_{f'} = l$. Назовем периодические компоненты $B \subset \mathcal{N}W(f)$ и $B' \subset NW(f')$ эквивалентными, если они одновременно являются атракторами или репеллерами диффеоморфизмов f и f' и существует гомеоморфизм $g : B \to B'$ такой, что*

1. $f'^k|_{B'} = gf^kg^{-1}|_{B'}$,

2. если $k \leq 2$, то $f'^l g f^{-l}|_{f^l(B)} = \tau'^{\sigma'} g (\tau^\sigma)^{-1}|_{f^l(B)}$, для некоторых $\sigma, \sigma' \in \{+,-\}$.

3. если $k > 2$, то $f'^l g f^{-l}|_{f^l(B)} = \tau' g \tau^{-1}|_{f^l(B)}$.

Следующая теорема является обобщением результатов, полученных в работе [2] (теорема 1.1).

Теорема 1.1. *Для того, чтобы диффеоморфизмы $f, f' \in G$ были топологически сопряжены*[5] *необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия: 1) $k_f = k_{f'}$, $l_f = l_{f'}$ и $n_f = n_{f'}$;*

2) для некоторой периодической компоненты $B \subset NW(f)$ нашлась эквивалентная ей периодическая компонента $B' \subset NW(f')$.

Доказательство теоремы 1.1. является не принципиальной модификацией доказательства теоремы 1.1 в [2], поэтому мы его не приводим. В настоящей работе основное внимание уделяется решению проблемы реализации. Вводится класс $\tilde{G}$ стандартных диффеоморфизмов, принадлежащих G, и доказывается, что любой диффеоморфизм из G сопряжен с некоторым диффеоморфизмом класса $\tilde{G}$.

Пусть $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ - целочисленная унимодулярная матрица, $f_C : T^2 \to T^2$ - алгебраический гиперболический автоморфизм двумерного тора T^2, индуцированный матрицей $\mathbf{C}$, и $\tau : T^2 \to T^2$ - гомеоморфизм, удовлетворяющий условию $f_C\tau = \tau f_C$. Тогда в силу [11] (теорема 2) гомеоморфизм τ является линейным преобразованием[6] и, следовательно, диффеоморфизмом. Рассмотрим пространство $T^2 \times R$ и определим диффеоморфизм $\gamma : T^2 \times R \to T^2 \times R$ формулой $\gamma(z,t) = (\tau(z), t-1)$. Положим $G = \{\gamma^k, k \in Z\}$ и $M_{C,\tau} = (T^2 \times R)/G$. Обозначим через $p_{M_{C,\tau}} : T^2 \times R \to M_{C,\tau}$ естественную проекцию. Заметим, что $M_{C,\tau}$ является гладким многообразием.

Теорема 1.2. *Для каждого гиперболического автоморфизма $f_C : T^2 \to T^2$ и линейного преобразования $\tau : T^2 \to T^2$, удовлетворяющего условию $f_C\tau = \tau f_C$, и набора натуральных чисел $n_f > 0, k_f \geq 1, l_f \in \{0, \dots k_f - 1\}$ существует диффеоморфизм $\tilde{f} : M_{C,\tau} \to M_{C,\tau}$, принадлежащий классу G, неблуждающее множество которого состоит из n_f поверхностных двумерных аттракторов и n_f поверхностных двумерных репеллеров периода k_f, причем ограничение диффеоморфизма $\tilde{f}^{k_f}$ на периодическую компоненту некоторого базисного множества сопряжено с $f_C^{k_f}$.*

Обозначим через $\tilde{G}$ множество всех диффеоморфизмов, построенных с помощью конструкции, описанной при доказательстве теоремы 1.2.. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1.3. *Для любого диффеоморфизма из класса G существует диффеоморфизм $\tilde{f} \in \tilde{G}$, топологически сопряженный с f.*

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят гранты 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м РФФИ и грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 за частичную финансовую поддержку.

---

[5] Напомним, что два диффеоморфизма $f, f' : M^n \to M^n$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $g : M^n \to M^n$ такой, что $f' = gfg^{-1}$.

