УДК 517.956.2

Инвариантные многообразия в неавтономных моделях нейронных сетей

© М.Л. Коломиец[1], А.Н. Сахаров[2]

Аннотация. Рассматриваются задача о структуре инвариантных множеств в неавтономных системах, описывающих динамику нейронных сетей. Показывается, что нормально гиперболические многообразия нелинейных расширений квазипериодических потоков на торе являются расслоения с базой тор и слоем однородное пространство компактной матричной группы Ли.

Ключевые слова: расширения потоков на компактных пространствах, нормально гиперболические многообразия, минимальные множества, нейронные сети.

1. Введение

Нейронная сеть – это направленный граф, вершины которого “нейроны”, а ребра – связи между “нейронами”. В данном контексте слово “нейрон” обозначает систему, функционирующую по известному закону и, вообще говоря, никак не связанное с настоящими нейронами. Описание функционирования нейронных сетей на языке динамических систем принято называть *нейродинамикой*. Обычно предполагается, что работа отдельного “нейрона” в сети описывается некоторой динамической системой (моделью “нейрона”), которая одна и та же для всех “нейронов”. Таким образом, нейронная сеть является системой связанных динамических систем (например, системой связанных осцилляторов).

Нейронные сети используются для решения различных задач теории информации: анализ временных рядов, кодирование и передача данных, распознавание образов (приложения нейронных сетей подробно описаны в [1]).

Для описания динамики нейронных сетей довольно часто используется непрерывная модель Хопфилда [2], представляющая собой автономную систему дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} \;=\; Ax + Ba(x) + b, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ – вектор состояния сети из n нейронов, A – отрицательно определенная диагональная матрица, B – симметрическая матрица (так называемая матрица синаптических весов), $a(x) = (a_1(x_1), \ldots, a_n(x_n))$. Эта модель успешно применяется для решения задач распознавания образов и обучения.

Для моделирования иных режимов работы нейронных сетей необходимо, как правило, рассматривать неавтономные системы (обычно, это системы с заданным внешним воздействием, зависящим от времени). Аналогом системы Хопфилда в неавтономном случае будет система

$$\dot{x} \;=\; A(t)x + B(t)a(x,t) + b(t). \tag{1.2}$$

При достаточно общих условиях эту систему можно превратить в автономную систему на косом произведении [3]. Предположим, что зависимость от времени является квазипериодической с вектором независимых частот $\omega \in \mathbb{R}^m$. Пусть $\mathbb{T}^m$ – m-мерный тор,

[1] доцент, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

[2] доцент, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ansakharov2008@yandex.ru.

$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ – угловые координаты на $\mathbb{T}^m$, $\{\varphi_t = \omega t + \varphi\}$ – квазипериодический поток на торе[3] с вектором частот ω. Рассмотрим автономную систему

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{x} = A(\varphi)x + B(\varphi)a(x, \varphi) + b(\varphi), \qquad (\varphi, x) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n. \tag{1.3}$$

Очевидно, что существует φ_* такое, что при $\varphi_t = \omega t + \varphi_*$ получаем систему (1.2). Система (1.3) порождает поток $\{f^t\}$, являющийся расширением потока на торе $\mathbb{T}^m$: $f^t(\varphi, x) = (\varphi_t, F(t, \varphi, x))$. Предполагается, что $a(x, \varphi) = a_x(\varphi)x + r(x, \varphi)$, где нелинейность по x удовлетворяет оценке $\|r(x, \varphi)\| \leq c$ при всех φ и $x \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, система (1.3) представима в виде возмущения линейной

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{x} = C(\varphi)x + b(\varphi), \qquad C(\varphi) = A(\varphi) + B(\varphi)a_x(\varphi). \tag{1.4}$$

Аналогом состояний равновесия системы (1.3) являются, в известном смысле, минимальные множества. Какова струтура минимальных (и, вообще, компактных инвариантных) множеств этой системы? Чтобы сформулировать ответ на этот вопрос напомним некоторые понятия и определения.

Рассмотрим однородную линейную систему

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{x} = D(\varphi)x. \tag{1.5}$$

Она определяет поток (линейное расширение потока на торе) $(\varphi, x) \mapsto (\varphi_t, U(t, \varphi)x)$, где $U(t, \varphi)$ – матрица Коши системы $\dot{x} = D(\varphi + \omega t)x$. Известно [4], что для этого потока существует разложение пространства $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n$ в сумму Уитни инвариантных подрасслоений:

$$\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n = W^u \oplus W^s \oplus W^c, \tag{1.6}$$

где W^u – равномерно неустойчивое, W^s – равномерно устойчивое, W^c – центральное инвариантные подрасслоения. Равномерная неустойчивость (устойчивость) означает, что существуют постоянные $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$ такие, что при всех $t \geq 0$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \|U(-t, \varphi)x\| &\leq \alpha e^{-\lambda t}\|x\| \qquad x \in W^u, \\ \|U(t, \varphi)x\| &\leq \alpha e^{-\lambda t}\|x\| \qquad x \in W^s. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Если $W^c = \varnothing$, то линейное расширение называется *гиперболическим.* Сужение линейного расширения на W^c называется *эллиптическим*, если W^c состоит из ограниченных траекторий, *параболическим*, если в W^c есть неограниченные траектории, норма которых растет не быстрее, чем t^β, $\beta > 0$, *неравномерно гиперболическим*, если в W^c есть неограниченные траектории, норма которых растет экспоненциально.

Пусть M – компактное инвариантое множество потока $\{f^t\}$, порождаемого (1.3). Ясно, что ограничение $\{f^t_M\}$ этого потока на M также является расширением потока на торе $\mathbb{T}^m$, т.е. существует непрерывное отображение $p : M \to \mathbb{T}^m$ такое, что $p \circ f^t_M = \varphi_t \circ p$. Пусть Df^t обозначает индуцируемый f^t поток, действующий на касательном расслоении $T(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n)$. Если M – многообразие, то сужение касательного расслоения на M допускает разложение в инвариантную относительно потока $Df^t_M = Df^t\big|_M$ сумму касательного $T(M)$ и нормального $N(M)$ подрасслоений

$$T(\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^n) = T(M) \oplus N(M).$$

[3] Вернее, на универсальном накрытии тора.

Определение 1.1. ([5], [6]) *Инвариантное многообразие M назвается нормально гиперболическим, если $N(M)$ разлагается в инвариантную сумму подрасслоений $N(M) = W^u(M) \oplus W^s(M)$ и существуют числа $\mu > 0$, $\lambda > 0$ такие, что*[4]

$$\begin{array}{ll} \|Df^t_M v\| \in (e^{-\lambda t}\|v\|, e^{\mu t}\|v\|), & v \in T(M), \\ \|Df^t_M v\| \geq e^{\mu t}\|v\|, & v \in W^u(M), \\ \|Df^t_M v\| \leq e^{-\lambda t}\|v\|, & v \in W^s(M). \end{array} \tag{1.8}$$

Нормально гиперболические многообразия сохраняются при возмущениях исходной системы [6].

Ясно, что инвариантные множества потока не обязательно являются многообразиями. Однако, как будет показано ниже минимальные множества потоков на косых произведениях являются подмножествами нормально гиперболических инвариантных многообразий. Поэтому уточнение поставленного выше вопроса теперь можно сформулировать так: какова структура нормально гиперболических инвариантных многообразий потока $\{f^t\}$? Ответ содержится в следующей теореме, являющейся основным результатом настоящей заметки.

Теорема 1.1. *Изолированное нормально гиперболическое многообразие потока $\{f^t\}$, порождаемого системой* (1.3), *гомеоморфно расслоению с базой $\mathbb{T}^m$ и слоем H^k, являющимся однородным k-мерным пространством $(0 \leq k \leq n)$ некоторой конечномерной компактной группы Ли.*

Эта теорема является обобщением результата для одномерных расширений квазипериодических потоков [11].

2. Инвариантные многообразия линейной системы

При сделанных выше предположениях относительно системы (1.3) структура инвариантных ее множеств в значительной степени определяется структурой инвариантных множеств системы (1.4). Описание последних связано с задачей *приводимости однородной системы к блочно-диагональному виду* (приводимости в смысле У. Коппеля) с помощью ляпуновского преобразования[5]. У. Коппель [7] рассматривал задачу приводмости для неавтономной системы с почти периодической матрицей коэффициентов $A(t)$, т.е. линейного расширения равномерно непрерывного потока на соленоиде[6]. Результат, полученный в [7], выглядит так: если линейное расширение потока на соленоиде гиперболично, то система блочно-диагонализуема с помощью ляпуновского преобразования.

Однако, остался открытым вопрос: будет ли это преобразование почти периодическим. Ответ на этот вопрос оказался отрицательным. Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, В.Я. Лин и О.В. Локуциевский в работе [8] представили пример вещественной почти периодической

---

[4] Отличие условий гиперболичности (1.7) от условий (1.8) объясняется тем, что в первом случае поток на торе линейный и $\|Df^t_{\mathbb{T}^m} v\| = \|v\|$, тогда как во втором случае поток на многообразии M произвольный.

[5] Здесь под ляпуновским преобразованием будем следующее: пусть поток θ_t является расширением потока φ_t, т.е. существует топологическое пространство X и непрерывное отображение $p : X \to \mathbb{T}^m$ такое, что $p \circ \theta_t = \varphi_t \circ p$. Тогда замена переменных $x = L(\theta_t)y$ называется ляпуновским преобразованием.

[6] Соленоид размерности m – пространство компактной абелевой группы – обратный предел $\varprojlim(\mathbb{T}^m, \alpha_k)$ последовательности групповых гомоморфизмов m-мерного тора $\alpha_n : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$. На универсальном накрытии тора каждому такому гомоморфизму соответствует линейное преобразование $A_n \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$. Гомоморфизм α_n является q_n-листным накрытием $\mathbb{T}^m$, $q_n = \det A_n$. Соленоид является локально тривиальным расслоением над $\mathbb{T}^m$ со слоем гомеоморфным канторову множеству.

системы порядка 8 с разложением на инвариантные четырехмерные подрасслоения, которая не приводима почти периодическим ляпуновским преобразованием (даже комплексным) к блочно-диагональному виду, согласованному с инвариантным разложением. В этой же работе они построили пример комплексной почти периодической системы порядка 2 с разложением на одномерные инвариантные подрасслоения, которая не приводится к диагональному виду никаким почти периодическим преобразованием. Причина этого заключается в топологической нетривиальности соответствующих инвариантных расслоений.

Построенные в [8] примеры неприводимых систем не являются гиперболическими. Простой пример комплексной квазипериодической гиперболической системы порядка с одномерными нетривиальными инвариантными подрасслоениями построен К. Палмером [9].

Обобщение результата В. Коппеля было получено Р. Эллисом и Р. Джонсоном [10]. Они построили минимальное расширение $\{\theta_t\}$ потока $\{\varphi_t\}$ такое, что индуцированное линейное расширение потока θ_t приводимо к блочно-диагональной форме, согласующейся с разложением (1.6), ляпуновским преобразованием $x = L(\theta_t)y$.

Доказательство теоремы начнем с формулировки условий существования инвариантных многообразий у неоднородной линейной системы (1.4).

Пусть однородная система (1.5) – нормально гиперболическое расширение потока $\{\varphi_t\}$ на замкнутом многообразии M, $P(\varphi)$ и $E - P(\varphi)$ – проекторы на подрасслоения W^s, W^u соответственно. Тогда корректно определена *функция Грина* $G : \mathbb{R} \times M \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}):$

$$G(t,\varphi) = \begin{cases} U(t,\varphi)P(\varphi_t), & t \geq 0; \\ -U(t,\varphi)(E - P(\varphi_t)), & t \leq 0. \end{cases}$$

Т е о р е м а 2.1. *У системы* (1.4) *существует единственное нормально гиперболическое инвариантное многообразие*

$$u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(s,\varphi)b(\varphi_s)ds, \tag{2.1}$$

гомеоморфное M, *тогда и только тогда, когда система* (1.5) *приводима к блочно-диагональному виду ляпуновским преобразованием* $x = L(\varphi_t)y$:

$$\dot\varphi = \omega, \qquad \dot y = \mathrm{diag}(D^s(\varphi), -D^u(\varphi))y,$$

где $D^s(\varphi)$, $D^u(\varphi)$ *– положительно определенные матрицы.*

Доказательство этой теоремы для случая, когда φ_t – поток на торе $\mathbb{T}^m$, изложено в [12], гл. 3, § 6,7. Для произвольного многообразия требуется небольшая модификация этого доказательства.

Вернемся к изучению гиперболического расширения квазипериодического потока на торе. Если инвариантные подрасслоения W^s, W^u нетривиальны, то ляпуновское преобразование к блочно-диагональному виду определено на некотором групповом расширении потока на торе [10]. В рассматриваемом случае – это произведение групп вращений $\mathrm{SO}(n_s, \mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(n_u, \mathbb{R})$, где $n_s = \dim W^s$, $n_u = \dim W^u$. Траектории этого группового расширения лежат на инвариантных многообразиях проективного потока, индуцированного линейным расширением [13]. Эти многообразия являются расслоениями с базой $\mathbb{T}^m$ и слоем, являющимся однородным пространством $\mathrm{SO}(n_s, \mathbb{R}) \times \mathrm{SO}(n_u, \mathbb{R})$ [7]. Таким образом, справедлива

[7] Эти рассуждения показывают, что полное описание динамической системы включает в себя не толь-

Т е о р е м а 2.2. *Любое минимальное множество потока, порождаемого* (1.4), *содержится в некотором компактном инвариантном многообразии этого потока.*

Пусть, теперь, $W^c \neq \varnothing$.

Л е м м а 2.1. *Если сужение линейного расширения* (1.5) *на* W^c *является эллиптическим, то инвариантное многообразие неоднородной системы не будет изолированным.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что существует ляпуновское преобразование, определенное на торе $\mathbb{T}^m$, приводящее систему (1.5) к блочно-диагональному виду

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{y} = \operatorname{diag}(D_u(\varphi), D_s(\varphi), D_c(\varphi))y,$$

соответствующему инвариантному разложению (1.6). Рассмотрим подсистему на инвариантном подрасслоении W^c:

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{z} = D_c(\varphi)z + p(\varphi). \tag{2.2}$$

Все решения однородной системы ограничены, то матрица Коши этой системы $U_c(t,\varphi)$ принимает значения в группе ортогональных матриц. Замена $z = U_c(t,\varphi)w$ приводит систему (2.2) к виду

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{w} = U_c^{-1}(t,\varphi)p(\varphi)U_c(t,\varphi).$$

Поэтому решения неоднородной системы либо все ограничены, либо все неограничены, т.е. инвариантные многобразия не будут изолированными[8].
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 2.2. *Если сужение линейного расширения* (1.5) *на* W^c *является параболическим или неравномерно гиперболическим, то неоднородная система не имеет инвариантных многообразий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В этом случае любое ограниченное решение $z(t,\varphi)$ однородной системы не отделено от нуля, т.е. существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k \to \infty$, такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} z(t_k,\varphi) = 0$. Согласно теореме 2 из [16] ни одно из ограниченных решений неоднородной системы не может быть квазипериодическим. Замыкание ограниченного решения представляет собой компактное инвариантное множество, которое не является тором (в противном случае все ограниченные решения были бы квазипериодические).
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Из этих лемм следует отсутствие изолированных инвариантных торов в случае, когда W^c является прямой суммой эллиптических, параболических и неравномерно гиперболических инвариантных подрасслоений.

ко описание динамики на предельных множествах, но и описание поведения траекторий блуждающего множества. Действительно, рассмотрим два гиперболических линейных расширения квазипериодического потока на торе. Предположим, что размерности устойчивых и неустойчивых подрасслоений у обоих потоков одинаковы, но одно расширение имеет тривиальные расслоения, а другое – нетривиальные. Ясно, что они не будут топологически эквивалентными, так как их поведение на блуждающем множестве различно. Подобная ситуация наблюдается и для грубых систем [14].

[8] Согласно теории Фавара [15] все ограниченные решения – квазипериодические, т.е. замыкание любого ограниченного решения – тор.

3. Инвариантные многообразия нелинейной системы

При сделанных выше предположениях система (1.3) является асимптотически линейной. Поэтому можно предположить, что инвариантные нормально гиперболические многообразия сохраняются при малом возмущении системы. Подробное доказательство этого предположения для случая, когда инвариантное многообразие тор $\mathbb{T}^m$ в книге А.М. Самойленко [12], гл. IV, теорема 1.

Нахождение приближенный инвариантных многообразий системы (1.3) основано на следующем приеме. Пусть $x = u(\varphi) = u_0 + v(\varphi)$ – инвариантный тор системы

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{x} = C(\varphi)x + b(\varphi) + R(\varphi, x), \tag{3.1}$$

где $u_0 = \int\limits_{\mathbb{T}^m} u(\varphi)d\varphi$. Поэтому должно выполнятся равенство

$$\int\limits_{\mathbb{T}^m} [C(\varphi)u(\varphi) + R(\varphi, u(\varphi))]d\varphi = 0.$$

Пусть уравнение (порождающее уравнение)

$$\int\limits_{\mathbb{T}^m} [C(\varphi)u + b(\varphi) + R(\varphi, x)]d\varphi = 0 \tag{3.2}$$

имеет ℓ различных корней $u_1, \ldots, u_\ell$. Будем искать инвариантный тор системы (3.1) в виде $u_k(\varphi) = u_k + v_k(\varphi)$. Тогда в качестве линейного приближения $v_k(\varphi)$ берется линейная система

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{v_k} = C(\varphi)v_k + C(\varphi)u_k + b(\varphi) + R(\varphi, u_k).$$

При условии, что линейная часть системы (3.1) является гиперболической, инвариантный тор $v_k(\varphi)$ представим согласно (2.1) в виде

$$\begin{aligned} v_k(\varphi) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(s,\varphi)(C(\varphi_s)u_k + b(\varphi_s)R(\varphi_s, u_k)ds = \\ &= u_k + \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(s,\varphi)[b(\varphi_s) + R(\varphi_s, u_k)]ds. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Авторы выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку этой работы, гранты 11-01-12056-офи-м, 12-01-00672.

Список литературы

1. Haykin S., *Neural networks. Comprehensive foundation*, Prentice Hall, N.J., 1999 (русск. пер. Хайкин С. Нейронные сети. Полный курс. М. Вильямс. 2006.).

2. Hopfield J.J., “Neural networks and physical systems with tmergent collective computational abilities”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA.*, **79** (1982), 2554–2558.

3. Бронштейн И. У., *Неавтономные динамические системы*, Штиница, Кишенев, 1984.

4. Selgrade J., “Isolated invariant sets for flows on vector bundles”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **203** (1975), 359–390.

5. Palis J., Takens F., “Topological equivalence of normally hyperbolic dynamical systems”, *Topology*, **16** (1977), 335–345.

6. Mane R., “Persistent manifolds are normally hyperbolic”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **246** (1978), 261–283.

7. Coppel W.A., “Dihotomies and reducibility”, *J. Diff. Equat.*, **4** (1968), 386–398.

8. Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Лин В. Я., Локуциевский О. В., “О топологических причинах аномального поведения некоторых почти периодических систем”, *Проблемы асимптотической теории нелинейных колебаний. Киев. Наукова думка.*, 1977, 54–61.

9. Palmer K.J., “Reducibility of almost periodic linear systems”, *Lect. Notis. Math.*, **846** (1981), 273–279.

10. Ellis R., Johnson R. A., “Topological dynamics and linear differential systems”, *J. Diff. Equat.*, **44** (1982), 21–39.

11. Коломиец М. Л., Сахаров А. Н., “Странные нехаотические аттракторы в системах с квазипериодическим возмущением”, *Журнал СВМО*, **13**:3 (2011), 53–65.

12. Самойленко А. М., *Элементы математической теории многочастотных колебаний*, Наука, М, 1987.

13. Коломиец М. Л., Сахаров А. Н., “Эквивалентность линейных расширений минимальных потоков”, *Труды СВМО*, **12**:1 (2009), 181–189.

14. В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, “О топологически несопряженных диффеоморфизмах Морса-Смейла с тривиальными пучками сепаратрис”, *Журнал СВМО*, **12**:1 (2009), 24–31.

15. Жиков В. В., Левитан Б. М., “Теория Фавара”, *УМН*, **32**:2 (1977), 123–171.

16. Ortega R., Tarallo M., “Almost periodic linear differential equations with non-separated solutions”, *J. of Functional Analisis*, **237** (2006), 402–426.

Invariant manifolds of nonautonomous models neural networks

© **M.L. Kolomiets[9], A.N. Sakharov[10]**

Abstract. We consider the problem of the Structure of invariant sets in nonautonomous systems describing the dynamics of neural networks. It is shown that normal hyperbolic manifolds of nonlinear extensions of quasiperiodic flows on the torus is a bundle over the torus with a homogeneous space of compact matrix Lie group as a fiber.

Key Words: flows extensions on compact spaces, normally hyperbolic diversity, attractors, minimal sets, neural networks

[9] Assistant professor of department of higher mathematics, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.

[10] Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ansakharov2008@yandex.ru.