УДК УДК 517.929

Анализ систем с неограниченными решениями

© **И.В. Зубов**[1], **С.В. Зубов**[2]

Аннотация. В данной статье изучаются теоретические основы исследования движений систем, не имеющих предельных точек. Открывается новая область исследования - уходящие движения. Изучаются неограниченные решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены условия устойчивости неограниченных решений и оценки на скорость приближения траекторий возмущенного движения к траектории невозмущенного.

Ключевые слова: равновесное решение, координата, матрица, асимптотическая устойчивость, положение равновесия.

При решении обратной задачи динамики, характерной для задач управления, заключающейся в том, чтобы по заданным или желаемым кинематическим характеристикам движения построить систему дифференциальных уравнений динамики, методы А.М. Ляпунова имеют уже более практическое применение, так как при построении уравнений динамики учитывается требование устойчивости желаемых кинематических характеристик и уравнения возмущенного движения строятся легко.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = PX + Q + \mu F(X). \tag{1.1}$$

где $X = (x_1, \dots, x_n)^*$ - вектор фазовых переменных, P, Q - постоянные матрицы размерностей $n \times n$ и $n \times 1$ соответственно, $F = (f_1, \dots, f_n)^*$ - векторная функция, μ - малый параметр.

Равновесным решение (движением) мы будем называть такое решение (движение)

$$X(t, X_0) = (x_1(t, X_0), \dots, x_n(t, X_0))^*$$

в n-мерном пространстве, у которого одна из координат неограниченно возрастает при $t \to \infty$, а остальные постоянны, например,

$$x_j(t, X_0) \equiv x_j^0,\ j = 1, \dots, n-1;\ x_n \to \infty \,\text{при}\, t \to \infty.$$

Поставим вопрос о существовании равновесного решения системы (1.1) и о поведении решений этой системы уравнений, начинающихся в некоторой окрестности равновесного решения.

Пусть выполнены условия: собственные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы P таковы, что $\lambda_n = 0$, $Re\lambda_j < 0$ для $j = 1, \dots, n-1$, $F(\bar{X})$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица [1].

Сделаем замену $X = SY$, где S - вырожденная матрица размерности $n \times n$, и подставим это выражение в (1.1):

$$\dot{Y} = S^{-1}PSY + S^{-1}Q + \mu S^{-1}F(SY). \tag{1.2}$$

[1] Профессор СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru
[2] Доцент СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Отметим, что $x_i = (S_i^*, Y)$, где $S_i - i-$ я строка матрицы S. Матрица S выбирается так, чтобы матрица $A = S^{-1}PS$ имела последнюю строку и последний столбец нулевыми. Существование такой матрицы очевидно. Например, в качестве S можно взять хотя бы матрицу, составленную из корневых векторов матрицы P; в этом случае матрица A будет жордановой.

Перепишем систему (1.2) в виде

$$\dot{Y} = AY + R + \mu\Phi(Y), \tag{1.3}$$

где $R = S^{-1}Q = (y_1, \ldots, y_n)^*$,

$$\Phi(Y) = S^{-1}F(SY) = (\varphi_1(Y), \ldots, \varphi_n(Y))^*.$$

Разделим систему (1.3) на две группы уравнений:

$$\dot{y}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n-1}y_{n-1} + r_1 + \mu\varphi_1(Y),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{y}_{n-1} = a_{n-1\,1}y_1 + a_{n-1\,2}y_2 + \ldots + a_{n-1\,n}y_{n-1} + r_{n-1} + \mu\varphi_{n-1}(Y),$$

$$\dot{y}_n = r_n + \mu\varphi_n(Y). \tag{1.4}$$

При $\mu = 0$ у системы (1.4) существует положение равновесия $Y_0 = (Y_1^0, \ldots, Y_{n-1}^0)$ в силу того, что матрица $\{a_{ij}\}$ $(i = 1, \ldots, n-1,\, j = 1, \ldots, n-1)$ невырожденная. Следовательно, по теореме о существовании неявной функции у системы (1.4) есть положение равновесия $Y(\mu)$ и при любом μ, которое по модулю должно быть меньше некоторого положительного μ_0. Это прямо следует из теоремы о существовании неявной функции, если учесть, что якобиан совпадает с определителем матрицы $\{a_{ij}\}$, $i, j = 1, \ldots, n-1$.

Отметим, что если правые части $\Phi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ не будут зависеть от y_n, то положение равновесия системы (1.4) будет асимптотически устойчиво по Ляпунову и y_n будет меняться по линейному закону

$$y_n = y_{n_0} + (r + \mu\varphi_n(Y_\mu))t.$$

Следовательно, равновесное решение системы (1.3) будет устойчиво по Ляпунову.

Посмотрим, какие ограничения на систему (1.1) наложит условие независимости Φ от y_n, т.е.

