

УДК 517.958:536.242

Трехчастичные термодинамические взаимодействия

© А.О. Сыромьясов¹

Аннотация. Рассматриваются три сферические частицы произвольных радиусов и теплопроводностей, помещенные в безграничную среду. Вдали от частиц задан постоянный градиент температуры. Исследуется температурное поле вне и внутри частиц. Указаны его общие свойства, рассмотрены частные случаи и предельные переходы к двухчастичной задаче.

Ключевые слова: уравнение теплопроводности, сферическая частица, межчастичное взаимодействие, симметрия решения.

1. Постановка задачи о конечном числе частиц

Будем рассматривать среду (например, жидкость) с теплопроводностью κ_f , в которую помещены N_0 сферических частиц $\Omega(N)$. Их радиусы и теплопроводности равны a_N и κ_N , индекс N нумерует частицы. Введем прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ и будем задавать положение произвольной точки пространства вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Радиус-векторы центров сфер относительно точки O равны \vec{r}_N .

Обозначим через $T_f(\vec{x})$ и $T_p(N, \vec{y})$ температуры в непрерывной среде и внутри N -й частицы; здесь и далее $\vec{y} = \vec{x} - \vec{r}_N$. Пусть в среде и частицах нет источников тепла, а вдали от частиц задано стационарное поле температуры $T_\infty(\vec{x})$. Тогда T_f и T_p не зависят от времени, а значит, все упомянутые функции удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\Delta T_\infty(\vec{x}) = 0, \quad \Delta T_f(\vec{x}) = 0, \quad \Delta T_p(N, \vec{y}) = 0 \quad (1.1)$$

Свойства распределения температуры таковы. Вдали от взвешенных сфер возмущения, вызванные ими, затухают, а внутри сфер $T_p(N)$ не имеет особенностей:

$$T_f(\vec{x}) \rightarrow T_\infty(\vec{x}), \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad (1.2)$$

$$|T_p(N, \vec{y})| < \infty, \quad \vec{y} \in \Omega(N) \quad (1.3)$$

На границах раздела “жидкость-частица” температура и тепловой поток непрерывны:

$$T_p = T_f, \quad \kappa_N \frac{\partial T_p(N)}{\partial n} = \kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n}, \quad \vec{y} \in \partial\Omega(N) \quad (1.4)$$

Здесь \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности сферы $\partial\Omega(N)$.

Итак, требуется найти функции T_f и T_p , удовлетворяющие соотношениям (1.1)–(1.4).

2. Общее решение задачи о термодинамическом взаимодействии

Будем искать неизвестные функции в следующем виде:

$$\begin{aligned} T_f(\vec{x}) &= T_\infty(\vec{x}) + \sum_{N=1}^{N_0} \left[H_j^{\text{ext}}(N) L_j(\vec{x} - \vec{r}_N) + F_{jk}^{\text{ext}}(N) L_{jk}(\vec{x} - \vec{r}_N) + \right. \\ &\quad \left. + G_{jkl}^{\text{ext}}(N) L_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}_N) + D_{jklm}^{\text{ext}}(N) L_{jklm}(\vec{x} - \vec{r}_N) + \dots \right], \\ T_p(N, \vec{y}) &= T_\infty(\vec{r}_N) + A_0^{\text{int}}(N) + H_j^{\text{int}}(N) L_j(\vec{y}) |\vec{y}|^3 + F_{jk}^{\text{int}} L_{jk}(\vec{y}) |\vec{y}|^5 + \\ &\quad + G_{jkl}^{\text{int}}(N) L_{jkl}(\vec{y}) |\vec{y}|^7 + D_{jklm}^{\text{int}}(N) L_{jklm}(\vec{y}) |\vec{y}|^9 + \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

¹ Доцент кафедры математики и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; syall@yandex.ru.

Гармонические мультиполи $L_{j\dots k}$ задаются формулами:

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}, L_{j\dots k}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdots \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right)$$

Очевидно, $L_{j\dots k}(\vec{x}) \rightarrow 0$ при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$; функция $L_{j_1\dots j_n}(\vec{y})|\vec{y}|^{2n+1}$ регулярна при $\vec{y} = \vec{0}$.

В зависимости от точности, с которой требуется решить задачу, в разложение (2.1) могут входить мультиполи сколь угодно высокого порядка.

Коэффициенты A_0, H_j, F_{jk}, \dots не зависят от \vec{x} и \vec{y} , по повторяющимся индексам производится суммирование в пределах от 1 до 3. Обозначения “ext” или “int” указывают, что коэффициент относится к представлению температуры вне или внутри частицы.

Таким образом, функции (2.1) удовлетворяют условиям (1.1)–(1.3). Остается подобрать величины A_0, H_j, F_{jk}, \dots , чтобы на поверхности всех частиц выполнялись граничные условия (1.4). Эти коэффициенты являются компонентами некоторых тензоров $\vec{H}, \vec{F}, \vec{G}$ и т.д. С учетом своей симметрии, указанные тензоры (вне зависимости от того, описывают они поле T_f или T_p) имеют такой общий вид:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= H_1 \vec{e}_1 + H_2 \vec{e}_2 + H_3 \vec{e}_3, \\ \vec{F} &= F_{11} \vec{e}_1^2 + F_{22} \vec{e}_2^2 + F_{12} (\vec{e}_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \vec{e}_1) + F_{13} (\vec{e}_1 \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \vec{e}_1) + F_{23} (\vec{e}_2 \vec{e}_3 + \vec{e}_3 \vec{e}_2), \\ \vec{G} &= G_{111} \vec{e}_1^3 + G_{222} \vec{e}_2^3 + G_{112} (\vec{e}_1^2 \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \vec{e}_1^2) + G_{113} (\vec{e}_1^2 \vec{e}_3 + \vec{e}_1 \vec{e}_3 \vec{e}_1 + \\ &\quad + \vec{e}_3 \vec{e}_1^2) + G_{221} (\vec{e}_2^2 \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_1 \vec{e}_2^2) + G_{223} (\vec{e}_2^2 \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \vec{e}_3 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \vec{e}_2^2) + \\ &\quad + G_{123} (\vec{e}_1 \vec{e}_2 \vec{e}_3 + \vec{e}_1 \vec{e}_3 \vec{e}_2 + \vec{e}_2 \vec{e}_1 \vec{e}_3 + \vec{e}_2 \vec{e}_3 \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \vec{e}_1 \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \vec{e}_2 \vec{e}_1) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь и далее \vec{e}_i – единичный вектор, сонаправленный с осью Ox_i . Симметрия \vec{F}, \vec{G} и т.д. объясняется тем, что свертка симметричного по своим индексам мультиполя $L_{j\dots k}$ с любым антисимметричным тензором была бы равна нулю.

В выражения (2.2) не включены произведения вектора \vec{e}_3 на себя. Это связано с тем, что в силу гармоничности мультиполей свертка их с символом Кронекера $\vec{\delta} = \vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^2 + \vec{e}_3^2$ равна нулю: $\delta_{jk} L_{jkl_1\dots l_m} = 0$. Поэтому произведение любого мультиполя $L_{jkl_1\dots l_m}$ на \vec{e}_3^2 может быть выражено через его свертки с \vec{e}_1^2 и \vec{e}_2^2 . Такое соображение сокращает число неизвестных компонент тензоров и упрощает решение задачи.

Отметим, что $A_0^{\text{int}}(N)$ представляет собой средний нагрев N -й частицы относительно среды “без частиц”. Действительно, осредним выражение $T_p(N, \vec{y}) - T_\infty(\vec{r}_N)$ по поверхности $\partial\Omega(N)$. Используя свойство ортогональности сферических гармоник [1], получим, что

$$\oint_S L_{j_1\dots j_n}(\vec{x}) dS = 0$$

для любой сферы S с центром в точке O , от которой откладывается вектор \vec{x} . Поскольку на поверхности N -й частицы $|\vec{y}| = a_N = \text{const}$, то, используя представление (2.1), найдем

$$\langle T_p(N, \vec{y}) - T_\infty(\vec{r}_N) \rangle_{\partial\Omega(N)} = \frac{1}{4\pi a_N^2} \oint_{\partial\Omega(N)} [T_p(N, \vec{y}) - T_\infty(\vec{r}_N)] dS = A_0^{\text{int}}(N)$$

Аналогично можно осреднить выражение $T_p(N, \vec{y}) - T_\infty(\vec{r}_N)$ и по объему $\Omega(N)$:

$$\langle T_p(N, \vec{y}) - T_\infty(\vec{r}_N) \rangle_{\Omega(N)} = \frac{1}{4\pi a_N^3/3} \int_{\Omega(N)} [T_p(N, \vec{y}) - T_\infty(\vec{r}_N)] dV = A_0^{\text{int}}(N),$$

т.е. и при осреднении по объему N -я частица нагревается относительно жидкости, не содержащей включений, на величину $A_0^{\text{int}}(N)$.

Далее ограничимся изучением трех сферических частиц. Помимо этого, будем считать, что градиент температуры на бесконечности $\vec{T} = (T_1, T_2, T_3)$ постоянен:

$$T_\infty(\vec{x}) = T_j x_j + T_0 \quad (2.3)$$

Таким образом, T_0 есть температура в начале координат.

3. Решение задачи об одиночной частице и электростатические аналогии

В случае, когда в неограниченной среде находится одиночная частица с теплопроводностью κ_1 и радиусом a_1 , а внешнее поле задается формулой (2.3), задача решена в [2]:

$$\begin{aligned} T_f(\vec{x}) &= T_0 + T_j x_j + \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{\kappa_1 + 2\kappa_f} a_1^3 T_j L_j(\vec{x}), \\ T_p(1, \vec{y}) &= T_0 + \frac{3\kappa_f}{\kappa_1 + 2\kappa_f} T_j y_j \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь предполагается, что начало координат совпадает с центром сферы. Тем самым,

$$H_j^{\text{ext}}(1) = \frac{\kappa_1 - \kappa_f}{\kappa_1 + 2\kappa_f} a_1^3 T_j, \quad H_j^{\text{int}}(1) = -\frac{3\kappa_f}{\kappa_1 + 2\kappa_f} T_j, \quad (3.2)$$

остальные коэффициенты равны нулю. Поскольку $A_0^{\text{int}}(1) = 0$, то одиночная частица, взвешенная в жидкости с заданным на бесконечности постоянным градиентом температуры, не нагревается и не охлаждается относительно окружающей среды.

Проанализируем предельные случаи (3.1). При $\kappa_1 = \kappa_f$ эти равенства принимают вид $T_p = T_f = T_\infty$. Таким образом, когда частица с точки зрения термодинамики неотличима от окружающей ее среды, она не вносит возмущений в поле температуры. При $a_1 \rightarrow 0$ возмущение вне сферы стремится к нулю – из-за своих малых размеров она не влияет на распределение температуры. Поле внутри сферы определяется прежним выражением.

В [3] изучен диэлектрический эллипсоид, помещенный в однородное электрическое поле. С математической точки зрения эта задача аналогична задаче о распределении температуры в среде с одиночным эллипсоидальным включением и заданным на бесконечности градиентом температуры. Действительно, роль температуры играет потенциал поля, вместо теплопроводностей рассматриваются диэлектрические проницаемости частицы и среды. На удалении от частицы задается напряженность поля (градиент потенциала), нормальная компонента электрической индукции на поверхности частицы непрерывна.

В [3] получено, что поле внутри эллипсоида однородно и не зависит от его размеров. Обращаясь к равенству (3.1), легко видеть, что решение термодинамической задачи обладает аналогичными свойствами: внутри сферы градиент температуры постоянен и не зависит от радиуса a_1 .

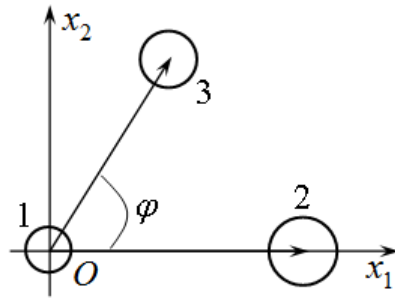
4. Решение задачи о трех частицах и его общие свойства

Выше было сказано, что тензорные коэффициенты, входящие в равенство (2.1), должны быть найдены из граничных условий (1.4). Поскольку эти условия линейны относительно температуры, то зависимость коэффициентов от \vec{T} также должна быть линейной.

Обозначим через $\vec{r}_{ij} = \vec{r}_j - \vec{r}_i$ вектор, началом которого является центр i -й частицы, а концом – центр j -й частицы. Поскольку инородные частицы, помещенные в среду, не перекрываются, то для любых i и j должно выполняться условие

$$|\vec{r}_{ij}| \leq a_i + a_j \quad (4.1)$$

Для удобства выберем систему координат так, что центры всех трех частиц лежат в плоскости Ox_1x_2 , а центр первой частицы находится в точке O . Далее, будем считать, что вектор \vec{r}_{12} сонаправлен с осью Ox_1 , а вектор \vec{r}_{13} образует с ней угол φ (рис. 4.1).



Р и с у н о к 4.1

Вместо $|\vec{r}_{12}|$ будем писать r и обозначим отношение $|\vec{r}_{13}|/|\vec{r}_{12}|$ через ρ_{23} . Тогда

$$\vec{r}_{12} = r\vec{e}_1, \quad \vec{r}_{13} = \rho_{23}r(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2), \quad \vec{r}_{23} = r[(\rho_{23}\cos\varphi - 1)\vec{e}_1 + \rho_{23}\sin\varphi\vec{e}_2]$$

Величины $A_0^{\text{int}}(N)$, $H_j^{\text{ext}}(N)$, $H_j^{\text{int}}(N)$, $F_{jk}^{\text{ext}}(N)$, ... будем искать в виде разложения по параметру $\varepsilon = a_1/r$. Из требования (4.1) следует, что этот параметр меньше 1.

Поставленная задача была решена с точностью до ε^5 . Полученные выражения для искомых величин оказались весьма громоздкими и далее не приводятся. Однако ниже будут указаны наиболее существенные свойства решения задачи.

Оказалось, что для достижения заданной точности достаточно в (2.1) учитывать тензоры не выше третьего ранга, причем они имеют следующие порядки малости:

$$\vec{H}^{\text{ext, int}}(N) \propto \varepsilon^0, \quad A_0^{\text{int}}(N) \propto \varepsilon^2, \quad \vec{F}^{\text{ext, int}}(N) \propto \varepsilon^4, \quad \vec{G}^{\text{ext, int}}(N) \propto \varepsilon^5$$

Кроме того, тензоры $\vec{H}(N)$ содержат слагаемые порядка ε^3 , а скаляры $A_0^{\text{int}}(N) - \varepsilon^5$.

При $\varepsilon \rightarrow 0$ величины $\vec{H}^{\text{ext}}(N)$ и $\vec{H}^{\text{int}}(N)$ принимают вид (3.2) с заменой a_1 и κ_1 на a_N и κ_N ; остальные коэффициенты обращаются в нуль. Это означает, что при увеличении относительного удаления частиц друг от друга происходит предельный переход к решению задачи об одиночной сфере. При $\varepsilon \neq 0$ вид коэффициентов \vec{H} не совпадает с (3.2), а другие тензоры, входящие в (2.1), отличны от нуля. Значит, сумма возмущений, вносимых в распределение температуры отдельными частицами, не равна возмущению, вносимому их совокупностью. Этот факт и говорит о термодинамическом взаимодействии частиц.

Отметим, что найденные тензорные коэффициенты имеют такой же порядок малости, как и в задаче о двухчастичном взаимодействии, решенной в [4]. Это можно объяснить, изучая симметрию задачи и привлекая теорию нелинейных тензорных функций [5].

Если инородная частица в среде единственна, то прямая, проходящая через ее центр в направлении градиента температуры, является поворотной осью бесконечного порядка; любая плоскость, проходящая через эту ось, будет зеркальной. Эти элементы симметрии определяют точечную группу $\infty \cdot m$, базисом которой могут быть выбраны \vec{T} и $\vec{\delta}$. Символ Кронекера при свертке с мультиполями дает нуль и далее не учитывается, поэтому с помощью данного базиса можно построить лишь вектор $\vec{H} = C\vec{T}$, линейный по \vec{T} . Константа C определяется из граничных условий; так, для \vec{H}^{int} она равна $-3\kappa_f/(\kappa_1 + 2\kappa_f)$.

Добавление второй частицы резко снижает симметрию. В общем случае мы получим точечную группу 1 с базисом $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, а с его помощью можно построить тензоры произвольного ранга. Поэтому уже при $N_0 = 2$ в разложение (2.1) входят мультиполи сколь угодно высокого порядка. Добавление третьей (четвертой и т.д.) частицы уже не сможет существенно «ухудшить» ситуацию: выражения для компонент тензоров, найденные из граничных условий, станут сложнее, но будут иметь тот же порядок.

Если градиент температуры перпендикулярен плоскости, в которой лежат центры частиц, то частицы не нагреваются относительно окружающей среды. Действительно, геометрия задачи определяется векторами \vec{T} и \vec{r}_{ij} . С учетом линейности по \vec{T} это означает, что каждый из скаляров $A_0^{\text{int}}(N)$ имеет структуру

$$A_0^{\text{int}}(N) = A_{12}(N)\vec{T} \cdot \vec{r}_{12} + A_{13}(N)\vec{T} \cdot \vec{r}_{13} + A_{23}(N)\vec{T} \cdot \vec{r}_{23}$$

Если \vec{T} ортогонален векторам \vec{r}_{ij} , то $A_0^{\text{int}}(N) = 0$. Отсюда и вытекает отсутствие нагрева взвешенных в жидкости частиц. Этот факт, установленный с помощью теории нелинейных тензорных функций, подтверждается и полученным в ходе решения задачи асимптотическим разложением тензорных коэффициентов. Поле температуры, образующееся в среде с двумя инородными включениями, обладает аналогичным свойством: если градиент температуры перпендикулярен линии, соединяющей центры частиц, то их средний нагрев относительно среды равен нулю [4].

Наконец, из решения следует, что тензоры, относящиеся к представлению температуры внутри N -й сферы, не зависят от ее радиуса, а только лишь от радиусов других сфер. Так, $\vec{H}^{\text{int}}(1)$, $\vec{F}^{\text{int}}(1)$ и $\vec{G}^{\text{int}}(1)$ зависят от a_2 и a_3 , но не от a_1 . Исключение составляют лишь $A_0^{\text{int}}(N)$, зависящие от a_N . Следовательно, как и в случае одиночной частицы, размеры *самой* частицы на градиент температуры внутри нее не влияют; правда, теперь этот градиент уже не будет постоянным.

5. Предельные переходы к двухчастичной задаче

Если из рассматриваемой конфигурации тем или иным способом «удалить» сферу $\Omega(3)$, то найденные выражения должны переходить в решение задачи о двух частицах. Можно указать три способа такого «удаления»:

1. Отодвинуть $\Omega(3)$ на большое расстояние от первых двух частиц, т.е. предположить, что $\rho_{23} \rightarrow \infty$ при произвольных a_3 и κ_3 .
2. Сделать $\Omega(3)$ неотличимой от окружающей среды, т.е. принять $\kappa_3 = \kappa_f$, не выдвигая никаких предположений относительно a_3 и ρ_{23} .
3. Стянуть $\Omega(3)$ в точку, т.е. принять, что $a_3 \rightarrow 0$ при произвольных ρ_{23} и κ_3 .

В любом из этих случаев полученные асимптотические разложения $T_p(1)$, $T_p(2)$ и T_f (вблизи первой и второй частиц) совпадают с выражениями, полученными для двух сфер в [4]. Однако распределения $T_p(3)$ и T_f вблизи $\Omega(3)$ ведут себя по-разному в зависимости от того, какой способ «удаления» третьей сферы выбрать.

В случае 1 тензоры $\vec{H}(3)$ принимают вид (3.1) с заменой a_1, κ_1 на a_3, κ_3 , соответственно; остальные коэффициенты, относящиеся к третьей частице, зануляются. Следовательно, в окрестности $\Omega(3)$ температура распределена так, как возле одиночной частицы. Это значит, что если третью частицу удалить на большое расстояние от первых двух, то взаимовлияния $\Omega(3)$ и пары $\Omega(1), \Omega(2)$ вообще нет.

В случае 2 получается, что $\vec{H}^{\text{ext}}(3) = \vec{0}$, $\vec{F}^{\text{ext}}(3) = \vec{0}$, $\vec{G}^{\text{ext}}(3) = \vec{0}$. Коэффициенты $A_0^{\text{int}}(3), \dots, \vec{G}^{\text{int}}(3)$ имеют такой вид, что разложения по степеням \vec{y} функций $T_p(3, \vec{y})$ и

$$T_\infty(\vec{x}) + \sum_{N=1}^2 \left[H_j^{\text{ext}}(N) L_j(\vec{x} - \vec{r}_N) + F_{jk}^{\text{ext}}(N) L_{jk}(\vec{x} - \vec{r}_N) + G_{jkl}^{\text{ext}}(N) L_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}_N) + \dots \right]$$

при $\vec{x} = \vec{r}_3 + \vec{y}$ совпадают. Это понятно: если включение по своим термодинамическим свойствам не отличается от внешней неподвижной среды, то оно не вносит возмущение в распределение температуры, зато возмущения от первых двух частиц проникают внутрь этого включения, не искажаясь.

В случае 3 коэффициенты $\vec{H}^{\text{ext}}(3)$, $\vec{F}^{\text{ext}}(3)$ и $\vec{G}^{\text{ext}}(3)$ также обращаются в нуль, т.е. бесконечно малая частица не влияет на распределение температуры в окружающей среде. Тензоры $\vec{H}^{\text{int}}(3)$, $\vec{F}^{\text{int}}(3)$ и $\vec{G}^{\text{int}}(3)$ в пределе при $a_3 \rightarrow 0$ не меняются, ибо, как было отмечено выше, градиент температуры внутри частицы от ее размеров не зависит. Скаляр $A_0^{\text{int}}(3)$ принимает вид

$$\sum_{N=1}^2 \left[H_j^{\text{ext}}(N) L_j(\vec{r}_3 - \vec{r}_N) + F_{jk}^{\text{ext}}(N) L_{jk}(\vec{r}_3 - \vec{r}_N) + G_{jkl}^{\text{ext}}(N) L_{jkl}(\vec{r}_3 - \vec{r}_N) + \dots \right],$$

причем фигурирующие в этом разложении тензорные коэффициенты должны быть найдены из решения двухчастичной задачи. Тем самым, нагрев бесконечно малой сферы относительно окружающей среды определяется значениями возмущений, вызванных другими частицами, в центре этой сферы.

Все изложенные выводы справедливы при произвольном угле φ .

6. Частные конфигурации системы из трех частиц

Рассмотрим частные случаи, в которых изучаемая задача обладает высокой симметрией. Они получаются из общего решения специальным выбором радиусов частиц, относительных расстояний между ними, угла φ и координат \vec{T} .

6.1. Симметричная цепочка

Предполагается, что центры всех трех частиц лежат на одной прямой, причем расстояния между центрами соседних частиц одинаковы: $\varphi = 0$, $\rho_{23} = 2$. Кроме того, считается, что крайние частицы одинаковы: $a_3 = a_1$, $\kappa_3 = \kappa_1$; их свойства могут отличаться от свойств средней (второй) частицы.

При такой симметрии вне зависимости от того, какой угол с цепочкой составляет вектор \vec{T} , тензоры, фигурирующие в (2.1), подчиняются преобразованиям:

$$\vec{H}(3) = \vec{H}(1), \vec{F}(3) = -\vec{F}(1), \vec{G}(3) = \vec{G}(1)$$

Эти соотношения аналогичны тем, что были получены ранее для двух частиц, и справедливы независимо от того, относятся тензоры к разложению температуры вне или внутри инородных сфер.

Если \vec{T} перпендикулярен цепочке, то, как и следовало ожидать, все величины $A_0^{\text{int}}(N) = 0$. Если же внешний градиент температуры приложен параллельно линии центров трех частиц, то $A_0^{\text{int}}(3) = -A_0^{\text{int}}(1)$ и $A_0^{\text{int}}(2) = 0$. Тем самым, две крайние частицы образуют своеобразный “диполь” и нагреваются противоположно, а средняя частица вовсе не нагревается относительно окружающей жидкости.

6.2. Равнобедренный треугольник

Сферы $\Omega(1)$ и $\Omega(2)$ считаются одинаковыми: $a_2 = a_1$, $\kappa_2 = \kappa_1$; отрезок, соединяющий их центры, является основанием треугольника. Расстояние от центра $\Omega(3)$ до центров первых двух сфер одинаково, что приводит к соотношению $\rho_{23} = 1/(2 \cos \varphi)$. Кроме того, градиент температуры перпендикулярен основанию треугольника: $T_1 = 0$.

В силу симметрии данной конкретной конфигурации, первая и вторая сферы нагреваются одинаково: $A_0^{\text{int}}(1) = A_0^{\text{int}}(2)$. Можно утверждать, что сам этот нагрев обусловлен присутствием третьей частицы: если так или иначе “убрать” ее, то в полученной двухчастичной задаче \vec{T} окажется перпендикулярным линии центров.

Более того, при некоторых условиях в задаче о трех частицах выполнено соотношение

$$A_0^{\text{int}}(1) + A_0^{\text{int}}(2) + A_0^{\text{int}}(3) = 0 \quad (6.1)$$

С точностью до ε^5 эта сумма равна

$$8T_2 \cos^2 \varphi \sin \varphi \{r^{-2}(K_3 - K_1) + r^{-5}K_1[K_1 - 2K_3 \cos^2 \varphi(3 + 10 \cos \varphi + 6 \cos 3\varphi)]\},$$

где $K_N = a_N^3(\kappa_N - \kappa_f)/(\kappa_N + 2\kappa_f)$. Условие (6.1) выполняется, если $K_1 = K_3$ и $\varphi = \pi/3$.

Вне зависимости от координат \vec{T} и от угла φ остальные коэффициенты подчиняются следующим преобразованиям. У тензоров $\vec{H}(1)$ и $\vec{H}(2)$, $\vec{F}(1)$ и $\vec{F}(2)$, $\vec{G}(1)$ и $\vec{G}(2)$ равны компоненты, соответствующие четному числу векторов \vec{e}_1 . Например, $F_{11}^{\text{ext}}(1) = F_{11}^{\text{ext}}(2)$, $G_{223}^{\text{int}}(1) = G_{223}^{\text{int}}(2)$. Слагаемые с нечетным количеством \vec{e}_1 у этих тензоров противоположны, а у тензоров, относящихся к третьей частице, они равны нулю. Эти преобразования обусловлены симметрией задачи относительно плоскости, перпендикулярной Ox_1 . Как следствие, возмущения температуры должны быть четны по x_1 , если выбрать начало координат не в центре $\Omega(1)$, а в середине отрезка, соединяющего первую и вторую сферу.

6.3. Равносторонний треугольник

Все три частицы будем считать одинаковыми: $a_1 = a_2 = a_3$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3$. Предположим, что их центры лежат в вершинах равностороннего треугольника, т.е. $\varphi = \pi/3$, $\rho_{23} = 1$. Кроме того, будем считать, что внешний градиент температуры перпендикулярен плоскости Ox_1x_2 , в которой лежат эти вершины.

Из последнего условия сразу следует, что все $A_0^{\text{int}}(N) = 0$. Другие тензоры, входящие в разложение (2.1), удовлетворяют таким ограничениям. Все $\vec{H}^{\text{ext}}(N)$ равны между собой, то же относится и к $\vec{H}^{\text{int}}(N)$. У коэффициентов $\vec{H}(N)$ только компонента $H_3(N) \neq 0$.

Далее, у тензоров $\vec{F}^{\text{ext}}(N)$ не равны нулю лишь компоненты $F_{13}^{\text{ext}}(N)$ при $N = 1, 2$ и $F_{23}^{\text{ext}}(N)$ при $N = 1, 2, 3$. В добавление к соотношениям, справедливым для частиц в вершинах равнобедренного треугольника, для равностороннего треугольника получается

$$F_{23}(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}F_{13}, \quad F_{23}(3) = -\frac{2}{\sqrt{3}}F_{13}(1) \quad (6.2)$$

Аналогичным соотношениям удовлетворяют и $\vec{F}^{\text{int}}(N)$.

Таким же образом, компоненты $\vec{G}(N)$ удовлетворяют общим соотношениям, выведенным для равнобедренного треугольника. Кроме того, у тензоров $\vec{G}^{\text{ext}}(N)$ не равны нулю только компоненты $G_{113}(N)$ и $G_{223}(N)$ при $N = 1, 2, 3$ и $G_{123}(N)$ при $N = 1, 2$. Для них справедливы соотношения

$$G_{223}(1) = \frac{3}{5}G_{113}(1), \quad G_{123}(1) = \frac{\sqrt{3}}{5}G_{113}(1), \quad G_{113}(3) = \frac{2}{5}G_{113}(1), \quad G_{223}(3) = \frac{6}{5}G_{113}(1) \quad (6.3)$$

Компоненты $\vec{G}^{\text{int}}(N)$ удовлетворяют таким же ограничениям.

Казалось бы, в данном частном случае задача обладает симметрией $3 \cdot m$. Действительно, прямая, проходящая через центр треугольника параллельно Ox_3 , есть поворотная ось бесконечного порядка; проходящая через нее плоскость, параллельная Ox_2x_3 , будет зеркальной. Базис группы $3 \cdot m$ образуют тензоры \vec{e}_3 , $\vec{\delta}$ и $\vec{D}_{3h} = \vec{e}_1^3 - \vec{e}_1^2\vec{e}_2 - \vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_1 - \vec{e}_2\vec{e}_1^2$ [5]; символ Кронекера, как и ранее, не играет роли. Так как \vec{T} коллинеарен Ox_3 , то функции T_f и $T_p(N)$ нечетны по x_3 , а значит, \vec{e}_3 должен входить в разложения всех тензоров только в нечетных степенях. Тогда разложения $\vec{H}(N)$, $\vec{F}(N)$, $\vec{G}(N)$ по этому базису должны выглядеть так:

$$\vec{H}(N) = H_3(N)\vec{e}_3, \quad \vec{F}(N) = \vec{0}, \quad \vec{G}(N) = G_1(N)\vec{D}_{3h} + G_3(N)\vec{e}_3^3,$$

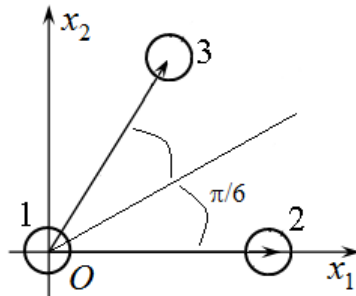
причем, как говорилось выше, можно считать $G_3(N) = 0$.

Однако искомые тензоры имеют другой вид. Например, из (2.2) и (6.2) следует, что

$$\vec{F}(1) = F_{13}(1) \left[(\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2) \right] \quad (6.4)$$

Чем можно объяснить такое расхождение?

Дело в том, что инвариантной относительно группы $3 \cdot m$ должна быть лишь T_f ; каждый из тензоров $\vec{H}(N)$, $\vec{F}(N)$, $\vec{G}(N)$ в отдельности может не подчиняться указанным преобразованиям. Ведь компоненты тензоров находятся из граничных условий на поверхностях $\partial\Omega(N)$, а там симметрия будет другой. Так, граничные условия на $\partial\Omega(1)$ инвариантны при зеркальной симметрии относительно плоскости $-x_1 + \sqrt{3}x_2 = 0$: ее проекция на Ox_1x_2 является биссектрисой угла между \vec{r}_{12} и \vec{r}_{13} (рис. 6.1).



Р и с у н о к 6.1

Это зеркальное отражение определяет преобразование базиса

$$\vec{e}_1 \mapsto \vec{e}'_1 = \frac{1}{2}\vec{e}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_2, \quad \vec{e}_2 \mapsto \vec{e}'_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2 \quad (6.5)$$

Легко убедиться, что тензор $\vec{F}(1)$, определенный равенством (6.4), не изменяется при заменах (6.5), т.е.

$$F_{13}(1) \left[(\vec{e}_1\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_1) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}_2\vec{e}_3 + \vec{e}_3\vec{e}_2) \right] = F_{13}(1) \left[(\vec{e}'_1\vec{e}'_3 + \vec{e}'_3\vec{e}'_1) + \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{e}'_2\vec{e}'_3 + \vec{e}'_3\vec{e}'_2) \right]$$

Аналогично можно показать, что соотношения (6.3) обеспечивают инвариантность $\vec{G}(1)$ относительно преобразований (6.5).

Убедимся теперь, что поле $T_f(\vec{x})$, в представлении которого тензоры удовлетворяют ограничениям (6.2) и (6.3), не меняется при преобразованиях, определяющих группу $3 \cdot m$.

Для этого перенесем начало координат в центр треугольника. Тогда зеркальная симметрия и поворот на $2\pi/3$ против часовой стрелки отвечают следующим заменам переменных:

$$\begin{aligned} x_1 &\mapsto -x_1; \\ x_2 &\mapsto -\frac{1}{2}x_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_2, \quad x_1 \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \end{aligned} \quad (6.6)$$

В новой системе координат радиус-векторы центров сфер таковы:

$$\vec{r}_1 = R\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2\right), \quad \vec{r}_2 = R\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2\right), \quad \vec{r}_3 = R\vec{e}_2,$$

где $R = r/\sqrt{3}$. Подставив эти \vec{r}_N в (2.1) и раскладывая полученное выражение по степеням \vec{x} , получим:

$$\begin{aligned} x_3 \left\{ \left[-\frac{3}{R^3} H_3^{\text{ext}}(1) + \frac{12\sqrt{3}}{R^4} F_{13}^{\text{ext}}(1) - \frac{594}{5R^5} G_{113}^{\text{ext}}(1) \right] + \left[\frac{9}{2R^5} H_3^{\text{ext}}(1) - \frac{30\sqrt{3}}{R^6} F_{13}^{\text{ext}}(1) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{459}{R^7} G_{113}^{\text{ext}}(1) \right] P_2(\vec{x}) + \left[\frac{105}{8R^6} H_3^{\text{ext}}(1) - \frac{105\sqrt{3}}{R^7} F_{13}^{\text{ext}}(1) + \frac{6993}{4R^8} G_{113}^{\text{ext}}(1) \right] P_3(\vec{x}) + \dots \right\}, \end{aligned}$$

где $P_2(\vec{x}) = |\vec{x}|^2 - 5(x_1^2 + x_2^2)/2$ и $P_3(\vec{x}) = 3x_1^2 x_2 - x_2^3$. Легко проверить, что эти многочлены инвариантны относительно замен (6.6), а значит, температура $T_f(\vec{x})$ инвариантна относительно группы $3 \cdot m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов Д. С., *Специальные функции*, 2-е, испр. и доп., Высш. шк., М., 1965, 424 с.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика*. Т. 6: *Гидродинамика*, 3-е, перераб., Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1986, 736 с.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Электродинамика сплошных сред*, Гос. изд-во физ.-мат. лит., М., 1959, 532 с.
4. Сыромясов А. О., "Термодинамическое взаимодействие сферических частиц в среде с постоянным градиентом температуры", *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*, 2011, № 4, ч. 3, 1158–1160.
5. Лохин В. В., Седов Л. И., "Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов", *Прикладная математика и механика*, **27:3** (1963), 393–417.

Three-particle thermodynamic interactions.

© A.O. Syromyasov²

Abstract. We consider three spherical particles with arbitrary radii and heat conductivities immersed in an infinite medium. The temperature gradient far from spheres is supposed to be constant. Temperature field inside and outside the particles is explored, and its general properties are listed. Passages to the limit of two-particle problem and some particular cases are considered, too.

Key Words: heat conduction equation, spherical particle, interparticle interaction, symmetry of solution.

² Reader of Mathematics and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University named after N. P. Ogaryov, Saransk; syall@yandex.ru.