УДК 517.938

О внутренней и окрестностной классификации аттракторов

© Е.В. Жужома[1], Н.В. Исаенкова[2], Л.А. Куприна[3], В.С. Медведев[4]

Аннотация. Изучается связь между внутренней и окрестностной топологической сопряженностью аттракторов некоторого класса динамических систем.

Ключевые слова: Внутренняя сопряженность, окрестностная сопряженность, топологическая эквивалентность

В качественной теории динамических систем имеется два основных типа классификации преобразований с точностью до сопряженности: внутренняя и внешняя. Приведем точные определения. Пусть преобразования $f : M \to M$, $g : N \to N$ имеют инвариантные множества Λ_f, Λ_g соответственно. Ограничения $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ этих преобразований на их инвариантные множества называются *внутренне сопряженными*, если существует гомеоморфизм $\varphi : \Lambda_f \to \Lambda_g$, такой, что $\varphi \circ f|_{\Lambda_f} = g \circ \varphi|_{\Lambda_f}$. Если φ можно продолжить до гомеоморфизма $\varphi : M \to N$ или $\varphi : U(\Lambda_f) \to U(\Lambda_g)$ некоторых окрестностей $U(\Lambda_f)$, $U(\Lambda_g)$ множеств Λ_f, Λ_g соответственно, сохранив соотношение $\varphi \circ f|_{\Lambda_f} = g \circ \varphi|_{\Lambda_f}$, то $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ называются *окрестностно сопряженными*. Ясно, что из окрестностной сопряженности следует внутренняя сопряженность. Соответствующую классификацию будем называть *внутренней* и *окрестностной*.

Пусть M - компактное гладкое многообразие с непустой границей, и пусть $f : M \to f(M) \subset M$ - диффеоморфизм на свой образ, причем включение $f(M) \subset M$ собственное. Предположим, что f имеет инвариантное замкнутое множество Λ (основные понятия и факты см. в [1], [2]). Следуя [23], [25], будем называть Λ *растягивающимся аттрактором*, если Λ есть притягивающее, гиперболическое множество, в котором плотны периодические точки, и размерность неустойчивого многообразия любой точки из Λ равна топологической размерности $d = \dim \Lambda$ множества Λ. Согласно [15] и [25], растягивающиеся аттракторы локально устроены как произведение канторова множества на евклидово пространство $\mathbb{R}^d$.

Из работ Гринеса В. З. [3]-[7], Жирова А.Ю. [10]-[12], Плыкина Р. В.[17], можно извлечь, что из внутренней сопряженности одномерных растягивающихся аттракторов диффеоморфизмов двумерных компактных многообразий следует их окрестностная сопряженность. На многообразиях размерности не меньше трех окрестностная классификация растягивающихся аттракторов коразмерности один была получена Гринесом В.З., Жужомой Е.В., Плыкиным Р.В. в работах [8], [9], [16].

Внутренняя классификация ограничений диффеоморфизмов на их растягивающиеся аттракторы получена Вильямсом [23] - [25]. Поэтому естественным образом возникает вопрос: влечет ли внутренняя классификация окрестностную. В работе [21] было доказано, что ответ, вообще говоря, отрицательный. Именно, Робинсон и Вильямс [21] построили

[1] профессор, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

[2] старший преподпватель, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; nisaenkova@mail.ru.

[3] доцент, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

[4] старший научный сотрудник, НИИ ПМК при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru.

два диффеоморфизма $f : M \to f(M) \subset M$, $g : N \to g(N) \subset N$ пятимерных компактных многообразий M, N в себя с двумерными растягивающимися аттракторами Λ_f, Λ_g соответственно такими, что $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ внутренне сопряжены, но окрестностно не сопряжены. Что касается других размерностей, то этот вопрос до настоящего времени оставался открытым.

Главным результатом настоящей статьи является следующая теорема, которая расширяет набор размерностей, в которых внутренняя классификация отличается от окрестностной:

Теорема 1.1. *Существуют четырехмерные компактные многообразия M, N и диффеоморфизмы $f : M \to f(M) \subset M$, $g : N \to g(N) \subset N$ с одномерными растягивающими аттракторами Λ_f, Λ_g соответственно такие, что ограничения $f|_{\Lambda_f}$, $g|_{\Lambda_g}$ внутренне сопряжены, но окрестностно не сопряжены.*

Для доказательства этого факта построим сперва общую конструкцию диффеоморфизма с одномерным растягивающимся аттрактором.

