УДК 517.9

Оценка качества спецификации моделей системной динамики

© **С.И. Спивак[1], О.Г. Кантор[2]**

Аннотация. Рассматривается проблема оценки качества спецификации математических моделей системной динамики. На основе подхода Л.В. Канторовича разработан новый метод определения параметров моделей, нивелирующий неточности наблюдений и позволяющий учитывать дополнительные условия.

Ключевые слова: спецификация моделей системной динамики, качество математических моделей, подход Л.В. Канторовича, предельно допустимые погрешности измерений.

Категория «качество» применительно к математическим моделям может трактоваться двояко. В обычном понимании – это принципиальная способность модели описывать исследуемый объект («да» – описывает, «нет» – не описывает); в расширенном понимании «качество» модели характеризуется некоторой числовой величиной, принимающей значения в определенном интервале. С математической точки зрения эти два разных понимания качества отвечают ситуациям, когда моделям ставятся в соответствие дискретные или непрерывные числовые характеристики.

В случае использования первой трактовки наличие или отсутствие у модели «качественного» признака может осуществляться двумя принципиально отличными способами: первый состоит в апостериорном сопоставлении результатов модельных расчетов с фактическими данными, т.е. проверка практикой, второй – в проверке модели на предмет выполнения ряда критериев подобно тому, как это происходит в эконометрике. Второй способ подразумевает использование моделей, позволяющих описывать наблюдаемые объекты, с приемлемыми значениями качественной характеристики. При этом обычно предполагается связность уровней качества, т.е. вся совокупность значений качественной характеристики может быть разбита на непересекающиеся интервалы, соответствующие различным (неповторяющимся) уровням качества. Другими словами, качество используемой модели должно определяться на основании некоторого критерия, принимающего значения в заданном интервале. Под задачей определения качества модели будем подразумевать задание некоторого числового критерия и алгоритм его идентификации [5], позволяющий ответить на вопрос, описывает ли модель изучаемую систему с требуемым уровнем качества, что в нашем понимании соответствует попаданию значений введенного критерия внутрь заданного интервала. Под «качеством спецификации модели» будем понимать числовой критерий, характеризующий насколько выбранный тип модели и фиксированный набор значений ее параметров, обеспечивают качество модели в целом.

Проблема оценки качества спецификации моделей является актуальной для задач системной динамики – метода изучения сложных систем с нелинейными обратными связями, разработанный в середине XX века профессором Массачусетского технологического института Дж. Форрестером. В методе системной динамики предполагается, что для всех системных уровней пишутся уравнения одного и того же типа [2]:

$$\frac{dx}{dt} = x^{+} - x^{-}, \tag{1.1}$$

[1] Заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; s.spivak@bashnet.ru.

[2] Старший научный сотрудник, ИСЭИ УНЦ РАН, г. Уфа; o_kantor@mail.ru.

где x^+ и x^- - положительный и отрицательный темпы скорости системного уровня x, каждый из которых включает в себя все факторы, вызывающие соответственно рост и убывание x. Предполагается, что x^+ и x^- являются функциями только системных уровней. Таким образом, уравнения системной динамики представляют собой дифференциальные уравнения вполне определенной структуры. Общий вид системы (1.1) в случае исследования модели с двумя переменными следующий

$$\frac{dx}{dt} = a_1{\cdot}x^{\alpha_1}{\cdot}y^{\beta_1} - a_2{\cdot}x^{\alpha_2}{\cdot}y^{\beta_2}, \tag{1.2}$$
$$\frac{dx}{dt} = a_3{\cdot}x^{\alpha_3}{\cdot}y^{\beta_3} - a_4{\cdot}x^{\alpha_4}{\cdot}y^{\beta_4}.$$

Очевидно, что спецификация модели системной динамики (1.2) и, как следствие, ее качество, зависят от значений параметров $\{a_j, \alpha_j, \beta_j\}$, $j = \overline{1,4}$, которые определяются по имеющейся статистической информации и только в самых простых случаях - на основе очевидных логических связей между системными уровнями и темпами.

Для непосредственной оценки качества спецификации параметров моделей системной динамики авторами предлагается использовать подход, основоположником которого является Л.В.Канторович, впервые высказавший в своей работе [1] идеи получения точных двусторонних границ для параметров моделей и областей расположения искомых и наблюдаемых величин. Существенным является тот факт, что предложенный Л.В. Канторовичем подход явился новым словом в теории математической обработки эксперимента, т.к. не требует знания о статистических свойствах распределения погрешностей измерений. Более того, при использовании метода Канторовича возможно включение в модель различных дополнительных условий, оказывающих влияние на качество модели в целом, соблюдение которых продиктовано очевидными соображениями.

В общем виде постановка задачи оценки качества спецификации моделей на основе использования подхода Канторовича имеет следующий вид.

$$F(a_1, ..., a_k) \to \underset{\overline{a}}{opt} \tag{1.3}$$

$$|x_i^{эксп} - x_i^{расч}| \le \delta_i, i = \overline{1,n}, \tag{1.4}$$

$$G(x, \overline{a}) \subset S^0, \tag{1.5}$$

где $\overline{a} = \{a_1, ..., a_k\}$ - искомые параметры, определяющие спецификацию модели $x = x(x, \overline{a})$; n – число наблюдений; $F(a_1, ..., a_k)$ - критерий качества модели; (1.4) – условия, характеризующие близость расчетных и экспериментальных значений; δ_i – величина предельно допустимой погрешности аппроксимации в i-м наблюдении; (1.5) – дополнительные условия.

Л.В. Канторович, описывая предлагаемый им подход к обработке наблюдений, считал, что исследователь должен располагать информацией о величине предельно допустимой погрешности. Однако далеко не всегда это является возможным. В связи с этим считаем целесообразным рассматривать предельно допустимые погрешности аппроксимации $\{\delta_i\}$ как неизвестные величины, а определение параметров моделей осуществлять с позиций учета следующих аспектов: необходимо добиваться, во-первых, близости расчетных и экспериментальных данных, во-вторых, – минимально возможной области предельно допустимых погрешностей аппроксимации; в-третьих, – приемлемого уровня вариации оцениваемых параметров. Под минимально возможной областью предельно допустимых погрешностей аппроксимации будем подразумевать область значений величин $\{\delta_i\}$ с минимальным диаметром.

Близость расчетных и экспериментальных данных, а также размер области допустимых погрешностей аппроксимации могут быть выражены отдельными критериями. Однако, использование критериев вида

$$F = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \to \min_{\overline{a},\{\delta_i\}}, \tag{1.6}$$

или

$$F = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\delta_i}{x_i^{эксп}}\right|\right) \cdot 100\% \to \min_{\overline{a},\{\delta_i\}}, \tag{1.7}$$

суть которых – сумма квадратов отклонений экспериментальных данных от расчетных и средняя ошибка аппроксимации, соответственно, позволит определять параметры модели таким образом, что будет одновременно обеспечиваться достижение двух целей: наилучшая близость расчетных и экспериментальных данных и достижение минимально возможной области допустимых погрешностей аппроксимации, т.к. функциональный вид критерия (1.6) соответствует квадрату диагонали координатного параллелепипеда, в который вписана область предельно допустимых ошибок аппроксимации $\{\delta_i\}$, а критерия (1.7) – среднему относительному отклонению расчетных данных от экспериментальных, выраженному в процентах.

Повышенные требования к качеству модели, которые, на взгляд авторов, должны реализовываться посредством определения параметров модели, обладающих приемлемым уровнем вариации, обусловливаются неточностью экспериментальных данных, т.к. в результате минимизации критериев (1.6) или (1.7) при условиях (1.4), (1.5) может быть получена качественная модель «некачественных» данных.

Под *уровнем вариации отдельного параметра* (I_{a_p}) модели будем понимать интервал его значений, для каждого элемента которого модель характеризуется приемлемым качеством. Очевидно, чем больше длина интервала (I_{a_p}), тем большее количество приемлемых вариантов существует для спецификации модели, а это в свою очередь увеличивает неопределенность при выборе ее окончательного вида. Под *уровнем вариации всей совокупности параметров* аппроксимирующей функции будем понимать некую числовую характеристику множества I, представляющего собой область в пространстве значений величин $a_1, ..., a_k$, каждая точка которой обеспечивает приемлемое качество модели F^0, определяемое соотношением $F \leq F^0$. В качестве такой характеристики наиболее логичным является использование диаметра множества I, однако, определение границ данного множества представляет собой весьма непростую самостоятельную задачу. В этой связи более простым, хотя и менее точным, является способ оценки уровня вариации всей совокупности параметров аппроксимирующей функции на основе вычисления диагонали координатного параллелепипеда $\Omega_k = \left\{M(a_1, ..., a_k) | a_p \in I_{a_p}, p = \overline{1,k}\right\}$. Также оценивать уровень вариации всей совокупности параметров аппроксимирующей функции целесообразно посредством анализа среднего значения относительной вариации ее параметров, которое по сути служит мерой разброса допустимых значений величин $\left\{a_p | p = \overline{1,k}\right\}$ вокруг соответствующих точечных оценок.

Таким образом, авторами настоящей работы предлагается следующая процедура реализации задачи оценки качества параметров моделей системной динамики.

1. Сбор данных.

2. Решение оптимизационной задачи (1.6), (1.4), (1.5) или (1.7), (1.4), (1.5) (в зависимости от предпочтений исследователя в отношении критерия качества), в результате чего будут определены оптимальное значение критерия качества F^*, величины погрешностей

аппроксимации $\left\{\delta_i^*, i=\overline{1,n}\right\}$ и набор значений параметров $\overline{a}^* = \left\{a_1^*,...,a_k^*\right\}$, определяющий спецификацию модели.

3. Последовательное решение k задач вида

$$a_p \to \min_{\overline{a},\{\delta_i\}} (\max_{\overline{a},\{\delta_i\}}), \tag{1.8}$$

$$|x_i^{эксп} - x_i^{расч}| \le \delta_i, i=\overline{1,n}, \tag{1.9}$$

$$G(x,\overline{a}^p) \subset S^0, \tag{1.10}$$

$$F \le F^0, \tag{1.11}$$

где $p=\overline{1,k}$, $F^0 \ge F^*$.

Условие (1.11) обеспечивает учет вариабельности (неопределенности) параметров модели при условии сохранения допустимого уровня качества модели в целом.

В результате решения всех k задач (1.8)-(1.11) будут определены интервалы изменения параметров модели $a_p \in [a_p^{min}, a_p^{max}], p=\overline{1,k}$, обеспечивающих ее приемлемое качество.

4. Определение величин $\Delta_p = a_p^{min} - a_p^{max}$, $p=\overline{1,k}$, характеризующих вариации параметров модели.

5. Расчет интегрального показателя вариации параметров модели по формуле

$$G = \sqrt{\sum_{p=1}^{k} \Delta_p^2}, \tag{1.12}$$

либо

$$G = \frac{1}{k}\left(\sum_{p=1}^{k}\left|\frac{\Delta_p}{a_p^*}\right|\right) \cdot 100\%. \tag{1.13}$$

6. Интерпретация значения интегрального показателя вариации параметров модели в соответствии с принятой исследователем шкалой для его оценки.

Модель будет считаться качественной, если на этапах 2 и 5 будут получены удовлетворительные значения критериев F и G, соответственно. В противном случае исследователю придется переходить к другому составу переменных в модели системной динамики, а затем вновь оценивать ее качество.

Заметим, что на взгляд авторов, критерии (1.7) и (1.13) в контексте решаемой задачи имеют более наглядную трактовку. Кроме того, использование критерия (1.13) по сравнению с критерием (1.12) позволяет более объективно оценивать вариацию параметров модели ввиду того, что при его использовании учитываются относительные вариации параметров, а не абсолютные, которые могут существенно отличаться для различных параметров.

Учитывая нелинейность моделей системной динамики и связанную с эти фактом сложность численной реализации приведенных моделей, предлагается использование идей линеаризации уравнений системной динамики (1.2) по параметрам $\{a_j, \alpha_j, \beta_j\}$, $j=\overline{1,4}$ [3].

$$\frac{dx}{dt} \approx a_1 - a_2, \tag{1.14}$$

$$\frac{dy}{dt} \approx a_3 - a_4.$$

Таким образом, на основании имеющихся наблюдений возможным является определение точечных и интервальных оценок только для параметров $\{a_j\}$, $j=\overline{1,4}$. Полученные точечные и интервальные оценки $\{a_j^0\}$, $j=\overline{1,4}$ и $\{[a_j^-;a_j^+]\}$, $j=\overline{1,4}$ могут быть использованы для определения точечных и интервальных оценок для всех параметров модели (1.2) на основе использования линейных частей разложений уравнений в ряд Тейлора с центром в точке $\{a_j^0, \alpha_j=0, \beta_j=0\}$, $j=\overline{1,4}$:

$$\frac{dx}{dt} \approx a_1 + a_1^0 \cdot \ln x \cdot \alpha_1 + a_1^0 \cdot \ln y \cdot \beta_1 - a_2 - a_2^0 \cdot \ln x \cdot \alpha_2 - a_2^0 \cdot \ln y \cdot \beta_2, \tag{1.15}$$
$$\frac{dy}{dt} \approx a_3 + a_3^0 \cdot \ln x \cdot \alpha_3 + a_3^0 \cdot \ln y \cdot \beta_3 - a_4 - a_4^0 \cdot \ln x \cdot \alpha_4 - a_4^0 \cdot \ln y \cdot \beta_4.$$

Знание интервалов $\{[a_j^-;a_j^+]\}$, $j=\overline{1,4}$ позволит варьировать центр разложения в ряде Тейлора.

В этом случае оценку качества спецификации моделей системной динамики следует осуществлять посредством применения изложенной выше процедуры к каждой из моделей (1.14) и (1.15) в отдельности. При этом целесообразным является учет требований близости экспериментальных и расчетных данных в виде дополнительных условий

$$\left| \left(\frac{dx}{dt}\right)^{расч}\Bigg|_i - \left(\frac{dx}{dt}\right)^{эксп}\Bigg|_i \right| \le \varepsilon_i^x, i=\overline{1,n}, \tag{1.16}$$

$$\left| \left(\frac{dy}{dt}\right)^{расч}\Bigg|_i - \left(\frac{dy}{dt}\right)^{эксп}\Bigg|_i \right| \le \varepsilon_i^y, i=\overline{1,n}. \tag{1.17}$$

Заметим, что стандартный путь решения задачи определения параметров моделей состоит в минимизации отклонений расчетных и экспериментальных данных в смысле некоторого введенного критерия. Основанием для выбора критерия является информация о законе распределения погрешности измерений. В реальных системах, как правило, такая информация отсутствует, в то время как доступной является информация о предельно допустимой погрешности измерений. Именно этот факт является главным доводом в пользу применения идеи, лежащей в основе подхода Л.В.Канторовича.

Список литературы

1. Канторович Л. В., “О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений”, *Сибирский математический журнал*, **3**:5 (1962), 701–709.

2. Махов С. А., “Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера”, *Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН*, **6** (2005), 24.

3. Моисеев Н. Н., *Математические задачи системного анализа*, Наука, М., 1981, 488 с.

4. Спивак С. И., “Информативность кинетических измерений”, *Вестник Башкирского университета*, **14**:3 (2009), 1056–1059.

5. Спивак С. И., Кантор О. Г., “Качество моделей математической обработки наблюдений социально-экономических систем”, *Системы управления и информационные технологии*, 2012, № 2(48), 44–49.

Evaluation the quality specification of system dynamics models.

© **S.I. Spivak**[3], **O.G. Kantor**[4]

Abstract. The problem of evaluation the quality specification of system dynamics models is considered. Based on the approach of L.V. Kantorovich, a new method of determination the model parameters is developed. It grades inaccuracies of socio-economic observations and allows taking into account additional terms and conditions.
Key Words: specification of system dynamics models, quality of mathematical models, L.V. Kantorovich's approach, maximum allowable error of measurement.

[3] Head of the Department of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; s.spivak@bashnet.ru.
[4] Senior Research Scientist, Institute of Social and Economic Research, Ufa; o_kantor@mail.ru.