УДК 517.9

Нестационарное диссипативное уравнение в частных производных первого порядка плотности дислокаций с квадратичной нелинейностью

© **С.Н. Алексеенко** [1], **С.Н. Нагорных** [2], **Н.С. Алексеенко** [3]

Аннотация. Рассмотрены варианты условий на характеристики стоков и истоков плотности дислокаций в задаче по вычислению диффузионной ползучести. Получено дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка с квадратичной нелинейностью в свободном члене. С применением метода дополнительного аргумента определены условия локальной разрешимости и нелокальной ограниченности решения и его первых производных.
Ключевые слова: плотность дислокаций, нелинейное уравнение первого порядка, локальная разрешимость, метод дополнительного аргумента, ограниченность.

В работе [1] при вычислении крутильной жёсткости стержней на основе динамики дислокаций и теории упругого кручения [2] получено нестационарное нелинейное уравнение плотности переползающих дислокаций (ПД) вида:

$$\dot{\nu} + \alpha\nu(\nabla\nu)^2 + f(\nu) = 0, \tag{1.1}$$

где $(\nabla\nu)^2 = (\partial_{x_1}\nu)^2 + (\partial_{x_2}\nu)^2; f(\nu) = (a(\nu) - \varepsilon(\nu)bL^{-1})\nu$, b, L, α - постоянные величины; $\varepsilon(\nu), a(\nu)$ - функции, характеризующие полную деформацию и сток ПД. Искомая функция ν - плотность ПД, зависит от времени $t \in [0, T]$ и координат x_1, x_2, принадлежащих кругу $x_1^2+x_2^2 \leq R^2$. Уравнение (1.1) описывает изменение плотности ПД с течением времени при заданном начальном значении

$$\nu(0, x_1, x_2) = \psi(x_1, x_2), \qquad x_1^2 + x_2^2 \leq R^2. \tag{1.2}$$

С помощью метода дополнительного аргумента задача Коши в [1] была сведена к системе интегральных уравнений с дополнительным аргументом. Сформулирована теорема о локальной разрешимости. В форме замечания указано, что полученная система интегральных уравнений может быть использована для нахождения численного решения в исходных координатах.

В настоящей работе рассматриваются приложения динамики дислокаций к температурно зависимым явлениям таким как диффузионная ползучесть. В соответствии с феноменологической моделью [3] кинетики плотности скользящих дислокаций (СД) допустим, что полная деформация среды $\varepsilon(\nu)$ определяется зависимостью вида

$$\frac{\varepsilon b}{L} = \frac{Gb}{a_\delta + b\nu}, \tag{1.3}$$

где a_δ - коэффициент линейного стока СД, G - источник плотности СД (в единицу времени), b - коэффициент столкновений СД и ПД в единицу времени, превращающий СД в ПД.

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Доцент кафедры теоретической физики, Нижегородский педуниверситет, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

[3] Старший инженер по разработке программного обеспечения, ЗАО «Интел А/О», филиал в Нижнем Новгороде, г. Нижний Новгород; nik-alekseenko@yandex.ru

Примем, что $a_\delta \gg b$ или $\nu \ll a_\delta b^{-1}$ в (1.3). Функцию $a(\nu)$, характеризующую сток ПД на порах, границах зерен или иных структурных особенностях кристаллов, будем считать принимающей постоянное значение $a(\nu) = a_0 = const.$

Коэффициент α из уравнения (1.1) в работе [1] имеет вид:

$$\alpha = \frac{2\mu\tau^2 b}{\sigma(\nu)L}, \tag{1.4}$$

где μ - модуль сдвига; $\tau = \frac{d\varphi}{dz}, \varphi$ -угол кручения стержня длинной dz и полной длинной L; σ - компонента напряжения, действующая на скалярную плотность дислокаций.

Определим функцию $\sigma(\nu)$ из сопоставления скорости диффузионной ползучести при растяжении [4]

$$\dot{\varepsilon} = F\sigma \tag{1.5}$$

с производной по времени от ε, определяемой посредством (1.3).

В равенстве (1.5)

$$F = \frac{2Dc^3}{d^2kT},$$

где D - коэффициент диффузии, c - период решётки, d - размер зерна, k - постоянная Больцмана, T - температура.