Пусть $M^n = M$ - компактное гладкое n-многообразие с непустым краем, наделенное римановой структурой, которая индуцирует на M метрику ρ. Для гладкого преобразования $\psi : M \to M$ будем обозначать через $D\psi : TM \to TM$ дифференциал ψ, который определен на касательном расслоении TM. Предположим, что существует гомотопная тождественному периодическая изометрия $R : M \to M$ такая, что

$$R^k \equiv id, \quad k \geq 2, \quad DR^i = id, \quad i \geq 1. \tag{1.1}$$

Пусть $e : M \to e(M) \subset M$ - гладкое вложение M в себя, являющееся равномерно сжимающим отображением $e(M) \subset int\ M$, т.е. существует $0 < \lambda < 1$ такое, что

$$diam\ (e^n(M)) \leq \lambda^n \cdot diam\ (M), \quad diam\ (M) = \max_{(p,q)\in M\times M} \rho(p,q) \tag{1.2}$$

и множества

$$e(M), R\left(e(M)\right), \ldots, R^{k-1}\left(e(M)\right) \quad \text{попарно не пересекаются.} \tag{1.3}$$

Определим отображение $f_i : [\frac{i}{k}; \frac{i+1}{k}] \times M \to [0;1] \times M$, $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, положив

$$f_i(t,z) = \big(kt - i, R^i \circ e(z)\big), \quad t \in \left[\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}\right], \quad z \in M. \tag{1.4}$$

На рис. 1 приведена иллюстрация для $k = 3$.

Нетрудно показать, что f_i является сюрьктивным отображением множества $[\frac{i}{k}; \frac{i+1}{k}] \times M$ на множество $[0;1] \times M$, где $i \in \{0, \ldots, k-1\}$.

Рассмотрим фактор-многообразие M_1, получаемое из прямого произведения $[0;1]\times M$ отождествлением точек $(1,z)$, $(0, R(z))$,

$$M_1 = [0;1] \times M / \left((1,z) \simeq (0, R(z))\right), z \in M.$$

Согласно (1.4),

$$f_i\left(\frac{i+1}{k}, z\right) = (1, R^i \circ e(z)), \quad f_{i+1}\left(\frac{i+1}{k}, z\right) = (0, R^{i+1} \circ e(z)) \simeq (1, R^i \circ e(z)).$$

Поэтому совокупность отображений f_0, $\ldots$, f_{k-1} порождает отображение $F : M_1 \to M_1$, которое является гомеоморфизмом на свой образ, $M_1 \to F(M_1) \subset M_1$. Так как R

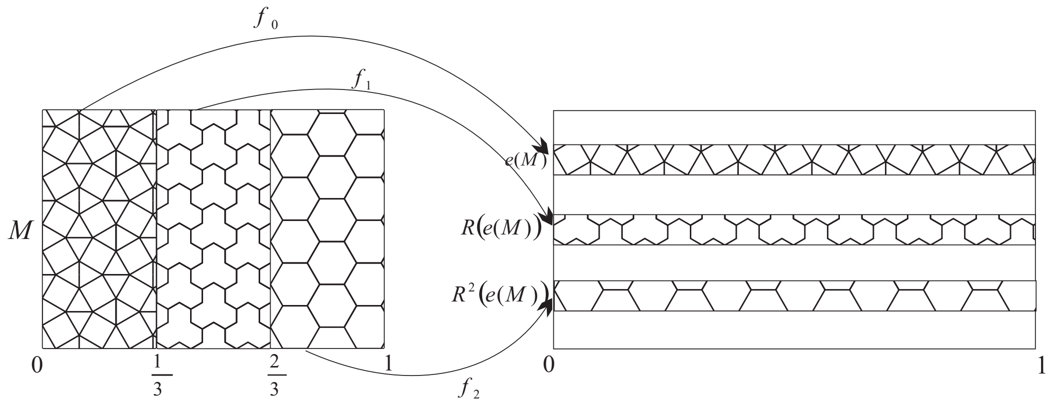

Рис. 1:

гомотопно тождественному, то M_1 гомеоморфно прямому произведению $S^1 \times M$. Из (1.4) получаем

$$Df_i(t,z) = Df_{i+1}(t,z) = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & De(z) \end{pmatrix},$$

поскольку

$$DR^i \circ e(z) = DR(R^{i-1} \circ e(z)) \cdot \ldots \cdot DR \circ e(z) \cdot De(z) = De(z).$$

Отсюда и (1.4) вытекает, что F является диффеоморфизмом на свой образ, причем дифференциал DF сохраняет естественное разложение $T(M_1) = T(S^1 \times M) = T(S^1) \oplus T(M)$,

$$DF = (k, De) : T(S^1) \oplus T(M) \to T(S^1) \oplus T(M). \tag{1.5}$$

Так как включение $F(M_1) \subset M_1$ собственное и отображение $M_1 \to F(M_1)$ является диффеоморфизмом на свой образ, то получаем цепочку последовательно вложенных множеств

$$\cdots \subset \mathcal{N}_{j+1} \subset \mathcal{N}_j \subset \cdots \subset \mathcal{N}_1 \subset M_1, \quad \text{где} \quad \mathcal{N}_j = \bigcap_{i=0}^{j} F^i(M_1). \tag{1.6}$$

Положим

$$\bigcap_{j\geq 0} \mathcal{N}_j = \bigcap_{i\geq 0} F^i(M_1) \stackrel{\text{def}}{=} Sol(F).$$

Так как множества $\mathcal{N}_j$ замкнутые, то из (1.6) следует, что $Sol(F)$ есть замкнутое и притягивающее множество.

Л е м м а 1.1. *Множество Sol (F) инвариантно относительно F и F^{-1}.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (1.6), $F^i(M_1) \supset F^{i+1}(M_1)$. Тогда

$$F(Sol\ (F)) = F(\bigcap_{n\geq 0} F^n(M_1)) = \bigcap_{n\geq 0} F^{n+1}(M_1) = Sol\ (F).$$

$$F^{-1}(Sol\ (F)) = F^{-1}(\bigcap_{n\geq 0} F^n(M_1)) = \bigcap_{n\geq 0} F^{n-1}(M_1) = Sol\ (F).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Множество $\{t\} \times M \stackrel{\text{def}}{=} M_t$ назовем t - *сечением*, где $t \in S^1$. Каждое сечение естественным образом отождествляется с M посредством проекции $p_2 : S^1 \times M \to M$. Согласно (1.4), диффеоморфизм F переводит t-сечение в $(kt \bmod 1)$ - сечение. Поэтому естественным образом определяется диаметр множества $F^n(M_t)$ по следующему правилу $diam\ F^n(M_t) = diam\ p_2(F^n(M_t))$.

Следующие две леммы описывают локальную структуру множества $Sol(F)$.

Лемма 1.2. *Для любого фиксированного* $t \in S^1$, $diam\ F^n(M_t) \to 0$ *при* $n \to \infty$, *причем стремление величины* $diam\ F^n(M_t)$ *к нулю равномерно относительно* t.

Доказательство. Поскольку R - изометрия, а отображение F переводит t-сечение в $(kt \bmod 1)$-сечение, то $diam\ F^n(M_t) = diam\ e^n(M)$. Отсюда и 1.2 следует требуемый результат.
Доказательство закончено.

Лемма 1.3. *Для любого фиксированного* $t \in S^1$ *пересечение* $M_t \cap Sol(F) = C_t$ *- множество канторовского типа.* $Sol(F)$ *локально гомеоморфно прямому произведению* C_t *на* $\mathbb{R}$.

Доказательство. Множество $M_t \cap Sol(F)$ замкнуто, так как является пересечением замкнутых множеств.

Сперва покажем индукцией по n, что пересечение $\mathcal{N}_n \cap M_t$ состоит из k^n связных компонент. Непосредственно из определения отображения F вытекает, что множество $M_t \cap F(M_1)$ состоит из k связных компонент. Так как имеется k различных значений t_1, $\ldots$, $t_k \in S^1$ таких, что $t = kt_1 \bmod 1 = \cdots = kt_k \bmod 1$, то

$$M_t \cap \mathcal{N}_n = \bigcup_{i=1}^{k} F(\mathcal{N}_{n-1} \cap M_{t_i}).$$

Согласно предположению индукции, каждое множество $\mathcal{N}_{n-1} \cap M_{t_i}$ состоит из k^{n-1} связных компонент. Отсюда вытекает требуемое утверждение.

Согласно лемме 1.2., диаметр каждой компоненты связности стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует, что $M_t \cap Sol(F)$ совершенное и нигде не плотное. Поэтому $Sol(F)$ локально гомеоморфно прямому произведению множества канторовского типа на $\mathbb{R}$.
Доказательство закончено.

Следуя [23], [25], построим символическую модель ограничения $F|_{Sol(F)}$ отображения F на $Sol(F)$. Обозначим через $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$ прямое произведение счетного семейства окружностей $S_i^1 = S^1$, наделенное тихоновской топологией (в этой топологии база образована множествами $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} V_i$, где V_i открыты в S_i^1, и только для конечного множества индексов i множества V_i отличны от S_i^1, см., например, [14], стр. 155). Точками множества $\prod_{i \in \mathbb{N}} S_i^1$ являются последовательности $\{t_i\}_{i=0}^{\infty}$, где $t_i \in S_i^1$. Обозначим через Σ_k^- подмножество множества $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$, состоящее из последовательностей $\{t_i\}_0^{\infty}$, где $t_i = kt_{i+1} \bmod 1$ при всех $i \geq 0$. Определим на Σ_k^- отображение $\widehat{E}_k : \Sigma_k^- \to \Sigma_k^-$, положив

$$\widehat{E}_k\left(\{t_0, \ldots, t_i, \ldots\}\right) = \{kt_0 \bmod 1, t_0, \ldots, t_i \ldots\}.$$

Пара $(\Sigma_k^-, \widehat{E}_k)$ является обратным пределом линейного растягивающего отображения окружности $E_k : S^1 \to S^1$, $E_k(x) = kx \bmod 1$, степени k.

Важной для построения символической модели является следующая лемма.

Лемма 1.4. *Каждой точке* $p \in Sol\ (F)$ *соответствует единственная последовательность точек* $\{t_i\}_0^{\infty}$, $t_i \in S^1$, *и соответствующая последовательность* t_i*-сечений* M_{t_i} *таких, что*

- $p \in \cdots \subset F^{i+1}(M_{t_{i+1}}) \subset F^i(M_{t_i}) \subset \cdots \subset M_{t_0}$;
- $p = \cap_{i \geq 0} F^i(M_{t_i})$;
- $t_i = E_k(t_{i+1})$, $i \geq 0$.

Доказательство. Для точки p существует единственная точка $t_0 \in S^1$ такая, что $p \in M_{t_0}$. Из (1.4) следует, что существуют s_1 , ..., $s_k \in S^1$ такие, что $E_k(s_1) = E_k(s_2) = \ldots = E_k(s_k) = t_0$, и множества $F(M_{s_1})$, ..., $F(M_{s_k})$ принадлежат t_0 -сечению M_{t_0} . Из (1.3) следует, что $F(M_{s_1})$, ..., $F(M_{s_k})$ попарно не пересекаются. Поэтому существует единственное s_j такое, что $p \in F(M_{s_j})$. Положим $t_1 = s_j$. Аналогично, получаем значения t_2 , t_3 , ... и соответствующие им множества $F^2(M_{t_2})$, $F^3(M_{t_3})$, ... Из построения вытекает, что $t_i = E_k(t_{i+1})$ для всех $i \geq 0$. Из леммы 1.2. следует, что $p = \cap_{i \geq 0} F^i(M_{t_i})$.
Доказательство закончено.

Определим отображение $h : Sol\ (F) \to \Sigma_k^-$ по правилу $h(p) = \{t_i\}_0^\infty$, $p \in Sol\ (F)$, $t_i \in S^1$. Следующая лемма показывает, что ограничение диффеоморфизма $F|_{Sol\ (F)}$ сопряжено специальному сдвигу на обратном пределе линейного растягивающего отображения окружности $\widehat{E}_k$.

Лемма 1.5. *h является гомеоморфизмом таким, что* $h \circ F|_{Sol\ (F)} = \widehat{E}_k \circ h|_{Sol\ (F)}$.

Доказательство. Поскольку пересечение последовательно вложенных друг в друга компактных множеств непустое, то пересечение $\cap_{i \geq 0} F^i(M_{t_i})$ непустое для любой последовательности $\{t_i\}_0^\infty \in \Sigma_k^-$. Из леммы 1.2. следует, что это пересечение состоит из одной точки. Поэтому h – сюрьективное отображение.

Для двух различных точек z , $z' \in Sol\ (F)$ найдутся две непересекающиеся компоненты $F^i(M_{t_i})$, $F^i(M_{t'_i})$ из соответствующих последовательностей компонент, удовлетворяющих лемме 1.4., так как их диаметры стремятся к нулю. Отсюда следует, что h взаимно однозначно.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$, $r \in \mathbb{N}$ и рассмотрим окрестность точки $h(p)$. Согласно определению топологии на множестве Σ_k^- , окрестностью этой точки является множество вида $U(h(p)) = \{\{x_i\}_0^\infty \in \Sigma_k^- : |x_i - t_i| < \varepsilon,$ для $i = 0, \ldots, r\}$. Поскольку для точки $h(p)$ в ее окрестности $U(h(p))$, заданной числами $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, выполняется равенство $t_{r-j} = E_k^j(t_r)$ для всех $1 \leq j \leq r$, а отображение E_k непрерывное, то существует такое $0 < \delta \leq \varepsilon$, что $|x_r - t_r| < \delta$ влечет $|x_i - t_i| < \varepsilon$ для всех $i = 0, \ldots, r$.

Обозначим $M_{t,\delta} \stackrel{\text{def}}{=} [t-\delta, t+\delta] \times M_t$. Пусть $U(p)$ окрестность точки $p \in Sol\ (F)$. Тогда для любой точки $q \in U(p) \cap Sol\ (F)$, в силу леммы 1.4., $h(q) = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\} \in \Sigma_k^-$ и $q \in F^r(M_{x_r}) \subset F^{r-1}(M_{x_{r-1}}) \subset \cdots \subset F(M_{x_1}) \subset M_{x_0}$.