[6] Преобразование $\tau : T^2 \to T^2$ называется линейным, если оно представляется в виде суперпозиции алгебраического автоморфизма тора и группового сдвига T_γ, где $T_\gamma(x_1, x_2) = (x_1 + \gamma_1, x_2 + \gamma_2)\ mod\ 1$, $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$.

2. Реализация (доказательство теорем 1.2. и 1.3.)

2.1. Доказательство леммы 1.1.

Покажем, что множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты. Предположим противное. Согласно [7] (следствие 6.3 к теореме 6.2) все многообразие M^3 представляется в виде $M^3 = \bigcup\limits_i W^s_{\Lambda_i} = \bigcup\limits_i W^u_{\Lambda_i}$, где Λ_i - базисное множество диффеоморфизма f из разложения $NW(f) = \bigcup\limits_i \Lambda_i$. Пусть $\mathcal{A} = \emptyset$. Тогда $M^3 = \bigcup\limits_i W^s_{\Lambda_i}$ при этом согласно [4] для любой точки $z \in \mathcal{R}$ устойчивое многообразие $W^s(z)$ принадлежит $\mathcal{R}$. Следовательно, $M^3 \subset \mathcal{R}$, что невозможно, так как множество $\mathcal{R}$ двумерно. Таким образом, множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты.

Рассмотрим множество $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ и обозначим через K его любую компоненту связности. Заметим, что $K \subset \bigcup\limits_{z\in\mathcal{A}} W^s(z)$, $K \subset \bigcup\limits_{z\in\mathcal{R}} W^u(z)$. Тогда существует единственная компонента связности A некоторого аттрактора из множества $\mathcal{A}$ и единственная компонента связности R некоторого репеллера из множества $\mathcal{R}$ такие, что $K \subset \bigcup\limits_{z\in A} W^s(z)$ и $K \subset \bigcup\limits_{z\in R} W^u(z)$. Следовательно, $clK = A\cup K\cup R$ и $A\cup R \subset \partial K$. Покажем, что $\partial K = A\cup R$. Предположим противное. Пусть существует компонента некоторого аттрактора A' такая, что $A'\cap\partial K \neq \emptyset$. Тогда в силу того, что компонента A' гомеоморфна ручно вложенному в M^3 тору [1] для любой окрестности $U(A')$ аттрактора A' справедливо $U(A')\cap K \neq \emptyset$, что невозможно, так как $K \subset \bigcup\limits_{z\in A} W^s(z)$. Таким образом, получаем $\partial K = A \cup R$

Покажем, что число компонент всех аттракторов из множества $\mathcal{A}$ совпадает с числом компонент репеллеров из множества $\mathcal{R}$. Зафиксируем любую компоненту некоторого аттрактора из множества $\mathcal{A}$ и обозначим ее через A_1. Тогда A_1 является границей двух областей $K_1, K_2 \subset M^3 \setminus (\mathcal{A}\cup\mathcal{R})$. Пусть $\partial K_1 = A_1 \cup R_1$ и $\partial K_2 = A_1 \cup R_2$. Тогда либо R_1 и R_2 совпадают и доказываемое утверждение верно, либо существуют области K_3, K_4 такие, что $R_1 \subset \partial K_3$, $R_2 \subset \partial K_4$. Обозначим A_2 граничную компоненту области K_4 отличную от R_2 и A_3 граничную компоненту области K_3, отличную от R_1. Возможны 2 случая: либо $A_2 = A_3$ и доказываемое утверждение верно, либо существуют области K_5, K_6 в границу которых входят компоненты A_3, A_2 соответственно. Продолжая рассуждения и учитывая, что число базисных множеств конечно получаем, что число периодических компонент всех аттракторов совпадает с числом периодических компонент всех репеллеров.

Докажем, что все периодические компонеты из множества $\mathcal{A}\cup\mathcal{R}$ имеют один и тот же период. Для этого сначала покажем, что если в $\mathcal{A}\cup\mathcal{R}$ существует компонента периода 1, то и все компоненты множества $\mathcal{A}\cup\mathcal{R}$ будут периода 1. Предположим противное, и предположим для определенности, что некоторая компонета связности A из множества $\mathcal{A}$ имеет период единица. Пусть K - область принадлежащая $M^3 \setminus (\mathcal{A}\cup\mathcal{R})$ такая, что $\partial K = A \cup R$, где R компонента связности, принадлежащая множеству $\mathcal{R}$. Покажем, что R также имеет период единица. Предположим противное, то есть $f(R) \neq R$. Положим $\bar{K} = f(K)$. Тогда $\bar{K} \neq K$ и Заметим, что $\partial\bar{K} = f(A)\cup f(R) = A\cup f(R)$ и $K \neq \bar{K}$. Рассмотрим трубчатую окрестность $U(A)$ аттрактора A ($U(A) \subset K\cup\bar{K}$). Обозначим U, $\bar{U}$ компоненты связности множества $U(A)\setminus A$ такие, что $U \subset K$, и $\bar{U} \subset \bar{K}$ соответственно. Так как A по предположению имеет период 1, то $f(U) \subset \bar{K}$ и $f(U)\cap\bar{U} \neq \emptyset$. Получаем противоречие с тем, что ограничение диффеоморфизма f на A сохраняет его ориентацию.

Пусть теперь в $\mathcal{A}\cup\mathcal{R}$ существуют компоненты различного периода. Обозначим k_i период компоненты $B_i \in \mathcal{A}\cup\mathcal{R}$. Среди чисел k_i выберем наименьшее и обозначим его k_f.

Рассмотрим диффеоморфизм $g = f^k$, для которого по крайней мере одна из компонент множества $NW(g)$ будет являться неподвижной. Тогда в силу доказанного все компоненты $g(B_i)$ также неподвижны, а значит все B_i имеют период k_f для любого i. Лемма 1.1. доказана.

2.2. Доказательство леммы 1.2.

Пусть V - компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ такая, что $\partial V = A \cup R$, где A - периодическая компонента некоторого аттрактора и R - периодическая компонента некоторого репеллера. Так как в силу [1] периодическая компонента A гомеоморфна двумерному тору T^2, то существует гомеоморфизм $h : A \to T^2$. В силу условия 4, определяющего класс G, для любой точки $v \in int\ V$ существует дуга l_v, $v \in l_v$ с граничными точками $x \in A, y \in R$ такая, что l_v является компонентой связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$. Обозначим через ν проекцию вдоль дуги l_v, ставящую в соответствие любой точке $v \in cl(l_v)$ точку $x = \nu(v) \in A$ и через $\rho_x(v)$ длину дуги от точки v до точки x.

Для любой точки $w \in T^2 \times [0, 1]$, $w = (z, t)$, положим $x = h^{-1}(z)$ ($x \in A$). Зададим гомеоморфизм $H_V : T^2 \times [0, 1] \to cl(V)$ следующим образом. Положим $H(w) = v$, где $v \in cl(V)$ такая точка, что $\nu(v) = x$, и выполняется условие $\frac{\rho_x(v)}{\rho_x(y)} = t$. Отображение $H_V : T^2 \times [0, 1] \to cl(V)$ по построению является взаимооднозначным и удовлетворяет условиям $H_V(T^2 \times \{0\}) = A$, $H_V(T^2 \times \{1\}) = R$, для любой точки $z \in T^2$ существуют точки $x \in A$, $y \in R$ такие, что $H_V(z \times [0, 1])$ есть замыкание компоненты связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ с граничными точками x, y, где $x = H_V(z, 0), y = H_V(z, 1)$. Из непрерывной зависимости устойчивых и неустойчивых многообразий точек из $A \cup R$ на компактных множествах следует, что H_V непрерывно и, следовательно, является гомеоморфизмом.

Лемма 1.2. доказана.

2.3. Доказательство теоремы 1.2.

Рассмотрим пространство $T^2 \times R$ и определим диффеоморфизм $\gamma : T^2 \times R \to T^2 \times R$ формулой $\gamma(x, t) = (\tau(x), t - 1)$. Положим $G = \{\gamma^k, k \in Z\}$ и $M_{C,\tau} = (T^2 \times R)/G$. Обозначим через $p_{M_{C,\tau}} : T^2 \times R \to M_{C,\tau}$ естественную проекцию. Пусть $\varphi_0 : I \to I$ — диффеоморфизм отрезка $I = [0, \frac{1}{k_f}]$ с конечным числом $2n_f + 1$ неподвижных гиперболических точек: источников $\alpha_1, \dots, \alpha_{n_f}$ и стоков $\omega_1, \dots, \omega_{n_f+1}$, причем будем считать, что точки ω_1, ω_{n_f+1} принадлежат концам отрезка I. Определим диффеоморфизм $\varphi_1 : [0, 1] \to [0, 1]$ по формуле $\varphi_1(t) = \varphi_0(t - \frac{k}{k_f}) + \frac{k}{k_f}$, где k наименьшее из чисел $\{0, \dots, k_f - 1\}$ такое, что $t - \frac{k}{k_f} \in I$. Для любой точки $t \in R$ положим $\Phi(t) = \varphi_1(t - n) + n$, где $n \in Z$ - число с наименьшим модулем, для которого $t - n \in [0, 1]$. Непосредственно проверяется, что $\Phi(t - m) = \Phi(t) - m$ для любого $m \in Z$. Зададим на пространстве $T^2 \times R$ отображение $F(x, t) = (f_C(x), \Phi(t) + \frac{l_f}{k_f})$. Покажем, что для любого $m \in Z$ и $z = (x, t)$ выполняется $F(\gamma^m(z)) = \gamma^m(F(z))$. В самом деле, $F(\gamma^m(x, t)) = F(\tau(x), t - m) = (f_C\tau(x)), \Phi(t - m) + \frac{l_f}{k_f}) = (\tau f_C(x), \Phi(t) - m + \frac{l_f}{k_f}) = \gamma^m(F(x, t))$. Следовательно, отображение $F : T^2 \times R \to T^2 \times R$ является накрывающим отображением для диффеоморфизма $\tilde{f} : M_{C,\tau} \to M_{C,\tau}$, определенного формулой $\tilde{f} = p_{M_{C,\tau}}(F(p^{-1}_{M_{C,\tau}}(z)))$.

В силу описанной конструкции неблуждающее множество диффеоморфизма $\tilde{f}$ является гиперболическим, состоит из $n_f k_f$ периодических компонент (диффеоморфных T^2) периода k_f, являющихся аттракторами и репеллерами. Более того, периодические точки диффеоморфизма $\tilde{f}$ образуют множество плотное в его неблуждающем множестве, то есть диффеоморфизм $\tilde{f}$ удовлетворяет аксиоме A. Из построения также следует, что устойчивые и неустойчивые многообразия точек неблуждающего множества пересекаются трансверсально и, следовательно, диффеоморфизм $\tilde{f}$ является структурно устойчивым. При этом пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий точек базисных множеств диффеоморфизма $\tilde{f}$ либо пусто, либо представляет собой счетное объединение открытых дуг, граничные точки которых лежат в $NW(\tilde{f})$. Таким образом, $\tilde{f} \in G$.

2.4. Доказательство теоремы 1.3.

Пусть $f : M^3 \to M^3$ — диффеоморфизм из класса G, неблуждающее множество которого состоит из n_f аттракторов и n_f репеллеров и B — периодическая компонента некоторого базисного множества диффеоморфизма f периода k_f. Для определенности будем считать B периодической компонентой некоторого аттрактора. Положим $g = f^{k_f}$ и аналогично конструкции описанной в разделе 1. зададим отображения H_1^+, τ_g^+ для диффеоморфизма g, где $\tau_g^+ = H_1^+((h_1^+)^{-1}(z), 1)$.

Рассмотрим пространство $T^2 \times R$ и определим диффеоморфизм $\gamma : T^2 \times R \to T^2 \times R$ формулой $\gamma(z,t) = (\tau(z), t-1)$, где $\tau = (h_1^+)^{-1}\tau_g^+ h_1^+$ и положим $\Gamma = \{\gamma^k, k \in Z\}$.