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n} = 0, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{1.5}$$

Так как

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial y_n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_n} = (\nabla\varphi_i, S_n),$$

где $S_n - n$ - й столбец матрицы S, то (1.5) эквивалентно уравнению

$$(\nabla\varphi_i, S_n) = 0. \tag{1.6}$$

Вектор S_n ортогонален всем строкам матрицы P, т.е. ортогонален подпространству, натянутому на строки матрицы P, и так как

$$\nabla\varphi_i = \sum \sigma_{ij} \nabla f_i,$$

где σ_{ij} - элементы матрицы S^{-1}, то выполнено (1.6), а следовательно, будет справедливо и соотношение (1.5), если ∇f лежат в подпространстве, натянутом на строки матрицы P [2].

Рассмотрим равновесное решение $X(t)$. Пусть точка $M \in E_n$. Введем в рассмотрение величину $\rho(M, X(t))$ - расстояние от точки M до траектории $X(t) : \rho(M, X(t)) = \min\limits_{\tau \geq t_0} \|M - X(\tau)\|$.

Определение 1.1. *Равновесное решение $X(t)$ называется орбитально устойчивым (орбитально асимптотически устойчивым), если для любого сколь угодно малого положительного ε найдется $\delta > 0$ такое, что при $\rho(X_0, X(t)) < \delta$ будет выполняться* [3]

$$\rho(X(t, X_0), X(t)) < \varepsilon \quad \textit{при} \quad t \geq 0 (\rho(X(t, X_0), X(t)) \underset{t\to\infty}{\to} 0).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть для системы* (1.1) *собственные числа матрицы P таковы, что $Re\lambda_j < 0$ $(j = 1, \ldots, n-1)$, $\lambda_n = 0$, векторы ∇f_j $(j = 1, \ldots, n)$ существуют и лежат в подпространстве, натянутом на строки матрицы P. Тогда существует такое $\mu_0 > 0$, что для любого μ, по модулю превосходящего μ_0, существует орбитально асимптотически устойчивое неограниченное равновесное решение системы* (1.1), *устойчивое по Ляпунову.*

Далее будем рассматривать систему вида

$$\begin{gathered} \dot{X} = PX + \mu F(X, z), \\ \dot{z} = r + \mu h(X, z), \end{gathered} \tag{1.7}$$

в которую переходит система вида (1.1), если матрица P имеет хотя бы одно нулевое собственное число. Здесь $X = (x_1, \ldots, x_N)^*$, $P - N \times N$ - матрица, $r > 0$, μ - малый параметр, $F = (f_1, \ldots, f_n)$ - векторная, $h(X, z)$ - скалярная функция переменных $x_1, \ldots, x_N, z$.

Если $F(0, z) \equiv 0$, $h(0, z) \equiv 0$, то у системы (1.7) существует семейство неограниченных равновесных решений [1.3]

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0, \quad z = z_0 + rt, \tag{1.8}$$

представляющее плоскость в $(N+1)$ - мерном пространстве. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$ [4]. Задача состоит в изучении свойства этого решения. Здесь и далее будем предполагать, относительно функций F, h следующее:

1) функции $f_1, \ldots, f_N, h$ разлагаются в ряды по целым положительным степеням переменных $x_1, \ldots, x_N$, равномерно сходящимся относительно z, когда величина $\|X\|$ достаточно мала;

2) разложения функций $f_1, \ldots, f_N, h$ не содержат членов, линейных относительно $x_1, \ldots, x_N$;

3) имеет место оценка $|h| \leq k_0 |z|^b (\sum_{j=1}^N |x_j|)^\alpha$, где $k_0 > 0$, $a \geq 0$, $b \geq 0$.

2. Выводы

Таким образом в данной статье изучаются теоретические основы исследования движений систем, не имеющих предельных точек. Открывается новая область исследования - уходяшие движения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (пр. № 10-08-000624).

Список литературы

1. Н. В. Зубов, А. Ф. Зубова, *Безопасность функционирования технических систем*, Изд-во «ВВМ», СПб, 2009, 343 с.

2. М. В. Стрекопытова, *Исследование равновесных движений*, СПбГУ, СПб, 2007, 95 с.

3. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, Н. И. Зубов, *Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления*, АООТ «Мобильность-плюс», СПб, 2010, 319 с.

4. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, С. А. Стрекопытов, *Теория устойчивости и теория квазипериодических систем*, АООТ «Мобильность-рлюс», СПб, 2010, 206 с.

The analysis of systems with no limits solutions

© **I.V. Zubov[3], S.V. Zubov[4]**

Abstract. In giving article is learns theoretical bases of investigation motions systems, is not have limiting points. Is opens new region of investigation - going motions. Is learns no limiting solutions of systems ordinary differential equations. Is supposes conditions of stability no limiting solutions and estimates on velocity approaches of trajectories indignant motion to trajectory no indignant.
Key Words: equally measure solution, coordinate, matrix, asymptotical stability, position of equally weight.

[3] Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru
[4] Docent, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru