УДК 517.9

Аналитическое решение задачи о течении Куэтта

© В.В. Лукашев, [1]В.Н. Попов,[2] А.А. Юшканов [3]

Аннотация. На примере задачи о течении Куэтта предложен метод вычисления макропараметров газа в каналах, толщина которых соизмерима со средней длиной свободного пробега молекул газа. В качестве основного уравнения используется линеаризованная БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия на стенках канала - модель зеркально-диффузного отражения. Для различных значений толщины канала и коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа стенками канала вычислены значения потоков массы газа и тепла, приходящихся на единицу ширины канала. Проведено сравнение с аналогичными результатами, опубликованными в открытой печати.

Ключевые слова: течение газа в канале, течение Куэтта, кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения

1. Введение

Моделирование течений разреженного газа имеет большое количество применений, среди которых течения в микро- и наноустройствах, изучение структуры ударных волн, явлений в кнудсеновском пограничном слое и.т.д. [1]. При этом для расчета макропараметров газа в общем случае используют методы прямого численного моделирования, основанные на том, что уравнение Больцмана решается конечно-разностным методом на фиксированной сетке в пространстве скоростей и координат, а искомые макропараметры газа находятся путем численного нахождения в пространстве скоростей значений моментов от функции распределения. Однако при таком подходе требуется наличие мощных вычислительных ресурсов, как в плане оперативной памяти, так и в плане процессорного времени [1]. Объем вычислений и, как следствие, уровень требований к производительности вычислительной техники, используемой для расчетов, можно существенно уменьшить за счет (пусть даже и частичного) решения задачи с использованием аналитических методов. Именно это и позволяет сделать предложенный в работе метод, сводящий вычисление макропараметров газа в канале к численному решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Заметим, что к настоящему времени разработаны эффективные процедуры численного решения такого рода уравнений и их использование не приводит к каким-либо вычислительным сложностям. Для одноатомных газов с использованием численных методов задача о течении Куэтта рассматривалась в [2]-[5]. В [6] на основе БГК модели уравнения Больцмана для почти зеркальных граничных условий на стенках канала с использованием аналитических методов получены выражения, описывающие профиль массовой скорости газа и потоки тепла и массы газа вдоль оси канала. В [7] аналогичные исследования проведены с использованием БГК модели уравнения Больцмана для диффузных граничных условий. Целью представленной работы является обобщение результатов, полученных в

[1] Аспирант кафедры математики, Северный (Арктический) федеральный университет, г. Архангельск; v.lukashev@narfu.ru.

[2] Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет, г. Архангельск; v.popov@agtu.ru.

[3] Профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет, г. Москва; yushkanov@inbox.ru.

[7] на случай использования зеркально-диффузной модели граничных условий. В качестве основного уравнения используется линеаризованная БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана [8].

2. Постановка задачи. Построение функции распределения

Рассмотрим плоский канал толщиной D', стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm d'$ прямоугольной декартовой системы координат ($d' = D'/2$), ось Oz' которой параллельна стенкам канала. Предположим, что стенки канала движутся в своих плоскостях в противоположных направлениях со скоростями $\mathbf{u}$ и $-\mathbf{u}$. Будем считать, что течение носит стационарный характер, а скорость движения стенок канала много меньше скорости звука в газе. Тогда рассматриваемая задача допускает линеаризацию. Учитывая, что в задачах скольжения функция распределения пропорциональна касательной к обтекаемой поверхности компоненте массовой скорости газа, функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям представим в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = \beta^{3/2}\pi^{-3/2}\exp(-C^2)\,\left[1 + C_z\, Z(x, C_x)\right]. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор; $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\,\mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа; $\beta = m/2k_BT$; m – масса молекулы газа; k_B – постоянная Больцмана; T – температура газа; $Z(x, C_x)$ – линейная поправка к локально-равновесной функции распределения; $x = x'/l_g$ – безразмерная координата; $l_g = \eta_g\,\beta^{-1/2}/p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа, p и η_g – давление и коэффициент динамической вязкости газа.

Запишем в выбранной системе координат БГК модель кинетического уравнения Больцмана

$$v_x\frac{\partial f}{\partial x'} + v_z\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g}(f_{eq} - f). \tag{2.2}$$

Здесь $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – локально-равновесный максвеллиан. Подставляя (2.1) в (2.2) и линеаризуя $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ относительно абсолютного максвеллиана, приходим к уравнению для нахождения $Z(x,\mu)$ ($\mu = C_x$)

$$\mu\frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\tau^2)\,Z(x,\tau)\,d\tau. \tag{2.3}$$

Общее решение (2.3) приведено в [8]

$$Z(x,\mu) = A_0 + A_1(x-\mu) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{x}{\eta})\,F(\eta,\mu)a(\eta)\,d\eta, \tag{2.4}$$

$$F(\eta,\mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\eta\,\mathrm{P}\frac{1}{\eta-\mu} + \exp(\eta^2)\lambda(\eta)\,\delta(\eta-\mu), \tag{2.5}$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,z\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\mu^2)}{\mu - z}\,d\mu, \tag{2.6}$$

$\mathrm{P}(1/z)$ – распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, A_0, A_1 и $a(\eta)$ – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению.

С учетом используемой модели зеркально-диффузного отражения граничные условия на верхней и нижней стенках канала записываются в виде

$$Z(d,\mu) = (1-q)Z(d,-\mu) + 2qU, \qquad \mu < 0, \tag{2.7}$$

$$Z(-d,\mu) = (1-q)Z(-d,-\mu) - 2qU, \qquad \mu > 0. \tag{2.8}$$

Здесь $U = \beta^{1/2}\,u$ – модуль безразмерной скорости движения стенок канала. Подставляя (2.4) в (2.7) и (2.8), с учетом (2.5) приходим к интегральным уравнениям

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta+\mu}\,d\eta + \exp(\mu^2)B(\mu,d)\lambda(\mu) =$$
$$= q(2U - A_0 - A_1\mu - A_1 d) + 2A_1\mu, \qquad \mu < 0, \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\,B(\eta,-d)}{\eta-\mu}\,d\eta + \exp(\mu^2)B(\mu,-d)\lambda(\mu) =$$
$$= q(A_1 d - A_0 - A_1\mu - 2U) + 2A_1\mu, \qquad \mu > 0. \tag{2.10}$$

Здесь

$$B(\mu,d) = b(\mu,d) - (1-q)b(-\mu,d), \qquad b(\eta,x) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right)\,a(\eta). \tag{2.11}$$

Заменив в (2.9) μ на $-\mu$ и учитывая, что на действительной оси $\lambda(z)$ является четной функцией, перепишем его в следующем виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta + \exp(\mu^2)B(-\mu,d)\lambda(\mu) =$$
$$= q(2U - A_0 + A_1\mu - A_1 d) - 2A_1\mu, \qquad \mu > 0. \tag{2.12}$$

Представим интеграл, входящий в (2.12) в виде суммы двух интегралов: регулярного и сингулярного, после чего заменим в первом переменную интегрирования η на $-\eta$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,B(\eta,d)}{\eta+\mu}\,d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta.$$

Аналогично преобразовав интеграл, входящий в (2.10), получим систему уравнений:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta + \exp(\mu^2)B(-\mu,d)\lambda(\mu) =$$
$$= q(2U - A_0 + A_1\mu - A_1 d) - 2A_1\mu - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,B(\eta,d)}{\eta+\mu}\,d\eta, \qquad \mu > 0, \tag{2.13}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta B(\eta,-d)}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)B(\mu,-d)\lambda(\mu)=$$

$$=q(A_1d-A_0-A_1\mu-2U)+2A_1\mu-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta B(-\eta,-d)}{\eta+\mu}\,d\eta,\ \mu>0. \quad (2.14)$$

Последовательно складывая и вычитая почленно (2.13) и (2.14), приходим к уравнениям

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,[B(-\eta,d)+B(\eta,-d)]}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)[B(-\mu,d)+B(\mu,-d)]\lambda(\mu)=$$

$$=-2qA_0-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,[B(\eta,d)+B(-\eta,-d)]}{\eta+\mu}\,d\eta,\qquad \mu>0, \quad (2.15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,[B(\eta,-d)-B(-\eta,d)]}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)[B(\mu,-d)-B(-\mu,d)]\lambda(\mu)=$$

$$=4A_1\mu+2q(A_1d-A_1\mu-2U)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,[B(-\eta,-d)-B(\eta,d)]}{\eta+\mu}\,d\eta,$$

$$\mu>0. \quad (2.16)$$

Нетрудно видеть, что (2.15) обращается в тождество при выполнении условий $B(\eta,d)=-B(-\eta,-d)$, $A_0=0$. Отсюда с учетом определения функции $B(\eta,d)$ (2.11) получаем, что $a(-\eta)=-a(\eta)$. Теперь (2.16) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)B(-\mu,d)\lambda(\mu)=f(\mu),\qquad \mu>0, \quad (2.17)$$

$$f(\mu)=-2A_1\mu-q(A_1d-A_1\mu-2U)-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta\,B(\eta,d)}{\eta+\mu}\,d\eta. \quad (2.18)$$

Решение (2.17) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши

$$N(z)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta B(-\eta,d)}{\eta-z}\,d\eta, \quad (2.19)$$

для которой

$$N^+(\mu)-N^-(\mu)=2\sqrt{\pi}i\mu B(-\mu,d),\qquad 0<\mu<+\infty \quad (2.20)$$

$$N^+(\mu)+N^-(\mu)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\eta B(\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta,\qquad 0<\mu<+\infty. \quad (2.21)$$

Здесь $N^+(\mu)$ и $N^-(\mu)$ – краевые значения функции $N(\mu)$ на верхнем и нижнем берегах разреза, совпадающего с действительной положительной полупрямой. Аналогичные соотношения для $\lambda(\mu)$, определяемой равенством (2.6), имеют вид

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i\mu \exp(-\mu^2), \qquad 0 < \mu < +\infty \tag{2.22}$$

$$\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu), \qquad 0 < \mu < +\infty. \tag{2.23}$$

Здесь разрез совпадает со всей действительной числовой прямой. С учетом (2.20) – (2.23) сведем интегральное уравнение (2.17) к краевой задаче Римана на действительной положительной полуоси

$$N^+(\mu)\lambda^+(\mu) - N^-(\mu)\lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}\mu f(\mu)\exp(-\mu^2), \qquad \mu > 0. \tag{2.24}$$

Особенность краевой задачи (2.24) состоит в том, что функции $N(z)$ и $\lambda(z)$ имеют различные разрезы. Чтобы устранить эту особенность необходимо решить задачу факторизации, то есть найти такую не обращающуюся в ноль ни в одной конечной точке функцию $X(z)$, для которой на действительной положительной полуоси выполняется условие (2.25) и которая аналитична во всех остальных точках комплексной плоскости

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}. \tag{2.25}$$

Решение этой задачи имеет вид [8]:

$$X(z) = \frac{1}{z}\exp\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{(\theta(\tau) - \pi)}{\tau - z}\,dt\right], \qquad \theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - arcctg\left(\frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau\exp{-\tau^2}}\right).$$

С учетом решения однородной краевой задачи (2.25) перепишем (2.24)

$$N^+(\mu)X^+(\mu) - N^-(\mu)X^-(\mu) = \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)}\,2\sqrt{\pi}\mu f(\mu)\exp(-\mu^2), \qquad \mu > 0. \tag{2.26}$$