Зададим накрытие $p : T^2 \times R \to M^3$ следующим образом, для любой точки $w \in T^2 \times R$, $w = (z,t)$, положим $p(w) = p(z,t) = H_1^+(\tau^n(z), t-n)$, где $n \in Z$ - число с наименьшим модулем, для которого точка $(\tau^n(z), t-n)$ принадлежит $T^2 \times [0,1]$. Заметим, что $p(z,1) = p(\tau(z),0)$. В самом деле, $p(\tau(z),0) = H_1^+(\tau(z),0) = h_1^+(\tau(z)) = h_1^+((h_1^+)^{-1}\tau_g^+ h_1^+(z)) = \tau_g^+ h_1^+(z) = H_1^+((h_1^+)^{-1}(h_1^+(z)),1) = H_1^+(z,1) = p(z,1)$.

Из леммы 1.2. следует, что на множестве M^3 определено f-инвариантное одномерное слоение N_f, каждый слой которого является объединением замыканий открытых дуг, каждая из которых является компонентой связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ при некоторых $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{R}$. По построению для любой точки $z \in T^2$ накрытие p отображает множество $\{z\} \times R$ в некоторый слой слоения N_f. Тогда для диффеоморфизма f существует поднятие $F : T^2 \times R \to T^2 \times R$, которое имеет вид $F(z,t) = (\Phi(z), \Psi(t))$, где $\Phi(z)$ есть гомеоморфизм из T^2 в T^2 и Ψ - гомеоморфизм из R в R. Кроме того $F(z,t)$ удовлетворяет условию $F(\gamma^m(w)) = \gamma^m(F(w))$ ($m \in Z$, $\gamma \in \Gamma$), откуда следует, что $\Phi\tau = \tau\Phi$. Так как B - периодическая компонента периода k_f, то $f^{k_f}(B) = B$ и $\Phi^{k_f} = (h_1^+)^{-1} f^{k_f} h_1^+$. В силу того, что ограничение диффеоморфизма f^{k_f} сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора, получаем, что отображение Φ^{k_f} также сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора. Аналогично [1] (теорема 2) доказывается, что и отображение Φ сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора $f_C : T^2 \to T^2$, индуцированным некоторой матрицей $\mathbf{C}$, то есть существует гомеоморфизм $\tilde{h} : T^2 \to T^2$ такой, что выполняется равенство $\tilde{h} f_C = \Phi\tilde{h}$. Положим $\tau' = \tilde{h}^{-1}\tau\tilde{h}$. Покажем, что выполняется равенство $f_C\tau' = \tau' f_C$. В самом деле, $f_C\tau' = f_C\tilde{h}^{-1}\tau\tilde{h} = \tilde{h}^{-1}\Phi\tilde{h}\tilde{h}^{-1}\tau\tilde{h} = \tilde{h}^{-1}\Phi\tau\tilde{h} = \tilde{h}^{-1}\tau\Phi\tilde{h}$, с другой стороны $\tau' f_C = \tilde{h}^{-1}\tau\tilde{h} f_C = \tilde{h}^{-1}\tau\tilde{h}\tilde{h}^{-1}\Phi\tilde{h} = \tilde{h}^{-1}\tau\Phi\tilde{h}$.

Зададим на пространстве $T^2 \times R$ группу движений $\Gamma' = \{\gamma'^k, k \in Z\}$, где $\gamma' : T^2 \times R \to T^2 \times R$ - диффеоморфизм, заданный формулой $\gamma'(z,t) = (\tau'(z), t-1)$. Пусть $\tilde{F} : T^2 \times R \to T^2 \times R$ - такое отображение, что $\tilde{F}(z,t) = (f_C(z), \tilde{\Psi}(t))$, где $\tilde{\Psi}(t)$ - гладкое отображение построенное согласно конструкции, описанной при доказательстве теоремы 1.2., и сопряженное с $\Psi(t)$ посредством гомеоморфизма h_Ψ. Причем, отображения h_Ψ и $\tilde{\Psi}$ такие, что выполняются условия $\tilde{\Psi}(t-m) = \tilde{\Psi}(t) - m$, $h_\Psi(t-m) = h_\Psi(t) - m$ для любого целого числа m. Покажем, что $\tilde{F}(\gamma'^m(w)) = \gamma'^m(\tilde{F}(w))$ для любого $m \in Z$ и любой точки $w = (z,t)$. В самом деле, $\tilde{F}(\gamma'^m(w)) = \tilde{F}(\tau'(z), t-m) = (f_C(\tau'(z)), \tilde{\Psi}(t-m)) = (\tau' f_C(z), \tilde{\Psi}(t) - m) = \gamma'^m(\tilde{F}(w))$. Тогда отображение $\tilde{F} : T^2 \times R \to T^2 \times R$ является накрывающим отображением для некоторого диффеоморфизма $\tilde{f} : M^3 \to M^3$, определенного формулой $\tilde{f}(w) = p(\tilde{F}(p^{-1}(w)))$. По построению гомеоморфизм $\tilde{H} : T^2 \times R \to T^2 \times R$ заданный формулой $\tilde{H}(z,t) = (\tilde{h}(z), h_\Psi(t))$ удовлетворяет условию $\tilde{H}(\gamma'^m(w)) = \gamma'^m(\tilde{H}(w))$ ($m \in Z$, $\gamma' \in \Gamma$) и является сопрягающим для F и $\tilde{F}$, то есть $\tilde{H}\tilde{F} = F\tilde{H}$. Тогда $\tilde{f} \in \tilde{G}$ и диффеоморфизмы f и $\tilde{f}$ топологически сопряжены.

Список литературы

1. Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В., “О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях.”, *Мат. зам.*, **78**:6 (2005), 813 – 826.

2. Гринес В.З., Левченко Ю.А., “О топологической классификация диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами”, *Труды СВМО*, **13**:1 (2011), 29–31.

3. Mane R., “A proof of the C^1 stability conjecture”, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ . Math.*, 1987, № 66, 161 – 210.

4. Плыкин Р.В., “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С.Смейла”, *Математический сборник*, **84**:2 (1971), 301 – 312.

5. Robbin J., “A structural stability theorem”, *Ann. of Math.*, **94**:2 (1971), 447 – 493.

6. Robinson C., “Structural stability of C^1 diffeomorphisms”, *Differential Equations*, 1976, № 22, 28 – 73.

7. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747 – 817.

8. Bowen R., “Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms”, *Transactions of the American. Math. Soc.*, **154** (1971), 337 – 397.

9. Аносов Д.В., “Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем”, *Труды пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. Качественные методы, Ин-т математики АН УССР*, **2** (1970), 39 – 45.

10. Kaplan J., Mallet-Paret J. Yorke J., “The Lapunov dimension of nonwhere diffferntiable attracting torus”, *Ergodic theory and Dynam. Systems.*, 1984, № 2, 261 – 281.

11. Аров Д. З., “О топологическом подобии автоморфизмов и сдвигов компактных коммутативных групп”, *Успехи мат. наук*, **18**:5 (1963), 333 – 338.

On the realization of structurally stable diffeomorphisms with 2-dimensional surface basic sets.

© V.Z. Grines[7], Y.A. Levchenko[8]

Abstract. The present paper is continuation of the paper [2] which was devoted to topological classification of structurally stable diffeomorphisms with 2-dimensional connected surface basic sets. In the present paper topological classification of such diffeomorphisms was obtained in case if $NW(f)$ consist of 2-dimensional surface basic sets (which are not necessary connected) under certain conditions on the structure of the intersection of two-dimensional invariant manifolds. Moreover in this paper the problem of the realization of such diffeomorphisms was solved.

Key Words: diffeomorphism, basic set, attractor, topological classification.

[7] Heard of High Mathematics Chair, Agriculture Academy of Nizhnii Novgorod, Nizhnii Novgorod, vgrines@yandex.ru

[8] Assistant Professor of Chair High Mathematics, Agriculture Academy of Nizhnii Novgorod, Nizhnii Novgorod, ulev4enko@gmail.com