В однородном случае, раскладывая в ряды нелинейные члены и ограничиваясь первым порядком, получим приближенное равенство

$$\dot{\varepsilon} \cong \frac{GbL}{a_\delta^2}(a_0 - \frac{Gb}{a_\delta})\nu. \tag{1.6}$$

В выражении $a_0 - \frac{Gb}{a_\delta}$ вычитаемое является относительным источником ПД, которое при малых G даёт $\dot{\varepsilon} > 0$, а при больших G даёт $\dot{\varepsilon} < 0$. Этот эффект, возникающий из конкуренции внешнего напряжения и поверхностного натяжения, рассмотрен в [4]. В нашей интерпретации предполагается, что $bGa_\delta^{-1} - a_0 > 0$. Напряжение растяжения или сжатия $\sigma(\nu)$ определяется из (1.5) и (1.6) формулой

$$\sigma(\nu) = \frac{GbL}{F\,a_\delta^2}(a_0 - \frac{Gb}{a_\delta})\nu.$$

Подставив $\sigma(\nu)$ в (1.4), получим

$$\alpha = \frac{2\mu\tau^2 F a_\delta^2}{GL^2(a_0 - bGa_\delta^{-1})\nu}.$$

Обозначив

$$\delta = \frac{2\mu\tau^2 F a_\delta^2}{GL^2(a_0 - bGa_\delta^{-1})} = \frac{4\mu\tau^2 Dc^3 a_\delta^2}{d^2kGL^2(a_0 - bGa_\delta^{-1})T}$$

и подставив $a(\nu) = a_0$,

$$\frac{\varepsilon b}{L} = \frac{Gb}{a_\delta + b\nu} \cong \frac{Gb}{a_\delta}\left(1 - \frac{b\nu}{a_\delta}\right)$$

в (1.1), получим, что в сформулированных условиях уравнение (1.1) примет вид:

$$\dot{\nu} + \delta(\nabla\nu)^2 - A\nu + B\nu = 0, \tag{1.7}$$

где $A = bGa_\delta^{-1} - a_0, \quad B = Gb^2a_\delta^{-2}$ являются постоянными положительными величинами.

Сделаем ещё одно упрощающее предположение. При изучении поведения решения задачи (1.1)-(1.2) отдельные исследования необходимы, чтобы определить условия, при которых решения дифференциального уравнения первого порядка (1.1) не выходят из круга $x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$. В данной работе этого аспекта задачи касаться не будем и примем, что $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{R}^2$ - это вся двумерная плоскость. Так что начальное условие (1.2) примет вид:

$$\nu(0, x_1, x_2) = \varphi_0(x_1, x_2), \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.8}$$

По своему физическому смыслу функция $\nu(t, x_1, x_2)$ является величиной положительной, так что в качестве исходного условия примем, что

$$\varphi_0(x_1, x_2) > 0.$$

Так же, как в [1], применим для исследования разрешимости задачи (1.7)-(1.8) метод дополнительного аргумента. В соответствии с изложенной в [1] схемой вначале преобразуем задачу (1.7)-(1.8) к системе квазилинейных уравнений. Для этого продифференцируем (1.7) по x_1 и x_2 и введя новые неизвестные функции $p_1(t, x_1, x_2) = \partial_{x_1}\nu(t, x_1, x_2), p_2(t, x_1, x_2) = \partial_{x_2}\nu(t, x_1, x_2)$, придём к системе уравнений

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + 2\delta\left(p_1\frac{\partial p_i}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial p_i}{\partial x_2}\right) = F_i(t, \nu, p_1, p_2), \quad (i = 1, 2), \tag{1.9}$$

где $F_i(t, \nu, p_1, p_2) = -(2B\nu - A)p_i$.

Из (1.7) "сконструируем"ещё одно уравнение с тем же самым дифференциальным оператором:

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + 2\delta\left(p_1\frac{\partial \nu}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial \nu}{\partial x_2}\right) = F_0(t, \nu, p_1, p_2), \tag{1.10}$$

где $F_0(t, \nu, p_1, p_2) = -B\nu^2 + A\nu + \delta(p_1^2 + p_2^2)$. Из (1.8) естественным образом следуют начальные условия для p_1 и p_2:

$$p_i(0, x_1, x_2) = \varphi_i(x_1, x_2), \quad (i = 1, 2), \tag{1.11}$$

где $\varphi_i(x_1, x_2) = \partial_{x_i}\varphi_0(x_1, x_2)$.

Составим для задачи (1.8) - (1.11), расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом:

$$\frac{d\eta_1(s, t, x_1, x_2)}{ds} = 2\delta w_1(s, t, x_1, x_2), \qquad \eta_1(t, t, x_1, x_2) = x_1,$$

$$\frac{d\eta_2(s, t, x_1, x_2)}{ds} = 2\delta w_2(s, t, x_1, x_2), \qquad \eta_2(t, t, x_1, x_2) = x_2,$$

$$\frac{dw_i(s, t, x_1, x_2)}{ds} = F_i(s, w_0, w_1, w_2), \quad (i = 0, 1, 2), \tag{1.12}$$

$$w_i(0, t, x_1, x_2) = \varphi_i(\eta_1(0, t, x_1, x_2), \eta_2(0, t, x_1, x_2)), \quad (i = 0, 1, 2). \tag{1.13}$$

Так как в правую часть (1.12) функции $\eta_i, \quad i=1,2,$ явным образом не входят, то мы приходим к системе трех интегральных уравнений от трех неизвестных функций:

$$w_i(s,t,x_1,x_2)=\varphi_i(x_1-2\delta\int\limits_0^t w_1(\tau,t,x_1,x_2)d\tau, x_2-2\delta\int\limits_0^t w_2(\tau,t,x_1,x_2)d\tau)+$$

$$+\int\limits_0^s F_i(\tau,w_o(\tau,t,x_1,x_2),w_1(\tau,t,x_1,x_2),w_2(\tau,t,x_1,x_2))d\tau, \qquad (1.14)$$

$$(i=0,1,2).$$

Локальное существование непрерывно дифференцируемого решения системы интегральных уравнений (1.14) доказывается с помощью метода последовательных приближений. При этом промежуток разрешимости $0<t\le T_0$ определяется алгебраически на основании известных величин, входящих в задачу Коши (1.7)-(1.8). Возможность определения границ области разрешимости рассматриваемой задачи в исходных координатах является одним из преимуществ метода дополнительного аргумента. Функции $p_i(t,x_1,x_2)=w_i(t,t,x_1,x_2), \quad i=1,2, \quad \nu(t,x_1,x_2)=w_0(t,t,x_1,x_2)$ дадут решение задачи (1.8) - (1.11), а функция $\nu(t,x_1,x_2)$ будет решением задачи (1.7) - (1.8). Сформулируем соответствующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть* $\varphi_0\in\overline{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^2)$. *Тогда существует такое число* $\Upsilon>0$, *что при* $0<t<\Upsilon$ *задача Коши* (1.7) - (1.8) *имеет решение* $\nu(t,x_1,x_2)\in\overline{\mathbb{C}}^{1,2}([0,\Upsilon]\times\mathbb{R}^2)$, *которое определяется из решения системы интегральных уравнений* (1.14) *в виде* $\nu(t,x_1,x_2)=w_0(t,t,x_1,x_2)$.

Замечание 1.1. *Система интегральных уравнений* (1.14) *может быть использована для нахождения численного решения задачи* (1.7),(1.8) *в исходных координатах.*

Система интегральных уравнений (1.14) выводится из задачи (1.8) - (1.11) с помощью непосредственного интегрирования соответствующих уравнений. Однако, детальное исследование свойств решений задачи (1.8) - (1.11) даёт возможность указать условия, при которых решение исходной задачи будет обладать теми или иными свойствами.

В работе [5] подобные исследования позволили определить условия, при которых уравнение вида $\partial_t v+v\partial_x v=f(t,x,v)$ имеет решение на заданном промежутке изменения t, а в работе [6] определить условия, при которых стационарное уравнение $(\nabla v)^2=f(x_1,x_2,v)$ имеет нелокальное решение в заданной области, определяемой физическими характеристиками задачи.

Определим здесь условия, при которых на любом промежутке существования решения задачи (1.8) - (1.11) функции $w_i, \ i=0,1,2,$ а значит и функции ν,p_1,p_2, будут ограничены величинами, не зависящими от промежутка изменения t.

Из (1.12)-(1.13) при $i=1,2$ будем иметь

$$w_i(s,t,x_1,x_2)=\varphi_i(\eta_1,\eta_2)exp\left[-\int_0^s(2Bw_0-A)d\tau\right]. \qquad (1.15)$$

Следовательно, при $A\le 2Bw_0$ функции $|w_i|, \ i=1,2,$ будут ограничены величинами $|\varphi_i|, i=1,2,$ если $|\varphi_i|$ ограничены, что мы и предполагаем в условии $\varphi_0\in\overline{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^2)$.

Для w_0 у нас имеется задача Коши

$$\frac{dw_0(s,t,x_1,x_2)}{ds}=-Bw_0^2+Aw_0+\delta(w_1^2+w_2^2), \qquad (1.16)$$

$$w_0(0,t,x_1,x_2) = \varphi_0(\eta_1(0,t,x_1,x_2),\eta_2(0,t,x_1,x_2)). \tag{1.17}$$

Так как неравенство $A \le 2Bw_0$ требует для w_0 оценки снизу, составим для (1.16) минорантное уравнение

$$\frac{d\breve{w}_0(s,t,x_1,x_2)}{ds} = -B\breve{w}_0^2 + A\breve{w}_0 \tag{1.18}$$

с тем же самым начальным условием

$$\breve{w}_0(0,t,x_1,x_2) = \varphi_0(\eta_1(0,t,x_1,x_2),\eta_2(0,t,x_1,x_2)). \tag{1.19}$$

Задача Коши (1.18)-(1.19) решается в явном виде

$$\breve{w}_0(s,t,x_1,x_2) = \frac{A\varphi_0(\eta_1,\eta_2)}{B\varphi_0(\eta_1,\eta_2) - (B\varphi_0(\eta_1,\eta_2) - A)exp[-As]}. \tag{1.20}$$

Так как $B\varphi_0 - A < B\varphi_0$ и с увеличением s значение $(B\varphi_0 - A)exp[-As]$ будет только уменьшаться (или не увеличиваться), то знаменатель в (1.20) в нуль не обращается и

$$\breve{w}_0 \ge \frac{A\varphi_0}{B\varphi_0 - B\varphi_0 + A} = \varphi_0.$$

Следовательно $w_0 \ge \breve{w}_0 \ge \varphi_0$.

Таким образом, при условии

$$\varphi_0 \ge \frac{A}{2B} \quad \text{для всех}\,(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{1.21}$$

неравенство $A \le 2Bw_0$ будет справедливо на любом промежутке существования решения задачи (1.8) - (1.11).

При выполнении этого неравенства из (1.15) вытекает априорная оценка

$$|w_i(s,t,x_1,x_2)| \le N_1, \qquad i = 1,2, \tag{1.22}$$

где $N_1 = max\{\sup\limits_{\mathbb{R}^2}|\varphi_1|, \sup\limits_{\mathbb{R}^2}|\varphi_2|\}$.

Теперь из выведем оценку сверху для w_0. С этой целью построим для (1.16) мажорантное уравнение

$$\frac{d\hat{w}_0(s,t,x_1,x_2)}{ds} = -B\hat{w}_0^2 + A\hat{w}_0 + 2\delta N_1^2 \tag{1.23}$$

с тем же самым начальным условием

$$\hat{w}_0(0,t,x_1,x_2) = \varphi_0(\eta_1(0,t,x_1,x_2),\eta_2(0,t,x_1,x_2)). \tag{1.24}$$

Правая часть (1.23) может быть представлена в виде

$$-B\hat{w}_0^2 + A\hat{w}_0 + 2\delta N_1^2 = -\ B(\hat{w}_0 - \hat{w}_{01})(\hat{w}_0 - \hat{w}_{02}),$$

где $\hat{w}_{01}$ и $\hat{w}_{02}$ корни уравнения $B\hat{w}_0^2 - A\hat{w}_0 - 2\delta N_1^2 = 0$ или

$$\hat{w}_{01} = \frac{A - \sqrt{A^2 + 8B\delta N_1^2}}{2B}, \qquad \hat{w}_{02} = \frac{A + \sqrt{A^2 + 8B\delta N_1^2}}{2B}.$$

Здесь меньший корень $\hat{w}_{01} < 0$, а $\varphi_0(x_1,x_2) > 0$. Как показано в [5], [6] (в чём, впрочем, можно убедиться из явного вида решения задачи Коши (1.16) - (1.17)) при $\varphi_0(x_1,x_2) > \hat{w}_{01}$.

будет выполняться неравенство $\hat{w}_0 \leq N_2$, где $N_2 = max\{\hat{w}_{02}, \sup_{\mathbb{R}^2} \varphi_0\}$. Следовательно будет справедлива оценка $w_0 \leq \hat{w}_0 \leq N_2$.

Таким образом, для w_0 имеет место двусторонняя оценка

$$\frac{A}{2B} \leq w_0 \leq N_2 \tag{1.25}$$

на любом промежутке существования решения задачи (1.8) - (1.11).

Оценки (1.22) и (1.25) выполняются при всех $0 < s \leq t$, а значит будут справедливы и для функций $p_i(t, x_1, x_2) = w_i(t, t, x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, $\nu(t, x_1, x_2) = w_0(t, t, x_1, x_2)$, удовлетворяющих задаче Коши (1.8) - (1.11). В итоге приходим к следующей лемме.

Лемма 1.1. *Пусть* $\varphi_0 \in \overline{\mathbb{C}}^2(\mathbb{R}^2)$ *и выполнено условие* (1.21). *Тогда на любом промежутке существования решения задачи Коши* (1.8) - (1.11) *будут справедливы оценки*

$$\frac{A}{2B} \leq \nu \leq N_2, \qquad |p_i| \leq N_1, \quad i = 1, 2. \tag{1.26}$$

Замечание 1.2. *Оценок* (1.26) *недостаточно для обоснования существования нелокального решения задачи* (1.7) - (1.8) *на любом заданном промежутке* $[0, \Upsilon]$. *Нужны ещё оценки для вторых производных. Их вывод, как видно на примере статьи* [6]*, требует достаточно длинных выкладок. Поэтому в данной работе мы ограничились изложением первого этапа в поисках условий нелокальной разрешимости. Хотя оценки вида* (1.26) *имеют и определённое значение сами по себе, т.к. характеризуют качественные свойства решений.*

Список литературы

1. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., “Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка плотности дслокаций”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **12**:1 (2010), 41 – 45.

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М., *Теория упругости*, Наука, М., 1987.

3. Крупкин П. Л., Куров И. Е., Нагорных С. Н., Цыванюк К. И., “Феноменологическая модель эволюции дислокационных структур при циклическом кручении”, *ФММ*, **66**:5 (1988), 978–984.

4. *Физическое металловедение под редакцией Р.Канта*, 3-е издание, Мир, М., 1968.

5. Алексеенко С. Н., Елькина Е. А., “Применение метода дополнительного аргумента к исследованию нелокальной разрешимости задачи Коши для уравнения первого порядка с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Труды Нижегородского гос. технического университета им. Р.Е.Алексеева*, 2011, № 2(87), 320 – 329.

6. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Елькина Е. А., “Исследование условий нелокальной разрешимости уравнения диссипативных стационарных структур.”, *Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского*, 2012, № 1, Часть 1, 122 – 128.

The nonstationary dissipative first-order partial differential equation of the dislocation density with a quadratic non-linearity

© S.N. Alekseenko[4], S.N. Nagornykh[5], N. S. Alekseenko[6]

Abstract. Variants of hypotheses on characteristics of sinks and sources of the dislocation density in the problem of calculating the diffusion creep are considered. A first-order partial differential equation with a quadratic non-linearity in the constant term is obtained. Conditions of the local solvability and non-local boundedness of the solution and its first derivatives are determined with using the method of an additional argument.

Key Words: dislocation density, nonlinear first-order equation, local solvability, method of an additional argument, boundedness.

[4] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[5] The senior lecture of the theoretical physics chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru

[6] The senior software developer, Intel, Nizhniy Novgorod; nik-alekseenko@yandex.ru