Линии скачков функций $N(z)$ и $X(z)$ совпадают с контуром краевого условия. Следовательно, получили краевую задачу Римана - задачу определения аналитической функции по заданному скачку. Учитывая поведение входящих в (2.26) функций, по формулам Сохоцкого получаем ее общее решение

$$N(z) = \frac{1}{X(z)}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\eta f(\eta)\exp(-\eta^2)\frac{d\eta}{\eta - z}. \tag{2.27}$$

Рассмотрим поведение решения, задаваемого выражением (2.27) в окрестности бесконечно удаленной точки. Учитывая, что при $|z| \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\eta f(\eta)\exp(-\eta^2)\frac{d\eta}{\eta - z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\eta f(\eta)\exp(-\eta^2)d\eta + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

$$\frac{1}{X(z)} = z + Q_1 + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

находим

$$N(z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) d\eta + O\left(\frac{1}{z}\right), \qquad |z| \to +\infty. \tag{2.28}$$

Здесь Q_n - интегралы Лоялки,

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta^{k+1} \exp(-\eta^2)\, d\eta, \tag{2.29}$$

в частности, $Q_1 = -1.01619$, $Q_2 = -1.26632$.

Так как функция $N(z)$ согласно (2.19) задана интегралом типа Коши то в окрестности бесконечно удаленной точки $N(z) = O(1/z)$. Отсюда, с учетом (2.28) приходим к условию разрешимости краевой задачи (2.26)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) d\eta = 0. \tag{2.30}$$

С учетом (2.18) и (2.29) перепишем (2.30) в виде

$$A_1[qd - (2-q)Q_1] - 2qU - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta \exp(-\eta^2)\, d\eta \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, B(\tau, d)}{\tau + \eta}\, d\eta = 0. \tag{2.31}$$

Изменяя в последнем интеграле порядок интегрирования и, учитывая интегральное представление функции $X(z)$

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \frac{\eta \exp(-\eta^2)\, d\eta}{\eta + z}, \tag{2.32}$$

из (2.31) находим

$$A_1 = \frac{1}{qd - (2-q)Q_1} \left[2qU + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \tau\, B(\tau, d) X(-\tau)\, d\tau \right]. \tag{2.33}$$

Коэффициент $a(\eta)$ в разложении (2.4) решения рассматриваемой задачи по собственным векторам непрерывного спектра найдем из условия (2.20), предварительно преобразовав (2.27). Принимая во внимание (2.29) и (2.29), получаем

$$N(z) = -q(A_1 d - 2U) - A_1(2-q)z + \frac{1}{X(z)} \Bigg[A_1(2-q) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta \exp(-\eta^2) \frac{d\eta}{\eta - z} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, B(\tau, d)}{\tau + \eta}\, d\eta \Bigg].$$

Заметим, что:

$$\frac{1}{\eta - z} \frac{1}{\tau + \eta} = \frac{1}{\tau + z} \left[\frac{1}{\eta - z} + \frac{1}{\eta + \tau} \right],$$

тогда, с учетом (2.32) и (2.29) получим:

$$N(z)=-q(A_1d-2U)-A_1(2-q)z+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\tau B(\tau,d)\,d\tau}{\tau+z}+$$
$$+\frac{1}{X(z)}\left[A_1(2-q)+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\tau B(\tau,d)X(-\tau)\,\frac{d\tau}{\tau+z}\right].$$

Для построенного решения $N(z)$, используя формулы Сохоцкого-Племеля, можем записать

$$N^+(\mu)-N^-(\mu)=-\frac{\sqrt{\pi}i\mu\exp(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2}X(-\mu)\left[A_1(2-q)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\tau B(\tau,d)X(-\tau)\,\frac{d\tau}{\tau+\mu}\right],\mu>0. \quad (2.34)$$

Приравняем правые части (2.20) и (2.34)

$$2\sqrt{\pi}i\mu B(-\mu,d)=-\frac{\sqrt{\pi}i\mu\exp(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2}X(-\mu)\left[A_1(2-q)+\right.$$
$$\left.\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\tau B(\tau,d)X(-\tau)\,\frac{d\tau}{\tau+\mu}\right],\qquad \mu>0. \quad (2.35)$$

Теперь, учитывая нечетность функции $a(\eta)$ и подставляя в (2.35) в явном виде выражения для $B(\eta,d)$ (2.11) и A_1 (2.33), для нахождения $a(\mu)$ приходим к уравнению Фредгольма второго рода

$$a(\mu)=\frac{X(-\mu)\exp(-\mu^2)}{2|\lambda^+(\mu)|^2(\exp(d/\mu)+(1-q)\exp(-d/\mu))}\left[\frac{2qU(2-q)}{qd-(2-q)Q_1}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty}\tau X(-\tau)(\exp(-d/\tau)+(1-q)\exp(d/\tau))\left[\frac{2-q}{qd-(2-q)Q_1}+\frac{1}{\tau+\mu}\right]a(\tau)\,d\tau\right],\qquad \mu>0.$$
$$(2.36)$$

Решение (2.36) найдем с использованием численных методов. Так как правая часть (2.36) содержит множитель $\exp(-\mu^2)$, то входящий в нее интеграл быстро сходится. В силу этого в качестве верхнего предела интегрирования в (2.36) принималось значение, равное 5. Введем обозначения

$$h(\mu)=\frac{X(-\mu)\exp(-\mu^2)}{2|\lambda^+(\mu)|^2(\exp(d/\mu)+(1-q)\exp(-d/\mu))},\qquad f(\mu)=h(\mu)\frac{2qU(2-q)}{qd-(2-q)Q_1},$$
$$K(\tau,\mu)=h(\mu)\tau X(-\tau)(\exp(-d/\tau)+(1-q)\exp(d/\tau))\left[\frac{2-q}{qd-(2-q)Q_1}+\frac{1}{\tau+\mu}\right],$$

$\lambda=1/\sqrt{\pi}$ и перепишем (2.36) в виде

$$a(\mu)=f(\mu)+\lambda\int\limits_0^{+\infty}K(\tau,\mu)\,a(\tau)\,d\tau. \quad (2.37)$$

Введем равномерную сетку на отрезке $[0,5]$ с шагом h, заменим интеграл, входящий в правую часть уравнения (2.37), его приближенным значением, вычисленным с помощью квадратурной формулы, и запишем полученное выражение для каждого значения переменной μ в узлах введенной ранее сетки

$$a(\mu_j) = f(\mu_j) + \lambda \sum_{i=0}^{5} D_i K(\tau_i, \mu_j) a(\tau_i), \tag{2.38}$$

где μ_i и τ_j - значения свободной и подынтегральной переменной в узлах равномерной сетки на отрезке, D_i - весовые коэффициенты квадратурной формулы.

Введем обозначения: $K_{i,j} = K(\tau_i, \mu_j)$, $f_j = f(\mu_j)$, $a_j = a(\mu_j)$ и получим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_1(1-\lambda D_1 K_{1,1}) - a_2\lambda D_2 K_{2,1} - ... - a_n \lambda D_n K_{n,1} = f_1 \\ -a_1\lambda D_2 K_{1,2} + a_2(1-\lambda D_2 K_{2,2}) - ... - a_n\lambda D_n K_{n,2} = f_2 \\ ... \\ -a_1\lambda D_1 K_{1,n} - a_2\lambda D_2 K_{2,n} - ... + a_n(1-\lambda D_n K_{n,n}) = f_n. \end{cases}$$

Для решения построенной системы уравнений, был использован матричный метод, в результате применения которого искомая функция $a(\mu)$ была найдена в виде n-мерного вектора ее значений в узловых точках.

С использованием полученного n-мерного вектора находим значение параметра A_1

$$A_1 = \frac{1}{qd-(2-q)Q_1}\left[2qU + \lambda \sum_{k=0}^{5} D_k a(\tau_k) J_k\right],$$

здесь $J_k = \tau_k X(-\tau_k)(\exp(-d/\tau_k) - (1-q)\exp(d/\tau_k))$.

Таким образом, неизвестные параметры A_0, A_1 и функция $a(\mu)$, входящие в (2.4) найдены и функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

3. Вычисление макропараметров газа в канале

С учетом построенной функции распределения вычислим безразмерный поток массы газа через верхнюю половину канала J_M. Исходя из статистического смысла функции распределения и учитывая (2.1), (2.4), находим профиль массовой скорости газа в канале

$$U_z(x) = \pi^{-3/2}\int \exp(-C^2)\, C_z^2 Z(x, C_x)\, d^3\mathbf{C} = \frac{1}{2}A_1 x - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(\eta)\exp(-\frac{x}{\eta})\, d\eta. \tag{3.1}$$

Интегрируя затем (3.1) по x от 0 до d, находим безразмерный поток массы газа через верхнюю половину канала

$$J_M = \frac{1}{2d^2}\int\limits_0^d q_z(x)\, dx = \frac{A_1}{8} - \frac{1}{2d^2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{+\infty} \mu a(\mu)\left[ch\left(\frac{d}{\mu}\right) - 1\right] d\mu. \tag{3.2}$$

Аналогичным образом вычисляем профль потока тепла в канале

$$q_z'(x') = \int \frac{m}{2}[\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')]^2\, |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|\, f(\mathbf{r}', \mathbf{v})\, d^3\mathbf{v} = \frac{nk_BT}{\sqrt{\beta}}\; q_z(x)\,\frac{1}{p}\frac{dp}{dz}.$$

D	CES [4]	LBE [4]	BGK [4]	(3.2)
		$q = 0.1$		
0.1	0.0541084		0.0481420	0.048118
1.0	0.0231248		0.0234756	0.023475
10	0.0115560		0.0117090	0.011707
		$q = 0.5$		
0.1	0.304586		0.274926	0.274814
1.0	0.113676		0.116120	0.116118
10	0.032447		0.032663	0.032662
		$q = 1$		
0.1	0.741991	0.72929	0.685750	0.68557
1.0	0.226777	0.22737	0.232188	0.23218
10	0.042142	0.04219	0.042281	0.04228

Таблица 1: Зависимость потока газа J_M через верхнюю половину канала от его толщины

Здесь

$$q_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2)\, C_z^2 (C^2 - \frac{5}{2}) Z(x, C_x)\, d^3\mathbf{C} \tag{3.3}$$

есть безразмерная z-компонента вектора плотности потока тепла.

Интегрируя (3.3) по половине толщины канала, находим поток тепла, приходящися на единицу ширины канала

$$J_Q = -\frac{1}{2d^2} \int_0^d q_z(x)\, dx = -\frac{1}{4\sqrt{\pi}\, d^2} \int_0^{+\infty} \mu a(\mu) \left[ch\left(\frac{d}{\mu}\right) - 1 \right] d\mu. \tag{3.4}$$

Значения J_M и J_Q были найдены численными методами, аналогичными тем, что использовались для нахождения A_1 и $a(\mu)$. Все вычисления проводились с использованием пакета прикладных программ Mathematica 7 путем интерполяции подынтегральных функций линейными сплайнами. Значения J_M и J_Q, рассчитанные для различных значений толщины канала $D = 2d$ на основе (3.2) и (3.4) и полученные в [3], [4], приведены в таблицах 1 и 2. Как следует из таблиц результаты представленной работы с высокой степенью точности совпадают с аналогичными результатами, полученными в рамках БГК модели. Отличие с результатами, полученными в рамках других моделей объясняется высокой чувствительностью рассматриваемых макропараметров, в частности J_Q, от выбора модели интеграла столкновений.

4. Заключение

Итак, в работе на примере задачи о течении Куэтта предложен метод вычисления макропараметров газа в каналах, толщина которых соизмерима со средней длиной свободного пробега молекул газа. Для случая диффузно-зеракльного отражения молекул газа стенками канала вычислены потоки массы газа и тепла через верхнюю половину канала. Проведен численный анализ полученных выражений. Показано, что полученные в работе результаты с высокой степенью точности совпадают с аналогичными результатами, полученными ранее использованием численных методов в рамках БГК-модели.

D	BGK [3]	CES [3]	(3.4)
	$q = 0.1$		
0.1	1.66805(-2)	1.12938(-2)	1.66991(-2)
1.0	4.58954(-3)	4.34898(-3)	4.62002(-3)
10	1.98991(-4)	1.79134(-4)	1.98172(-4)
	$q = 0.5$		
0.1	9.17172(-2)	6.22276(-2)	9.18720(-2)
1.0	1.99715(-2)	1.81577(-2)	2.01022(-2)
10	4.29861(-4)	3.64077(-4)	4.30193(-4)
	$q = 1$		
0.1	2.12309(-1)	1.44794(-1)	2.12830(-1)
1.0	3.13629(-2)	2.69864(-2)	3.15636(-2)
10	3.62529(-4)	2.85980(-4)	3.65039(-4)

Таблица 2: Зависимость потока газа J_Q через верхнюю половину канала от его толщины

Список литературы

1. Клосс Ю. Ю., Черемисин Ф. Г., Шувалов П. В., “Решение уравнения Больцмана на графических процессорах”, *Вычислительные методы и программирование*, **11** (2010), 144–152.

2. Barihcello L. B., Camargo M., Podrigues P., Siewert C. E., “Unified solutions to classical flow problems based on the BGK model”, *ZAMP*, **52** (2001), 517–534.

3. Siewert C. E., “Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model Linearized Boltzmann Equation”, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **21** (2002), 579–597.

4. Siewert C. E., “The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems”, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik*, **54** (2003), 273–303.

5. Garcia R. D. M., Siewert C. E., “The Linearized Boltzmann Equation with Cercignani-Lampis Boundary Conditions: Basic Flow Problems in a Plane Channel.”, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **28** (2009), 387–396.

6. Латышев А. В., Юшканов А. А., “Влияние свойств поверхности на характеристики газа между пластинами в задаче Куэтта. Почти зеркальные условия”, *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*, 1999, № 10, 35–41.

7. Попов В. Н., Тестова И. В., Юшканов А. А., “Аналитическое решение задачи о течении Куэтта в плоском канале с бесконечными параллельными стенками”, *ЖТФ*, **81**:1 (2011), 53–58.

8. Черчиньяни К., *Математические методы в кинетической теории газов.*, Мир, М, 1973, 245 с.

Analytic solution of a problem of Couette Flow

© V.V. lukashev [4], V.N. Popov [5], A.A. Yushkanov [6]

Abstract. On the example of a problem about Couette flow the method of calculation of macroparameters of gas in channels which thickness is commensurable with average length of free run of molecules of gas is offered. As the basic equation it is used the linearize BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) model of Boltzmann kinetic equation, and as a boundary condition on walls of the channel - the model of mirror- diffusion reflections. For various values of thickness of the channel and factor of accommodation of a tangential impulse of molecules of gas by the walls of the channel values of streams of weight of gas and heat falling unit of width of the channel are calculated. Comparison with the similar results published in an open press is lead.

Key Words: Boltzmann kinetic equation, the modelling kinetic equations, exact analytical decisions, models of boundary conditions

[4] Post graduate student, Northern Arctic federal university, Arkhangelsk; v.lukashev@narfu.ru.
[5] Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university, Arkhangelsk; popov.vasily@pomorsu.ru.
[6] Professor of Theoretical Rhysics Chair, Moscow state regional university, Moscow; yushkanov@inbox.ru.