Непосредственно из определения отображения F вытекает, что множество $M_t \cap F(M_1)$ состоит из k связных компонент, так как имеется k различных значений t_1 , ..., $t_k \in S^1$ таких, что $t = kt_1 \mod 1 = \cdots = kt_k \mod 1$. Поскольку F диффеоморфизм, существует $\delta_1 > 0$, $\delta_1 \leq \varepsilon$ такое, что $F\left(M_{t_1^1,\delta_1}\right) \cap F\left(M_{t_1^2,\delta_1}\right) \cap \ldots \cap F\left(M_{t_1^k,\delta_1}\right) = \varnothing$ и $F\left(M_{t_1^i,\delta_1}\right) \subset F\left(M_{t_0,\varepsilon}\right)$ при $i = \overline{1,k}$. Тогда точка q принадлежит одному из множеств $F\left(M_{t_1^i,\delta_1}\right)$, пусть для определенности $q \in F\left(M_{t_1,\delta_1}\right)$. Рассмотрим сперва, что $q \in M_{x_0} \cap F(M_{x_1})$. Так как $q \in U(p) \cap Sol\ (F)$, тогда $q \in M_{x_0} \cap F(M_{x_1}) \cap F\left(M_{t_1,\delta_1}\right)$. Следовательно $F(M_{x_1}) \cap F\left(M_{t_1,\delta_1}\right) \neq \varnothing$ и $M_{x_1} \cap M_{t_1,\delta_1} \neq \varnothing$, тогда $|x_1 - t_1| < \delta_1$. Из равномерной непрерывности эндоморфизма E_k вытекает неравенство $|E_k(x_1) - E_k(t_1)| < \varepsilon$, т.е. $|x_0 - t_0)| < \varepsilon$. Таким образом, для двух первых координат последовательности $h(q) = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\}$ доказали, что $h(q) \in U(h(p))$. Рассуждая аналогично, существует $\delta_r > 0$, $\delta_r \leq \ldots \leq \delta_1 \leq \varepsilon$ такое, что $|x_{r-1} - t_{r-1}| < \varepsilon$, ..., $|x_0 - t_0| < \varepsilon$.

Из определения отображений F и h вытекает, что $h(q) \in U(h(p))$ для любой точки $q \in U(p)$. Значит, h – непрерывное отображение. h^{-1} – непрерывное отображение, как прообраз непрерывного отображения на компакте. Таким образом, h - гомеоморфизм.

Непосредственно проверяется равенство $h \circ F|_{Sol\ (F)} = \widehat{E}_k \circ h|_{Sol\ (F)}$, то есть наличие коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Sol\ (F) & \xrightarrow{F} & Sol\ (F) \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \Sigma_k^- & \xrightarrow{\widehat{E}_k} & \Sigma_k^-. \end{array}$$

Лемма доказана.
Доказательство закончено.

Лемма 1.6. *$\widehat{E}_k$ имеет всюду плотную положительную полуорбиту в Σ_k^-.*

Доказательство. Пусть $U(q)$ - окрестность произвольной точки $q = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\} \in \Sigma_k^-$. Не уменьшая общности, можно считать, что $U(q)$ является (ε, r) – окрестностью, т.е. $\{t'_0, t'_1, \ldots, t'_i, \ldots\} \in U(q)$ тогда и только тогда, когда $|t_0 - t'_0| < \varepsilon$, ..., $|t_{r-1} - t'_{r-1}| < \varepsilon$. Из равномерной непрерывности линейного растягивающего отображения окружности $E_k(t) = kt \mod 1$, степени $k \geq 2$ вытекает, что существует $\delta > 0$ такое, что $|t_{r-1} - t'_{r-1}| < \delta$ влечет $|t_j - t'_j| < \varepsilon$ для всех $0 \leq j \leq r-2$, так как $t_j = k^{r-1-j} t_{r-1} \mod 1$, $t'_j = k^{r-1-j} t'_{r-1} \mod 1$. Не уменьшая общности, можно считать, что $\delta \leq \varepsilon$. Тогда из $|t_{r-1} - t'_{r-1}| < \delta$ следует, что $q' = \{t'_0, t'_1, \ldots, t'_{r-1}, \ldots\} \in U(q)$. Так как отображение E_k содержит всюду плотную полуорбиту $O^+(x_0) = \{k^n(x_0) \mod 1 : n \geq 0\}$, $x_0 \in S^1$, тогда $q_0 = \{x_0, x_1, \ldots, x_i, \ldots\} \in \Sigma_k^-$. Существует $l \in \mathbb{N}$ такое, что $|k^l(x_0) - t_{r-1}| < \delta$, $k^l(x_0) \in S^1$. Поэтому $\widehat{E}_k^{r+l}(q_0) = \{k^{l+r}(x_0), \ldots, k^l(x_0), \ldots\} \in U(q)$. Следовательно, положительная полуорбита точки q_0 всюду плотна в Σ_k^-.
Доказательство закончено.

Теорема 1.2. *Множество $Sol\ (F)$ является одномерным растягивающимся аттрактором отображения F, локально гомеоморфным прямому произведению множества канторовского типа на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Из леммы 1.1. следует, что $Sol\ (F)$ есть инвариантное множество такое, что ограничение $F|_{Sol\ (F)}$ есть диффеоморфизм. Ясно, что $Sol\ (F)$ является замкнутым множеством. Из леммы 1.2. следует, что $Sol\ (F)$ является притягивающим множеством.

В силу леммы 1.6., $\widehat{E}_k$ имеет всюду плотную положительную полуорбиту в множестве Σ_k^-, таким образом $Sol\ (F)$ является базисным множеством. Из сопряженности $F|_{Sol\ (F)}$ и $\widehat{E}_k$, согласно лемме 1.5., вытекает, что $Sol\ (F)$ состоит из неблуждающих точек диффеоморфизма $F|_{Sol\ (F)}$ со всюду плотным множеством периодических точек. Из (1.2), (1.4) и (1.5), множество $Sol\ (F)$ гиперболическое с одномерным растягивающимся расслоением. Следовательно, $Sol\ (F)$ – растягивающийся аттрактор. Последнее утверждение теоремы о том, что множество $Sol\ (F)$ локально гомеоморфно прямому произведению множества канторовского типа на $\mathbb{R}$ вытекает из леммы 1.3..
Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 1.1. проводится предоставлением соответствующих примеров диффеоморфизмов f, g, в рамках рассмотренной выше конструкции, удовлетворяющих условиям (1.1) – (1.4).

Построим первый пример диффеоморфизма. Пусть $M = S^1 \times D^3$, где $S^1 = [0;1]/(0 \sim 1)$ – единичная окружность, $D^3 \subset \mathbb{R}^3$ – единичный шар в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$. Определим на D^3 координаты (x,y,z), рассмотрим вложение $e : D^3 \to e(D^3) \subset D^3$ такое, что $e(x,y,z) = (\frac{1}{10}x, \frac{1}{10}y + \frac{1}{2}, \frac{1}{10}z)$ и поворот на $90°$ вокруг оси OZ $R_{90°} : D^3 \to D^3$ вида

$$R_{90°}(x,y,z) = \begin{cases} x' = x\cos\frac{\pi}{2} - y\sin\frac{\pi}{2} \\ y' = x\sin\frac{\pi}{2} + y\cos\frac{\pi}{2} \\ z' = z \end{cases}$$

т.е $R^4 \equiv id$ и $k = 4$, удовлетворяющие условиям (1.1) – (1.3).

Тогда в силу теоремы 1.2. диффеоморфизм $f = f_{Sm} : S^1 \times D^3 \to f(S^1 \times D^3) \subset S^1 \times D^3$ имеет одномерный растягивающийся аттрактор $Sol\ (f) = \Lambda_{Sm}$, который локально гомеоморфен прямому произведению стандартного канторовского множества $\mathfrak{K}$ в D^3 на $\mathbb{R}$. Каждая точка из $\mathfrak{K}$ есть пересечение счетного семейства последовательно вложенных трехмерных шаров. Отсюда и замкнутости $\mathfrak{K}$ вытекает, что любая простая замкнутая кривая, принадлежащая множеству $D^3 - \mathfrak{K}$, стягивается в точку в множестве $D^3 - \mathfrak{K}$. Поскольку диффеоморфизмы подобного типа f_{Sm} были введены в теорию динамических систем Смейлом [22], то естественно назвать Λ_{Sm} *одномерным соленоидом Смейла.*

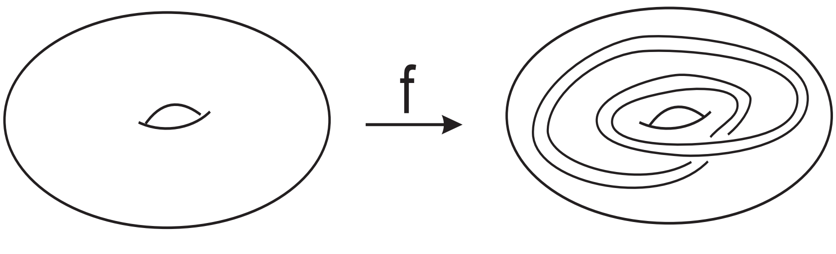

Рис. 2: $f = f_{Sm}$ для $k = 2$ и $n = 3$.

Диффеоморфизм f_{Sm} схематично изображен на рис. 2 для $k = 2$ и $n = 3$. Следуя [19], будем число k называть порядком соленоида Λ_{Sm}. Из леммы 1.5. вытекает, что порядок является полным инвариантом внутренней сопряженности диффеоморфизмов $f_{Sm}|_{\Lambda_{Sm}}$.

В основе построения второго примера диффеоморфизма с одномерным растягивающим аттрактором для $n = 3$ лежит конструкция Антуана [18]. Пусть $T_1 = S^1 \times D^2$ - трехмерный замкнутый полноторий. Рассмотрим семейство T_2 циклически зацепленных полноториев внутри T_1, см. рис. 3. Предполагается, что число компонент семейства T_2 равно $k \geq 4$. Далее по индукции определим семейство T_{n+1}, $n \geq 2$, k^n попарно не пересекающихся полноториев следующим образом. Каждая компонента C_i^n конфигурации T_n есть полноторий. Для каждой C_i^n, $1 \leq i \leq k^{n-1}$, обозначим через φ_i^n отображение подобия $T_1 \to C_i^n$. Под действием φ_i^n конфигурация T_2 отображается в конфигурацию $\varphi_i^n(T_2)$, которая представляет собой семейство k полноториев в C_i^n. Положим $T_{n+1} = \cup\varphi_i^n(T_2)$. Таким образом, мы получаем последовательность T_1, T_2, $\ldots$ вложенных друг в друга конфигураций. Множество $\mathfrak{C} = \bigcap T_n$ называется *ожерельем Антуана.* Известно, что $\mathfrak{C}$ является вполне разрывным множеством канторовского типа таким, что фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \mathfrak{C}) \neq 0$. Ясно, что если K - классическое канторово множество, лежащее на некоторой прямой в пространстве $\mathbb{R}^3$, то $\pi_1(\mathbb{R}^3 - K) = 0$. Поэтому, несмотря на то, что множества K и $\mathfrak{C}$ гомеоморфны, не существует гомеоморфизма $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, переводящего K в $\mathfrak{C}$.

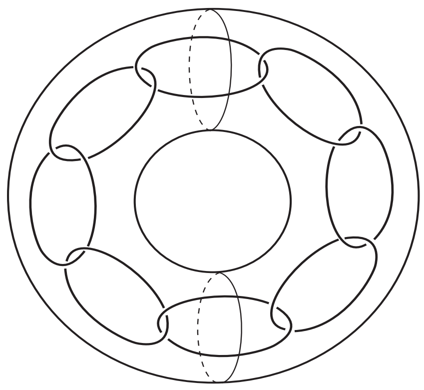

Рис. 3: Семейство T_2.

Переобозначим $M = S^1 \times T_1$, $\varphi_1^1 = e$. Немного модифицируем конструкцию Антуана так, чтобы существовал сдвиг $R : T_1 \to T_1$ вдоль оси $\{0\} \times D^2$ такой, что $R(x,y,z) = (x + \frac{1}{4} \bmod 1, y, z)$, где $x \in S^1$ и $(y,z) \in D^2$, переводящий T_2 в себя, и число $k = 4$, которые удовлетворяют условиям (1.1) - (1.3) и $R^4 \equiv id$. Например, можно каждую компоненту C_i^1 заменить полноторием, у которого одна часть подобна компоненте C_1^1, а вторая часть - компоненте C_2^1 из оригинальной конструкции Антуана. Ясно, что в результате получится множество со свойствами ожерелья Антуана. Диффеоморфизм $g = g_{NRW} : S^1 \times M \to g(S^1 \times M) \subset S^1 \times M$ имеет одномерный растягивающийся аттрактор $Sol\ (g) = \Lambda_{NRW}$, который локально гомеоморфен прямому произведению $\mathbb{R}$ на ожерелье Антуана $\mathfrak{C}$ в $\mathbb{R}^3$. Поскольку впервые базисные множества подобного типа были введены в работах [20], [21], то естественно назвать Λ_{NRW} *одномерным соленоидом Ньюхауса-Робинсона-Вильямса (НРВ).*

Из леммы 1.5. вытекает, что диффеоморфизмы $f_{Sm}|_{\Lambda_{Sm}}$, $g_{NRW}|_{\Lambda_{NRW}}$ при фиксированном $k = 4$ внутренне сопряжены.

Лемма 1.7. *Диффеоморфизмы $f_{Sm}|_{\Lambda_{Sm}}$ и $g_{NRW}|_{\Lambda_{NRW}}$ окрестностно не сопряжены.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует гомеоморфизм $\varphi : U(\Lambda_{Sm}) \to U(\Lambda_{NRW})$ некоторых окрестностей $U(\Lambda_{Sm})$, $U(\Lambda_{NRW})$ множеств Λ_{Sm}, Λ_{NRW} соответственно, который осуществляет сопряженность диффеоморфизмов $f_{Sm}|_{\Lambda_{Sm}}$, $f_{NRW}|_{\Lambda_{NRW}}$. В силу конструкции, любая точка Λ_{Sm} имеет окрестность U_0 локально гомеоморфную прямому произведению $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times D^3$ для некоторого $\varepsilon > 0$, причем пересечение Λ_{Sm} с U_0 совпадает с $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times \mathfrak{K}$, где $\mathfrak{K}$ - стандартное канторово множеством в D^3. Не уменьшая общности можно считать, что $U_0 \subset U(\Lambda_{Sm})$.

Согласно [18], в $U(\Lambda_{NRW}) - \Lambda_{NRW}$ существует простая замкнутая кривая C произвольно малого диаметра, которая не стягивается в точку в множестве $U(\Lambda_{NRW}) - \Lambda_{NRW}$. Так как φ - гомеоморфизм, то существует C такая, что $\varphi^{-1}(C) \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times D^3$. Поскольку $\varphi(\Lambda_{Sm}) = \Lambda_{NRW}$, то $\varphi^{-1}(C) \in U(\Lambda_{Sm}) - \Lambda_{Sm}$. Следовательно, $\varphi^{-1}(C)$ деформируется в сечение $\{t_0\} \times D^3$ вдоль слоев тривиального расслоения $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times D^3 \to \{t_0\} \times D^3$ в некоторую замкнутую кривую, принадлежащую множеству $\{t_0\} \times (D^3 - \mathfrak{K})$. Эта кривая гомотопна нулю в множестве $D^3 - \mathfrak{K}$. Следовательно, $\varphi^{-1}(C)$ гомотопна нулю в $U(\Lambda_{Sm}) - \Lambda_{Sm}$. Тогда C должна быть гомотопна нулю в $U(\Lambda_{NRW}) - -\Lambda_{NRW}$. Полученное противоречие показывает, что диффеоморфизмы $f_{Sm}|_{\Lambda_{Sm}}$, $f_{NRW}|_{\Lambda_{NRW}}$ окрестностно не сопряжены.

Доказательство закончено.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят гранты 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м РФФИ и грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 за частичную финансовую поддержку.

Список литературы

1. Аносов Д. В., “Исходные понятия”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы - 1 (под ред. Д. В. Аносова)*, 1985, 156–178.

2. Аносов Д.В., Солодов В.В., “Гиперболические множества”, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы - 9 (под ред. Д. В. Аносова)*, **66** (1991), 12–99.

3. Гринес В.З., “О топологической эквивалентности одномерных базисных множеств диффеоморфизмов на двумерных многообразиях”, *УМН*, **180**:6 (1974), 163–164.

4. Гринес В.З., “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах. 1”, *Труды ММО*, **32** (1975), 35–60.

5. Гринес В.З., “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах.2”, *Труды ММО*, **34** (1977), 243–252.

6. Гринес В.З., “О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами”, *Матем. сб.*, **188**:4 (1997), 57–94.

7. Гринес В.З., “Представление одномерных аттракторов A-диффеоморфизмов поверхностей гиперболическими гомеоморфизмами”, *Матем. заметки*, **62**:1 (1997), 76–87.

8. Гринес В. З., Жужома Е. В., “О топологической классификации ориентируемых аттракторов на n-мерном торе”, *Успехи мат. наук*, **34**:4 (1979), 185–186.

9. Гринес В. З., Жужома Е. В., “О грубых диффеоморфизмах с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один”, *Доклады РАН*, **374** (2000), 274–276.

10. Жиров А. Ю., “Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 1. Кодирование, классификация и накрытия”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 3–50.

11. Жиров А. Ю., “Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 2. Перечисление и применение к псевдоаносовским диффеоморфизмам”, *Матем. сб.*, **185**:9 (1994), 29–80.

12. Жиров А. Ю. Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 3. Алгоритм классификации, *Матем. сб.*, **186**:9 (1995), 59–82.

13. Жиров А. Ю., Устинов Ю. И., "Топологическая энтропия одномерных соленоидов Вильямса", *Матем. заметки*, **14**:6 (1973), 859–873.

14. Куратовский Л., *Топология. Т. 1*, Мир, М, 1966.

15. Плыкин Р. В., "О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла", *Матем. сб.*, **84** (1971), 301–312.

16. Плыкин Р. В., "О гиперболических аттракторах диффеоморфизмов", *УМН*, **35**:3 (1980), 94–104.

17. Плыкин Р. В., "О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов", *УМН*, **39**:6 (1984), 75–113.

18. Antoine L., "Sur l'homéomorphisme de deux figures et leurs voisinages", *J. Math. Pure et Appl.*, **4** (1921), 221–325.

19. Bothe H., "The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds", *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.

20. Newhouse S., "On simple arcs between structurally stable flows", *Lect. Notes in Math.*, **468** (1975), 262-277.

21. Robinson C., Williams R., "Classification of expanding attractors: an example", *Topology*, **15** (1976), 321–323.

22. Smale S., "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747–817 [Руский перевод: Успехи мат. наук. – 1970. Т. 25. – С. 113–185].

23. Williams R., "One-dimensional non-wandering sets", *Topology*, **6** (1967), 473–487.

24. Williams R., "Classification of subshifts of finite type", *Annals of Math.*, **9** (1973), 120–153.

25. Williams R., "Expanding attractors", *Publ. Math. I.H.E.S.*, **43** (1974), 169–203.

On the inner and the neighbor classification of the attractors

© E.V. Zhuzhoma[5], N.V. Isaenkova [6], L.A. Kuprina[7], V.S. Medvedev[8]

Abstract. The connection between the inner and the Neighbor topological conjugacy for the attractors of a certain class of dynamical systems

Key Words: Inner conjugation, conjugation of a neighborhood, topological equivalence

[5] Professor of Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[6] Senior assistant Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[7] Assistant professor of Higher Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.

[8] Senior Staff Scientist, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru.