УДК УДК 517.929

Устойчивость неограниченных решений по первому приближению

© А.Ф. Зубова[1], В.И. Зубов[2], И.В. Зубов[3], С.В. Зубов[4], М.В. Стрекопытова[5]

Аннотация. В настоящей статье изучаются свойства инвариантных множеств динамических периодических систем, определяющих уходящие движения.

Ключевые слова: система, семейство, теорема, интеграл, собственное число, оценка, предел.

Изучим неограниченные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и получим условия устойчивости неограниченных решений и оценки на скорость приближения траекторий возмущенного движения к траектории невозмущенного.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + F(X,Z), \\ \dot{Z} &= R + G(X,Y), \end{aligned} \tag{1.1}$$

где

$$X = (x_1, \dots, x_n)^*,\ Z = (z_1, \dots, z_k)^*,\ R = (r_1, \dots, r_k)^*,$$

$$F(0,z) = 0, \quad G(0,Z) = 0.$$

Пусть для достаточно малых величин $\delta > 0$ при $\|X\| < \delta$ имеют место оценки

$$\forall Z \in E_k \quad \|F(X,Z)\| \le c_1 \|X\|^{1+\alpha} \quad (\alpha > 0,\ c_1 > 0).$$

Здесь $\|X\| = \sqrt{X^* X}$. Пусть $r_i > 0$. Пусть также $\|G\| \le c_2 \|X\|^a \|Z\|^b \ (a, b, c_2 > 0)$.

Тогда система (1.1) имеет семейство равновесных движений

$$X = 0, \quad Z = Rt + Z_0. \tag{1.2}$$

Наряду с системой (1.1) рассмотрим систему

$$\dot{X} = AX, \quad \dot{Z} = R, \tag{1.3}$$

которую назовем *системой первого приближения.* Система (1.3) имеет семество решений (1.2). Поведение системы (1.3) по отношению к устойчивости семейства (1.2) определяется свойствами собственных чисел матрицы A. Естественно ожидать, что требование к собственным числам матрицы A, обеспечивающие устойчивость или неустойчивость

[1] Д.т.н., профессор СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Аспирант СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[3] Профессор СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[4] Доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[5] Доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

семейства (1.2) системы (1.3), обеспечивают устойчивость или неустойчивость семейства равновесных решений (1.2) системы (1.1). Покажем это.

Пусть $Re\lambda_j < 0$, где λ_j $(j = 1, \ldots, n)$ - собственные числа матрицы A. Тогда существует положительно определенная квадратичная форма $V(X)$, удовлетворяющая уравнению

$$(\nabla V(X), AX) = W(X), \tag{1.4}$$

где $W(X)$ - отрицательно определенная квадратичная форма [1].

Пусть a_1, a_2 - соответственно наименьшее и наибольшее собственные числа матрицы квадратичной формы $V(X), b_1, b_2$ - аналогичные значения для $W(X)$. Тогда справедливы неравенства

$$\begin{gathered} a_1\|X\|^2 \leq V(X) \leq a_2\|X\|^2, \\ b_1\|X\|^2 \leq W(X) \leq b_2\|X\|^2, \\ b_1 \leq b_2 \leq 0 \leq a_1 \leq a_2. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Отметим, что при малых $\|X\|$ справедливы оценки $\forall Z \in E_k$

$$(b_1 - \mu)\|X\|^2 W(X) + (\nabla V(X), F(X,Z)) = (b_2 + \mu)\|X\|^2, \tag{1.6}$$

где μ - малое положительное число [2].

Продифференцируем $V(X)$ в силу системы (1.1). Имеем

$$\frac{dV}{dt}|_{(2)} = W + (\nabla V(X), F(X,Z)). \tag{1.7}$$

Разделим обе части этого выражения на V и проинтегрируем в пределах от t_0 до t:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{dV}{V} = \int_{t_0}^{t} (W + (\nabla V, F(X,Z)))V^{-1} d\tau.$$

Отсюда

$$V = V_0 \exp(\int_0^t (W + (\nabla V, F(X,Z))))V^{-1} d\tau.$$

Если заменить числитель и знаменатель дроби под интегралом на большее соответственно меньшее значения из (1.5), (1.6), то получим неравенство [3]

$$V \leq V_0 \exp(\frac{b_2 + \mu}{a_1}(t - t_0)).$$

Таким образом,

$$a_1\|X\|^2 \leq a_2\|X_0\|^2 \exp(\frac{b_2 + \mu}{a_1}(t - t_0)).$$

Очевидно, что $\|X\| \to 0$ при $t \to 0$ (так как $b_2 > 0$).

Подставив оценку для $\|X\|$ в оценку $\|G\|$, получим

$$\|G(X,Z)\| \leq c_2\|X_0\|^a \exp(\frac{a}{2a_1}(b_2 + \mu)(t - t_0))\|Z\|^b, \tag{1.8}$$

где $c_2 > 0$. Отсюда видно, что за счет выбора X_0 мы всегда обеспечим неравенства

$$|g_i(X,Z)| < \frac{r_i}{2}.$$

Тогда

$$z_i \leq \frac{3}{2} r_i(t - t_0) + z_i^0,$$

и выражение (1.8) будет справедливо при $t \geq 0$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть для системы* (1.1) *собственные числа матрицы* A *имеют отрицательные вещественные части,* $F(0, Z) = 0$, $G(0, Z) = 0$, *компоненты вектора* R *положительны,* $\forall Z \in E_k$ *справедливы оценки:*

1) $\|F(X, Z)\| \leq c_1 \|X\|^{1+\alpha}$ *при малых* $\|X\|$, *где* $c_1, \alpha > 0$;

2) $\|G\| \leq c_2 \|X\|^a \|Z\|^b$ $(a, b, c_2 > 0)$.

Тогда равновесное решение (1.2) *системы* (1.1) *орбитально асимптотически устойчиво* [4].

2. Выводы

Одной из целей настоящей статьи является изучение уходящих движений динамических систем. В основаном это системы, определяемые системами дифференциальных уравнений. Отметим, что далеко не каждая система дифференциальных уравнений определяет динамическую систему. При выполнении условий теоремы существования и единственности одним из основных вопросов, возникающих здесь, является вопрос о продолжаемости решений на бесконечном интервале. Можно рассматривать системы дифференциальных уравнений, которые формально не определяют динамической системы, но имеют продолжаемые решения, которые и можно изучать как уходящие движения некоторой динамической системы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-00624).

Список литературы

1. В. И. Зубов, “Каноническая структура векторного силового поля”, *Проблемы механики твердого деформируемого тела*, Судостроение, Л., 1970, 167-170.

2. А. Ф. Зубова, *Математические методы моделирования промышленных процессов и технологий*, СПбГУ, СПб., 2004, 472 с.

3. А. В. Зубов, *Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления*, Мобильность плюс, СПб., 2010, 319 с.

4. А. В. Зубов, *Управление динамическими системами*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб., 2005, 83 с.

The stability of no limits solutions on first approximation

© A.F. Zubova[6], V.I. Zubov[7], I.V. Zubov[8] S.V. Zubov[9]; M.V. Strecopitova[10]

Abstract. In giving article is learning measures invariant multitudes of dynamical periodical systems, is define going motions.

Key Words: system, family, theorem, integral, own number, estimate, limit.

[6] D.t.n., professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[7] Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[8] Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[9] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[10] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru