УДК 519.71

Об устойчивости решений систем с переменной структурой в областях неоднозначности функции управления

© **В.И. Сафонкин**[1]

Аннотация. В данной статье изучается поведение системы с переменной структурой, при котором вектор состояния из областей однозначности в некоторый момент попадает в δ - окрестность многообразия разрыва правой части системы и определенное время остается в этой окрестности. Оказывается таким поведением при $\delta \to 0$ можно моделировать в реальных системах режимы, близкие к идеальному режиму скольжения, которого в действительности, как известно, не существует.

Ключевые слова: доопределение, единственность, включение, переменная структура, модель.

1. Введение

Описание поведения систем с переменной структурой приводит к необходимости построения и дальнейшему исследованию многозначных дифференциальных соотношений. Известно, такая задача возникает вследствие учета в реальных системах либо малых параметров, либо переключающих элементов релейного типа. В других случаях такие системы используются для обеспечения в физических устройствах оптимальных режимов в процессе их функционирования. В первом и втором случаях приходится иметь дело с системами дифференциальных уравнений, в которых функции правых частей претерпевают разрыв на одном или нескольких многообразий. Вопрос устойчивости движений в таких системах является основным. Как известно, обладая такими свойствами, в системах с переменной структурой можно синтезировать режимы, гарантирующие решение многих практических задач. На это указывается во многих источниках, в том числе [3], [2] и других. Основным средством при исследовании систем с переменной структурой является ее доопределение на множестве разрыва управляющей функции. В работе [4] указывается на важность выбора такого метода доопределения, которое обеспечивало бы устойчивое движении в некоторой окрестности упомянутых выше многообразий переключения данной системы в течение некоторого времени.

Существующие методы доопределения систем с переменной структурой на многообразиях разрыва, так или иначе, приводят к необходимости рассмотрения дифференциального включения вида

$$\frac{dx}{dt} \in F(t,x,u), \tag{1.1}$$

где $t \in [t_0,T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in U(t,x)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ – компакт.

Предположим, что правая часть системы (1.1) удовлетворяет условиям:

а) $F(t,x,u)$ - выпуклый компакт при всех $(t,x,u) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$;

б) многозначное отображение $(t,x,u) \mapsto F(t,x,u)$ непрерывно в точке p по совокупности аргументов в хаусдорфовой метрике, если $\alpha(F(p'),F(p)) \to 0$ при $p' \to p$, где $\alpha(A,B) = \max(\sup\rho(a,B), \sup\rho(b,A)), a \in A, b \in B$, A и B - множества;

[1] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск

в) множество $F(t,x,u)$ непустое, ограниченное и замкнутое для всех $(t,x,u) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Как известно [3] дифференциальные включения вида (1.1) получаются при доопределении систем

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u(t,x)), \tag{1.2}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $f(t,x,u)$ - непрерывная по совокупности аргументов функция, управляющая функция $u(t,x), u \in \Re^m$ претерпевает разрыв первого рода на некоторой поверхности S в пространстве переменных $(t,x) \in [t_0,T] \times \mathbb{R}^n$, задаваемой уравнением $s(t,x_1,...,x_n) = 0$ и представляет собой множество M меры нуль, состоящее из точек границ областей $s(x) > 0$ и $s(x) < 0$. Таким образом, функция $f(t,x,u(t,x))$ фактически является непрерывной вплоть до общей границы указанных областей.

Области s(t,x) > 0, s(t,x) < 0 будем называть областями однозначности. В них, соответственно, $u(t,x) = u^{(1)}(t,x)$ при $s(x) > 0$ и $u(t,x) = u^{(2)}(t,x)$ при $s(x) < 0$. Функции $u^{(1)}(t,x)$ и $u^{(2)}(t,x) \in C([t_0,+\infty)) \times \mathbb{R}^n$.

Наряду с соотношениями (1.1) и (1.2) будем рассматривать последовательность систем

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,u^k(t,x)), k = 1,2,..., u^k(t,x) \in U(t,x), \tag{1.3}$$

где функции $u^k(t,x)$ равномерно ограничены в областях их определения.

Обозначим через $x^k(t : t_0, x_0)$ последовательность решений системы (1.3), заведомо существующих и определенных на интервале $[t_0,T]$. Тогда частичный предел этой последовательности $x(t : t_0, x_0) = \lim x^k(t : t_0, x_0)$, $k = 1, 2, ...$ будем понимать в том смысле, что из последовательности $x^k(t : t_0, x_0)$ будет выбрана равномерно сходящаяся подпоследовательность. Как известно, такая подпоследовательность существует согласно теоремы [4].

Заметим также, что для каждой функции $u_i(t,x)$ можно выделить бесконечно много последовательностей $u_i^k(t,x)$, на которых строится множество последовательностей решений $\{x^\nu(t)\}, \nu = 1,2,...$, а соответственно и множество их пределов $\{x(t)\}$. Множество пределов равномерно сходящихся последовательностей обозначим $X(t)$.

Определение 1.1. *Решение системы* (1.2), *а, следовательно, и дифференциального включения* (1.1) *называется любая абсолютно непрерывная функция* $x(t) \in X(t)$. *Само множество* $X(t)$ *называется множеством решений включения* (1.1).

Прежде, чем сформулировать задачу, сделаем несколько замечаний. Во многих работах, например [4], [1], и в др. высказываются утверждения в том, что в системах с переменной структурой наиболее характерным режимом является режим скольжения по поверхности разрыва функции управления $u(t,x)$. В тоже время известно, что в природе такого идеального движения не существует. Это обусловлено тем, что в срабатывании реальных элементов присутствует запаздывание. В силу чего, вектор состояния, попав на поверхность разрыва, при определенных условиях либо покидает ее, либо может совершать колебательные движения в ее окрестности. Чаще всего последний случай представляет наибольший интерес для практики. Обеспечение такого режима требует попадание траекторий из областей однозначности s(t,x) > 0, s(t,x) < 0 в δ- окрестность многообразия $S(t)$ переключения функции $u(t,x)$ и сохранения движения для всех $t > t_p$, где t_p- момент падения изображающей точки на поверхность S^δ. В работе [6] такие условия показаны относительно дифференциального включения (1.1). В частности, при выполнении этих условий любое решение включения достигает границы окрестности многообразия $S(t)$ из областей однозначности.

В дальнейшем также будем предполагать, что решения дифференциального включения (1.1) непрерывны по начальным данным, т.е. для любых последовательностей $x_0^k \to x_0$, $t_0^k \to t_0$ и любых решений $x_k(t) = x(t : x_0^k, t_0^k)$, $x_k(t_0) = x_0^k$, $k = 1, 2, ...$ таких, что

$$\frac{dx_k(t)}{dt} = f(x_k(t), u_k(t)), t \in [t_0, T],$$

найдется такая последовательность k_j, $j = 1, 2, \ldots$, что $u_{k_j} \to u(t) \in U$, $x_{k_j}(t) \to x(t : t_0, x_0)$, где $x(t : t_0, x_0)$ удовлетворяет уравнению (1.2).
В дальнейшем также будем предполагать, что многозначное отображение $U(t, x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ полунепрерывно сверху относительно включения. Последнее означает, что при $x_k \to x$, $u_k \to u$, $t_k \to t$ и $u_k \in U(t_k, x_k)$, $k \to \infty$ справедливо включение $u \in U(t, x)$.

При выше сделанных предположениях и замечаниях сформулируем задачу.

2. Постановка задачи

Во введении было замечено, что в природе идеального режима «скольжения» фактически не существует в силу запаздывания в срабатывании управляющего органа системы при переходе движений из одной области однозначности в другую. В этом случае под режимом «скольжения» целесообразно понимать устойчивые движения системы, описываемые уравнением (1.2), в δ - окрестности многообразия относительно его точек. Обеспечение такого режима предполагает выполнение условий попадание траекторий из областей однозначности на оболочку множества S^δ и дальнейший их переход во внутрь δ - окрестности, где сохраняется их устойчивость относительно многообразия $S(t)$ при всех $t > t_p$, $t_p \in [t_0, T]$.

Такой режим, как будет показано ниже, позволяет оценить протекание процесса по времени. Фактически, обеспечение отмеченных выше условий и составляет предмет исследования решений дифференциального включения (1.1). Т.е. необходимо определить условия на правую часть включения, гарантирующие попадание траекторий из областей однозначности в окрестность многообразия разрыва управляющей функции $u(t, x)$ и их устойчивое движение в этой области для всех $t > t_p$.

Вторая сторона изучаемого вопроса состоит в оценке фактической скорости протекания «скользящего» процесса в зависимости от значения величины δ.

3. Решение задачи

Прежде приведем несколько определений.

Определение 3.1. *Множество* S^δ *будем называть инвариантным по отношению к системе* (1.2)*, а, следовательно, и дифференциального включения* (1.1)*, если оно состоит из траекторий этой системы, т.е.* $(t, x) \in S^\delta$.

При значениях $t > t_0$ множество S^δ называется положительным инвариантом. Как известно [1] замыкание $\overline{S^\delta}$ такого множества также является инвариантным множеством.

Определение 3.2. *Точка фазовогоg пространства называется* ω*- предельной точкой для точки* p*, если существует последовательность* $\{t_n\}$*,* $t_n \to \infty$ *при* $n \to \infty$*, такая, что* $g = \lim f(t_n, p)$.

Введем в рассмотрение функцию $V(t,x,s(t,x))$, характеризующую обобщенное расстояние вектора состояния $x(t:t_0,x_0)\in S^\delta\subset R^n$ до многообразия $S(t)$. В отношении введенной функции будем предполагать:
а) $V(t,x,0)=0$ лишь для $(t,x)\in S$, в других точках $(t,x)\in S^\delta$ функция $V(t,x,s)>0$;
б) на множестве $\|s\|>r$, $r\le\delta$ функция $V(t,x,s)$ имеет точную верхнюю и точную грань: $\inf V(t,x,s)=\alpha_r$, $\sup V(t,x,s)=\beta_r$, где α_r и β_r - положительные числа;
в) функция $\frac{dV}{dt}$ существует и имеет отрицательное значение в силу (1.1) или (1.2) в точках шара $\|s(r)\le r\|$ кроме точек, принадлежащих многообразию $S(t)$. На множестве $\|s\|=r$ функция $\frac{dV}{dt}<0$ и имеет точную верхнюю грань, т.е. $\sup\limits_{\|s\|=r}\dot V=m_r$, $m_r>0$.

Т е о р е м а 3.1. *Если функция $V(t,x,s)$ обладает выше указанными свойствами а) - б), а в δ- окрестности многообразия $S(t)$ система не содержит целых полутраекторий включения (1.1) и на оболочке $\overline{S^\delta}$ имеет место правая единственность, то окрестность S^δ содержит траектории системы, устойчивые относительно многообразия $S(t)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, при выполнении условия правой единственности [6] любое решение, попавшее на границу δ - окрестности, продолжимо в нее единственным образом. Выберем в δ - окрестности множества $S(t)$ точки x_p и x_q. Будем предполагать, что точка x_q является ω- предельной для точки x_p, т.е. имеет место $\lim\limits_{n\to\infty}x(t_n,x_p)=x_q$. Определим на поверхности многообразия $s(x)=0$ точку x^*, в которой $V(t,x^*,0)=0$ и рассмотрим замкнутый шар $B(x^*,r)\subset R^n$ с центром в точке x^* радиуса r. Поместим точки x_p и x_q в данный шар, в котором, как известно, функция $V(t,x,s)$ существует и наделенна свойствами а), б) и в). Тогда согласно леммы 5.1 [7] все траектории не будут выходить из данного шара. Кроме того, все $\omega-$ предельные точки для точек шара находятся либо внутри его, либо на его поверхности.

Следуя схеме доказательства теоремы Барбашина-Красовского [7] покажем устойчивость состояния $x^*\in S(t)$. Исключим из рассмотрения ту часть поверхности S, которая принадлежит шару $B(x^*,r)\subset R^n$. Как известно, на этой части поверхности функция $u(t,x)$ не определена. Для других точек шара точка x^* является либо $\omega-$ предельной, либо имеет место $\rho(\lim\limits_{n\to\infty}x(t_n,x_p),x^*)\le r$. Покажем справедливость сделанного заключения. Пусть на внешней оболочки шара $B(x^*,r)\subset R^n$ наименьшее значение функции V равно l. Рассмотрим шар $B(x^*,\lambda)\subset R^n$ и поместим его в шар $B(x^*,r)\subset R^n$ $(\lambda<r)$, в точках которого $V(t:t_0,x_0,s(t_0))<l$, $(t_0,x_0)\in B(x^*,\lambda)$. Если допустить, что траектория $x(t:t_0,x_0)$ в некоторый момент времени пересечет оболочку шара радиуса r в некоторой точке q, то в силу свойства $\dot V\le 0$ функция не должна возрастать вдоль любого решения, проходящего в шаре. Тогда должно выполняться соотношение $V(q)\le V(p)<l$. С другой стороны, по условию $V(t,x,s)$ на внешней оболочке шара $B(x^*,r)\subset R^n$ принимает наименьшее значение, равное l. Тогда должно выполняться неравенство $V(q)\ge l$. Полученное противоречие и доказывает справедливость выше сделанного утверждения.

З а м е ч а н и е 3.1. *Обращает внимание функция $V(t,x,s)$, где независимой переменной является функция $s(t,x)$. Ее введение позволяет рассматривать устойчивость движения не для всего движения, а лишь на подпространство, координатами которого являются многообразия разрыва вектора функции $u(t,x)$. Если функция $u(t,x)$ - скалярная функция, то таким подпространством является одно многообразие $S(t)$. Использование функции $V(t,x,s)$ демонстрируется ниже в примерах.*

Как выше было замечено вопрос об устойчивости движения в δ - окрестности многообразия в некотором смысле остается открытом в случае, когда движение проходит строго по многообразию $S(t)$. Такое предположение имеет смысл для идеальных характеристик элементов, осуществляющих управляемый режим в реальной системе. На практике же вектор состояния совершает колебания в цилиндре, образованного замыканием δ – окрестности.

Если, что движения могут проходить строго по многообразию $S(t)$, то становится очевидным, что на функцию управления $u(t,x)$ следует наложить дополнительные условия. Чаще всего (например, в работах [3],[5] и др.) значения $u(t,x)$ «зажимают» между ее предельными значениями, которые может принимать управление при неограниченном приближении вектора состояния из областей однозначности к многообразию $S(t)$.

Пример 3.1. *Рассмотрим систему, находящуюся под двухмерным управлением*

$$\frac{dx_1}{dt} = -b_1 Sign(s_1), s_1 = x_1 + x_2; \frac{dx_2}{dt} = 2b_2 Sign(s_2), s_2 = 2x_1 - 0,5x_2, \tag{3.1}$$

$$b_1 > 0, b_2 > 0, b_1 - Const, b_2 - Const. s^T(x) = (x_1, x_2).$$

Переходя в пространство $((s_1, s_2)$*, будем иметь*

$$\frac{ds_1}{dt} = -b_1 Sign(s_1) + 2b_2 Sign(s_2), \frac{ds_2}{dt} = -2b_1 Sign(s_1) - b_2 Sign(s_2). \tag{3.2}$$

Выберем функцию V *в виде* $V = |s_1| + |s_2|$*. Тогда в силу системы* $\dot{V} = Sign(s_1)(-b_1 Sign(s_1) + 2b_2 Sign(s_2) + Sign(s_2)(-2b_1 Sign(s_1) + b_2 Sign(s_2) = -(b_1 + b_2) < 0$*. Таким образом, при заданных значениях* b_1 *и* b_2 *функция* $\dot{V}$ *в областях однозначности функций* $s_1(x)$ *и* $s_2(x)$ *принимает отрицательное значение.*

Рассмотрим поведение траекторий системы в областях однозначности и вблизи многообразий $S_1(t)$ *и* $S_2(t)$*. Прежде заметим, что в первой четверти плоскости* (s_1, s_2) $s_1 < 0, s_2 > 0$*, во второй четверти* $s_1 > 0, s_2 > 0$*, в третьей* $s_1 > 0, s_2 < 0$*, в четвертой* $s_1 > 0, s_2 > 0$*. Такие соотношения устанавливаются с учетом значений* $\dot{s}_1$ *и* $\dot{s}_2$ *в областях однозначности. Тогда при выполнении соотношения* $b_1 > 2b_2$ *траектории в области* $s_2 > 0$ *будут переходить через многообразие* $S_1(t)$ *из области* $s_1 > 0$ *в область* $s_1 < 0$*. Действительно, при указанном соотношение имеет место* $\lim\limits_{s \to +0} \dot{s}_1 = -b_1 - 2b_2 Sign(s_2) < 0$ *в области* $s_1 > 0$*, а в области* $s_1 < 0$ *имеет место неравенство* $\lim\limits_{s_1 \to -0} \dot{s}_1 = b_1 - 2b_2 Sign(s_2) < 0$*. Это означает, что выполнено условие «прошиваемости» многообразия траекториями движения. Таким же образом устанавливаются соотношения между значениями* b_1 *и* b_2*, обеспечивающие необходимые условия «прошивания» траекториями многообразия* $S_1(t)$ *при переходе из области* $s_1 > 0$ *в область* $s_1 < 0$*. Аналогичным образом показывается «прошиваемость» многообразия* $S_2(t)$ *при переходе траекторий из области* $s_2 > 0$ *в область* $s_2 < 0$*. Т.е. траектория, выпущенная из точки, находящейся на одном из многообразий* $S_1(t)$ *или* $S_2(t)$*, в силу выполнения утверждения теоремы возвращается на это многообразие в точке, расположенной более близкой к началу координат, чем предыдущая (см. рис. 1).*

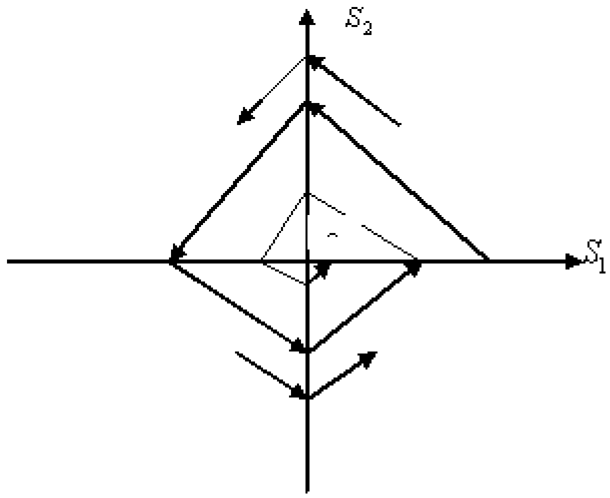


Рисунок **3.1**

Поведение траекторий системы (3.1) в окрестности пересечения многообразий переключения

Замечание. В этом примере было принято соглашение нормального переключения при переходе траекторий из одной области однозначности в другую. В другом случае должно быть выполнено соглашение, указанное в замечании к теореме 1.
Функция управления $u(t,x)$ типа «гистерезис»

Пусть: $u(t,x) = u^+(t,x)$ при $s(x) > \delta$; $u(t,x) = u^-(t,x)$ при $s(x) < \delta$, $\delta > 0$. В зоне нечувствительности $(-\delta, +\delta)$ $u(t,x)$ сохраняет то значение, которое она имела накануне предыдущего переключения. Фактически во время неоднократного перехода решения $x(t:t_0,x_0)$ из одной области однозначности в другую имеем дело с двумя многообразиями $S^+(t)$ и $S^-(t)$, на которых функция управления $u(t,x)$ претерпевает разрыв.

Определение 3.3. *Для уравнения* (1.2) *имеет место правая единственность в области* D, *если для* $\forall(t_0,x_0)$ *каждые два решения, удовлетворяющие условию* $x(t_0) = x_0$, *совпадают на отрезке* $t_0 \le t \le t_1$, $t_1 \le T$ *в предположении, что они оба существуют и проходят в этой области.*

В отношении уравнения (1.2) будем предполагать, что оно доопределено тем или иным способом (например, [3]) на многообразиях $S^+(t)$ и $S^-(t)$. В работе [6] указаны условия на правую часть дифференциального включения (1.1) и правые части уравнения (1.2), при которых для уравнения существует правая единственность его решения.

Введем в рассмотрение $R(t,x)-$ вектор разрыва на многообразиях $S^+(t)$ и $S^-(t)$ как разность предельных значений f^+ и f^- функции $f(t,x,u)$ при приближении вектора состояния $x^*(t)$ к точке $(t,x) \in S^+$ (либо $(t,x) \in S^-$) из областей однозначности. Сформулируем теорему.

Теорема 3.2. *Если в окрестности точки* $x_0 \in S^\delta$ *имеет место правая единственность, а вектор разрыва* $R(t_0,x_0) = f^+(t,x) - f^-(t,x)$ *лежит в области* S^- *от поверхности в область* $s^+(x) < 0$, *то через точку* x_0 *проходит единственное решение из области* $s^+(x) > 0$ *в область* $s^-(x) < 0$, *т.е. траектория через точку* x_0 *переходит из области однозначности в область, заключенную многообразиями* $S^+(t)$ *и* $S^-(t)$.

Доказательство. Пусть вектор $f_0(t_0,x_0) \in S^+$ определен как элемент множества $F(t_0,x_0,u(t_0,x_0))$, полученного при доопределении (1.2). Поскольку вектор $R(t_0,x_0)$

лежит в области $s^-(x) > 0$, то вектор фазовой скорости в точке (t_0, x_0) будет направлен в туже область. Существование правой единственности обеспечивает продолжимость решений через точку (t_0, x_0) из области $s^+(x) > 0$ в область $s^+(x) < 0$. Что и требовалось доказать.

Аналогичным образом показывается переход траекторий через многообразие S^- из области $s^-(x) < 0$ в область $s^-(x) > 0$. Здесь следует потребовать, чтобы проекции f_N^+ и f_N^- векторов $f^+(t, x, u)$ и $f^-(t, x, u)$ лежали в области положительных значений, т.е. $f_N^+ > 0$ и $f_N^- > 0$ одновременно, а вектор $R(t, x)$ полностью лежал в области однозначности.

Замечание 3.2. *В этом пункте сделана попытка смоделировать процесс, в котором вектор состояния не выходит за пределы некоторых окрестностей многообразий $S^+(t)$ и $S^-(t)$, на которых, как замечено выше, функция управления $u(t, x)$ претерпевает разрывы первого рода. Если такой режим обеспечен, то он является близким к идеальному режиму скольжения при $\delta \to 0$ и наилучшим образом отвечает реальному процессу в системах управления.*

Такой подход замены идеального «скольжения» по многообразию $S(t)$ движениями, близкими к нему. К тому же позволяет получить усредненную количественную характеристику перехода из одного состояние в другое регулируемое состояние, находящееся на этом многообразии переключения. Последнее замечание оказывается важным при решении практических задач.

Действительно, если предположить, что изображающая точка $x(t)$ совершает колебательное движение внутри области, заключенной многообразиями $S^+(t)$ и $S^-(t)$, а расстояние между ними по направлению нормали к ним равно 2δ, то за период колебания $T = \Delta t_1 + \Delta t_2$ изображающая точка вдоль многообразия $S(t)$ пройдет расстояние, равное значению выражения $f^-(t, x)\Delta t_1 + f^+(t, x)\Delta t_2$. Здесь Δt_1 - время прохождения изображающей точки в колебательном движении от поверхности $S^-(t)$ до поверхности $S^+(t)$, а Δt_2 - время прохождения от поверхности $S^+(t)$ до поверхности $S^+(t)$. Конечно, такую оценку расстояния, а, следовательно, и оценку время следует считать усредненными (см. рис.2).

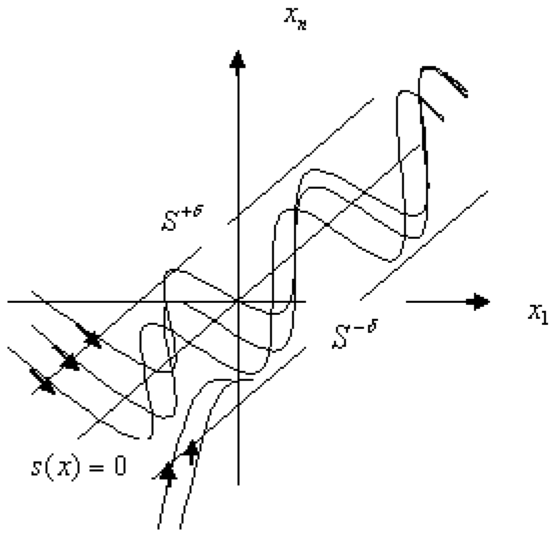


Рисунок **3.2**

Поведение траекторий в зоне «нечувствительности»

П р и м е р 3.2. *Рассмотрим систему, находящуюся под двухмерным управлением*

$$\frac{dx_1}{dt} = -b_1 Sign(s_1), s_1 = x_1 + x_2; \frac{dx_2}{dt} = 2b_2 Sign(s_2), s_2 = 2x_1 - 0,5x_2, ()$$

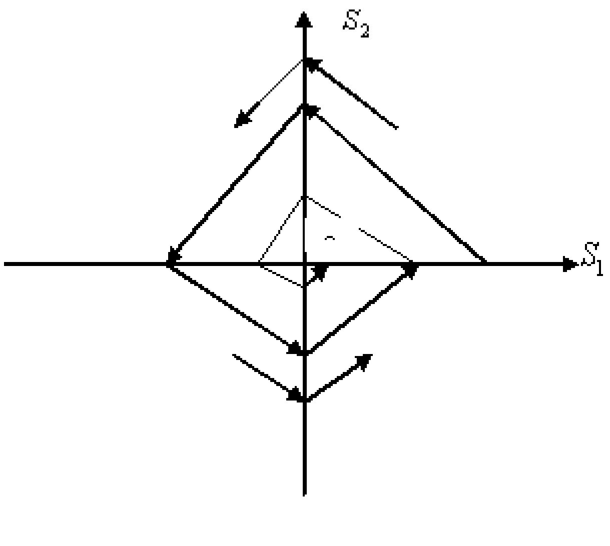
$b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $b_1 - Const, b_2 - Const$. *Переходя в пространство* $((s_1, s_2)$, *будем иметь*

$$\frac{ds_1}{dt} = -b_1 Sign(s_1) + 2b_2 Sign(s_2), \frac{ds_2}{dt} = -2b_1 Sign(s_1) - b_2 Sign(s_2).()$$

Выберем функцию V *в виде* $V = |s_1| + |s_2|$. *Тогда* $\dot{V} = Sign(s_1)(-b_1 Sign(s_1) + 2b_2 Sign(s_2) + Sign(s_2)(-2b_1 Sign(s_1) + b_2 Sign(s_2) = -(b_1 + b_2) < 0$. *Таким образом, при заданных значениях* b_1 *и* b_2 *функция* $\dot{V}$ *в областях однозначности функций* $s_1(x)$ *и* $s_2(x)$.

Рассмотрим поведение траекторий системы в областях однозначности и вблизи многообразий $S_1(t)$ *и* $S_2(t)$. *Прежде заметим, что в первой четверти плоскости* (s_1, s_2) $s_1 < 0, s_2 > 0$, *во второй четверти* $s_1 > 0, s_2 > 0$, *в третьей* $s_1 > 0, s_2 < 0$, *в четвертой* $s_1 > 0, s_2 > 0$. *Такие соотношения устанавливаются с учетом значений* s_1 *и* s_2 *в областях однозначности. Тогда при выполнении соотношения* $b_1 > 2b_2$ *траектории в области* $s_2 > 0$ *будут переходить через многообразие* $S_1(t)$ *из области* $s_1 > 0$ *в область* $s_1 < 0$. *Действительно, при указанном соотношение имеет место* $\lim\limits_{s \to +0} \dot{s}_1 = -b_1 - 2b_2 Sign(s_2) < 0$ *в области* $s_1 > 0$, *а в области* $s_1 < 0$ *имеет место неравенство* $\lim\limits_{s_1 \to -0} \dot{s}_1 = b_1 - 2b_2 Sign(s_2) < 0$. *Это означает, что выполнено условие «прошиваемости». Таким же образом устанавливаются соотношения между значениями* b_1 *и* b_2 , *обеспечивающие необходимые условия «прошивания» траекториями многообразия* $S_1(t)$ *при переходе из области* $s_1 > 0$ *в область* $s_1 < 0$. *Аналогичным образом показывается «прошиваемость» многообразия* $S_2(t)$ *при переходе траекторий из области* $s_2 > 0$ *в область* $s_2 < 0$. *Т.е. траектория, выпущенная из точки, находящейся на одном из многообразий* $S_1(t)$ *или* $S_2(t)$, *в силу* $\dot{V} < 0$ *возвращается на это многообразие в точке, расположенной более близко к началу координат, чем предыдущая.*

Замечание. В этом примере было принято соглашение нормального переключения при переходе траекторий из одной области однозначности в другую. В другом случае должно быть выполнено соглашение, указанное в замечании к теореме 3.1.



Р и с у н о к **3.3**

Поведение траекторий системы (3.1) в окрестности пересечения многообразий переключения

П р и м е р 3.3. [4] *Рассмотрим систему*

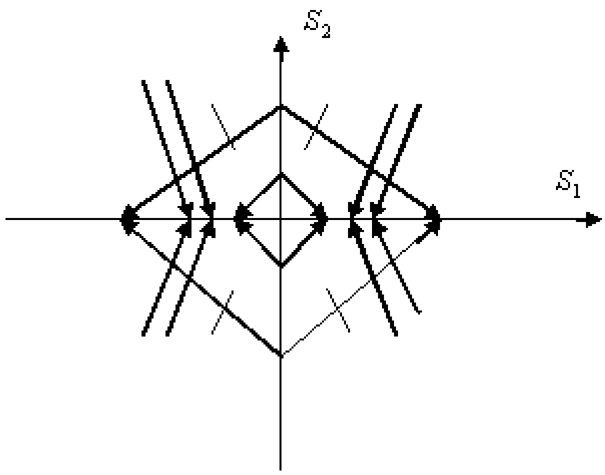
$$\frac{dx_1}{dt} = Sign(x_1), \frac{dx_2}{dt} = -2Sign(x_2),$$

которая в пространстве (s_1, s_2) *имеет вид* $\frac{ds_1}{dt} = Sign(s_1)$, $\frac{ds_2}{dt} = -2Sign(s_2)$.

Как и в примере 1 функцию V возьмем в виде $V = |s_1| + |s_2|$. *Тогда в силу системы* $\dot{V} = Sign(s_1) \cdot Sign(s_2) + Sign(s_2) \cdot (-2Sign(s_2) = 1 - 2 = -1$. *Таким образом, начало координат является устойчивым в отношении поведения траекторий в областях однозначности, а следовательно, и в* δ *- областях многообразий* $S_1(t)$ *и* $S_2(t)$. *Однако из окрестности многообразия* $S_1(t)$ *изображающая точка удаляется от начала координат, а в окрестности многообразии* $S_2(t)$ *приближается к нему.*

Доопределяя систему методом эквивалентного управления [4]*, видим, что точки многообразия* $S_2(t)$ *являются устойчивыми, а точки многообразия* $S_1(t)$ *неустойчивыми относительно началу координат. В достаточно малой его окрестности имеет место:* $\dot{s}_1 > 0$ *в области* $s_1 > 0$ *и* $\dot{s}_1 < 0$ *в области* $s_1 < 0$ *(см. рис. 3.4).*

Таким образом, на приведенных примерах мы показали, что устойчивость движения в δ *- окрестности многообразий* $S_1(t)$ *и* $S_2(t)$ *еще не гарантирует устойчивость в целом. Оказывается, необходимо наложить дополнительные условия на управляющую функцию* $u(t, x)$ *в областях точек многообразий, которые гарантировали бы устойчивость начала координат. Такие условия сформулированы для специальной системы в* [3].



Р и с у н о к *3.4*

Поведение траекторий в системе (3.1)

Список литературы

1. Барбашин Е.А., Алимов Ю.И., “К теории релейных дифференциальных уравнений”, *Известия вузов, сер. Матем.*, 1962, №1, 3–13.

2. Емельянов С.В., *Теория систем с переменной структурой*, Наука, М., 1970, 592 с.

3. Уткин В.И., *Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы, М., М., 1981, 368 с.

4. Филиппов А.Ф., *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью*, Наука, М., 1985, 223 с.

5. Пятницкий Е.С., *Избранные труды (теория управления)*, **1**, Физматлит, М., 2004, 382 с.

6. Сафонкин В.И., “Асимптотика поведения решений систем с переменной структурой”, *Труды Средневолжского математического общества*, **7**:1 (2005), 251–256.

7. Барбашин Е.А., *Введение в теорию устойчивости*, Наука, М., 1967, 241 с.

About stability of decisions of systems with variable structure in areas of ambiguity of function of management

© **V.I. Safonkin**[2]

Abstract. In this article the behavior of system with variable structure at which the condition vector from unambiguity areas gets to some moment in δ - vicinities of variety of a rupture of the right part of system is studied and certain time remains in this vicinity. It appears such behavior at values it is possible to model the modes close to an ideal $\delta \to 0$ mode of sliding which actually, as we know, doesn't exist in real systems.

Key Words: extension of a definition, uniqueness, insert, variable structure, model.

[2] senior lecturer of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk