УДК 519.862.7

Моделирование динамики кадров с использованием дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

© **В.А. Атряхин**[1], **П.А. Шаманаев**[2]

Аннотация. В работе описывается процесс формирования прогнозной оценки динамики кадров. В качестве математической модели используется система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Для отыскания оценок неизвестных параметров системы используется метод наименьших квадратов.

Ключевые слова: потребность в кадрах, система дифференциальных уравнений, отклоняющийся аргумент, метод наименьших квадратов, прогнозирование, интегро-интерполяционный метод.

1. Введение

В настоящей статье описывается математическая модель прогнозирования изменения численности работников заведений ВПО с помощью системы дифференциальных уравнений. В основу формирования модели положены механизмы, многие годы использующиеся для прогнозирования социодемографического поведения населения, например прогнозирования миграции городского населения [1]. Аналогичные подходы применяются для прогнозирования динамики экономических процессов [3].

Для построения прогноза совокупность работников старше 24 лет разобьем на 10 возрастных групп. Возрастной диапазон групп с первой по девятую будет составлять пять лет. Десятая группа будет включать всех работников старше 75 лет. Рассмотрим статистические данные о численности работников заведений ВПО для каждой из полученных групп. Не ограничивая общности, предположим, что количественный состав групп меняется только один раз в год. Определенное количество работников заведений ВПО будет увольняться, а какое-то количество новых кадров будет приходить на их место. Очевидно, что приток (или отток) работников заведений ВПО во многом зависит от социально-экономического состояния региона и условий труда в конкретном подразделении выбранного заведения ВПО для выбранной возрастной группы. Зачастую данные факторы остаются постоянными из года в год. А значит, влияние этих факторов может быть оценено по статистическим данным о притоке и оттоке работников заведений ВПО за некоторый отрезок времени, предшествующий прогнозируемому и количественному составу этой группы в данный момент времени.

[1] Аспирант кафедры прикладной математики,Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; atrvol@rambler.ru.

[2] Заведующий кафедрой прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

2. Построение математической модели

Очевидно, что никакое влияние в описываемой системе взаимосвязей не осуществляется мгновенно. Вся система в целом достаточно инертна и не может сразу реагировать на те, или иные импульсы. Рассмотрим отдельные связи. Во-первых, изменение численности работников заведений ВПО связанно с изменением численности работников заведений ВПО в некотором прошлом. Во-вторых, изменение численности работников заведений ВПО связанно с численностью работников заведений ВПО в данный момент времени.

Таким образом, изменение потока присоединяющихся к работникам заведений ВПО в данный момент ставится в зависимости от численности работников заведений ВПО в данный момент времени, интенсивности потока присоединяющихся к работникам заведений ВПО в некотором прошлом и интенсивности потока выбывающих из группы работников заведений ВПО в некотором прошлом. В итоге изменение потока присоединяющихся к работникам заведений ВПО в момент времени t описывается дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом следующего вида:

$$\dot{y}(t) = a'w(t) + b'y(t-h) + c'z(t-h), \tag{2.1}$$

где $w(t)$ - численность работников заведений ВПО в момент времени t; $y(t)$ - интенсивность потока присоединяющихся к группе работников заведений ВПО в момент времени t; $z(t)$ - интенсивность потока выбывающих из группы работников заведений ВПО в момент времени t.

Обратимся теперь к потоку покидающих группу работников заведений ВПО. Изменение потока выбывающих из группы работников заведений ВПО в данный момент ставится в зависимость от численности работников заведений ВПО в данный момент времени, интенсивности потока выбывающих из группы работников заведений ВПО в некотором прошлом и интенсивности потока присоединяющихся к группе работников заведений ВПО в некотором прошлом. Таким образом, изменение потока выбывающих из группы работников заведений ВПО в момент времени t описывается уравнением с отклоняющимся аргументом следующего вида:

$$\dot{z}(t) = a''w(t) + b''z(t-h) + c''y(t-h), \tag{2.2}$$

Балансовое уравнение, связывающее прирост и отток численности претендентов на поступление в аспирантуру с количеством людей в данной группе имеет вид:

$$\dot{w}(t) = y(t) - z(t), \tag{2.3}$$

Таким образом, математическая модель потока может быть сформулирована в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = a'w(t) + b'y(t-h) + c'z(t-h), \\ \dot{z}(t) = a''w(t) + b''z(t-h) + c''y(t-h), \\ \dot{w}(t) = y(t) - z(t), \end{cases} \tag{2.4}$$

все коэффициенты которой постоянны и не зависят от времени t.

3. Переход к разностной схеме

Чтобы экспериментально проверить правильность сформулированной модели, необходимо перейти от системы дифференциальных уравнений к некоторой вычислительной схеме, позволяющей оценить величины численности претендентов на поступление в аспирантуру и «миграционных» потоков в реальном масштабе времени с ориентацией на существующие методы учета. Заметим, что в системе (2.4) мы имели дело с «мгновенными» значениями численности работников заведений ВПО, потоков вливающихся в эту группу и выбывающих из нее. На практике же мы располагаем лишь данными годового учета. Поэтому нам необходимо перейти от системы (2.4) к системе, в которой фигурируют интегралы от соответствующих функций. Данный переход осуществим с помощью интегро-интерполяционного метода построения разностных схем [2].

Пусть длина отрезка времени $[t_0, T]$, за который можно получить информацию, равна $T - t_0 = N\delta$, где δ - шаг интегрирования. Предположим, что с точностью до некоторого $\varepsilon > 0$ коэффициенты системы (1) постоянны на каждом интервале $((i-1)\delta, i\delta), i = 1, 2, ..., N)$. Проинтегрировав систему (2.4) по интервалу $((i-1)\delta, i\delta)$ получим новую систему:

$$\begin{cases} \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} \dot{y}(\tau)d\tau = a' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau)d\tau + b' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau-\delta)d\tau + c' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau-\delta)d\tau, \\ \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} \dot{z}(\tau)d\tau = a'' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau)d\tau + b'' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau-\delta)d\tau + c'' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau-\delta)d\tau, \\ \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} \dot{w}(\tau)d\tau = \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau)d\tau - \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau)d\tau. \end{cases} \tag{3.1}$$

Поскольку практически значения величин Y, Z, w, R известны лишь в конечном числе точек отрезка $[t_0, T]$, то число δ удобно считать минимальным расстоянием между точками отрезка $[t_0, T]$, в которых и заданы значения этих величин.

Предположим далее, что функция $w(t)$ слабо меняется на интервале $((i-1)\delta, i\delta), i = 1, 2, ..., N)$ и что значения $w(t)$ известны нам лишь на границах этого интервала. Тогда правомерна замена $\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau)d\tau$ в системе (3.1) на выражение $[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]\delta/2, i = 1, 2, ..., N)$.

Аппроксимируем конечными разностями $[\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau)d\tau$ - $\int\limits_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} y(\tau)d\tau]/\delta$, $[\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau)d\tau$ - $\int\limits_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} z(\tau)d\tau]/\delta$ - соответствующие производные из (3.1). С учетом этих замечаний, получим следующую систему конечно-разностных уравнений:

$$
\begin{cases}
[\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau)d\tau - \int\limits_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} y(\tau)d\tau]/\delta = a'[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]\delta/2+ \\
\qquad\qquad +b' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau-\delta)d\tau + c' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau-\delta)d\tau + d', \\
[\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau)d\tau - \int\limits_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} z(\tau)d\tau]/\delta = a''[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]\delta/2+ \\
\qquad\qquad +b'' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau-\delta)d\tau + c'' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau-\delta)d\tau + d'', \\
[\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau)d\tau - \int\limits_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} w(\tau)d\tau]/\delta = \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau)d\tau - \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau)d\tau.
\end{cases}
\tag{3.2}
$$

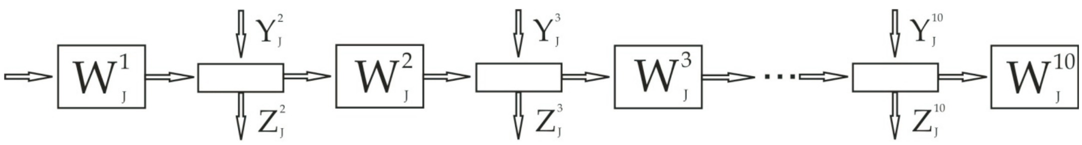
Предполагая, что переходы из одной возрастной группы в другую осуществляются в фиксированный момент времени, положим $\delta = 1$. Пренебрегая также погрешностями d', d'', получим следующую систему уравнений:

$$
\begin{cases}
\bar{y}_j^i = a_j^i[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]/2 + (b_j^i + 1)\bar{y}_{j-1}^i + c_j^i \bar{z}_{j-1}^i, \\
\bar{z}_j^i = k_j^i[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]/2 + (l_j^i + 1)\bar{z}_{j-1}^i + m_j^i \bar{y}_{j-1}^i, \\
\bar{w}_j^i = \bar{w}_j^{i-1} + \bar{y}_j^i - \bar{z}_j^i.
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

где $\bar{y}_j^i$ - количество людей j-ой возрастной группы, присоединяющихся к группе работников заведений ВПО в i-ом году, $\bar{z}_j^i$ - количество работников заведений ВПО j-ой возрастной группы, выбывающих из числа работников заведений ВПО в i-ом году, $\bar{w}_j^i$ - численность группы работников заведений ВПО j-ой возрастной группы в i-ом году.

4. Описание численного алгоритма для формирования прогнозной оценки потребности в кадрах

Рассмотрим алгоритм проведения вычислений по предложенной модели на примере десяти возрастных групп. Условно изменения, которые происходят в группе работников заведений ВПО J-ого года рождения (J-ого потока) представлены на рисунке 4.1.



Р и с у н о к **4.1**

Динамика потока работников заведений ВПО

Предположим, что у нас есть данные о количестве работников заведений ВПО 1-ой возрастной группы. По ним мы можем выяснить количество работников w_j^i. Кроме того нам известна вся статистическая информация по N потокам, предшествующим рассматриваемому J-ому потоку: $y_j^i, z_j^i, w_j^i, j = \overline{J-N, J}, i = \overline{2, 10}$. Цель вычислений – нахождение w_j^{10}. Переобозначив коэффициенты в системе (3.3), получим систему (4.1), которой будем пользоваться для вычислений:

$$
\begin{cases}
\bar{y}_j^i = a^i(\bar{w}_j^i + \bar{w}_j^{i-1})/2 + b^i \bar{y}_{j-1}^i + c^i \bar{z}_{j-1}^i, \\
\bar{z}_j^i = k^i(\bar{w}_j^i + \bar{w}_j^{i-1})/2 + l^i \bar{z}_{j-1}^i + m^i \bar{y}_{j-1}^i, \\
\bar{w}_j^i = \bar{w}_j^{i-1} + \bar{y}_j^i - \bar{z}_j^i.
\end{cases} \tag{4.1}
$$

Вычисления проводятся поэтапно для каждого i от 2 до 10. Коэффициенты $a^i, b^i, c^i, i = \overline{2,10}$ системы (4.1) находятся как решение системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$
A^{i^T} Y^i = A^{i^T} A^i X^i,
$$

где $i = \overline{2,10}$, $Y^i = \begin{pmatrix} y_2^i \\ \vdots \\ y_N^i \end{pmatrix}, A^i = \begin{pmatrix} \frac{\bar{w}_2^i + \bar{w}_2^{i-1}}{2} & \bar{y}_1^i & \bar{z}_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\bar{w}_N^i + \bar{w}_N^{i-1}}{2} & \bar{y}_{N-1}^i & \bar{z}_{N-1}^i \end{pmatrix}, X^i = \begin{pmatrix} a^i \\ b^i \\ c^i \end{pmatrix}$.

А коэффициенты $k^i, l^i, m^i, i = \overline{2,10}$ системы (4.1) находятся как решение системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$
B^{i^T} Z^i = B^{i^T} B^i F^i,
$$

где $i = \overline{2,10}$, $Z^i = \begin{pmatrix} z_2^i \\ \vdots \\ z_N^i \end{pmatrix}, B^i = \begin{pmatrix} \frac{\bar{w}_2^i + \bar{w}_2^{i-1}}{2} & \bar{z}_1^i & \bar{y}_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\bar{w}_N^i + \bar{w}_N^{i-1}}{2} & \bar{z}_{N-1}^i & \bar{y}_{N-1}^i \end{pmatrix}, Z^i = \begin{pmatrix} k^i \\ l^i \\ m^i \end{pmatrix}$.

После нахождения коэффициентов $a_j^i, b_j^i, c_j^i, k_j^i, l_j^i, m_j^i$ прогнозные значения w_{N+1}^i вычисляются по итерационной формуле:

$$
\bar{w}_j^i = \frac{(1 + a_j^i/2 - k_j^i/2)\bar{w}_j^{i-1} + (b_j^i - m_j^i)\bar{y}_{j-1}^i + (c_j^i - l_j^i)\bar{z}_{j-1}^i}{1 + k_j^i/2 - a_j^i/2}
$$

Вычисления продолжаются до тех пор, пока не будет найдено w_{10}^i.

Таким образом, построенная математическая модель позволяет прогнозировать изменение численности работников заведений ВПО на основе статистических данных о численности работников заведений ВПО в разрезе возрастных групп за несколько лет, предшествующих прогнозируемому отрезку времени.

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2010-2013 гг.» Государственный контракт № 14.740.11.0225.

Список литературы

1. Бородкин Ф. М., Соболева С. В., “Прогнозирование численности населения и миграции системой дифференциальных уравнений”, *Математические методы в социологии*, 1974, 99-145.

2. Годунов С. К., Рябенький В. С., *Разностные схемы*, Наука, М., 1973, 272 с.

3. Прасолов А. В., *Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии*, Издательство «Лань», СПб., 2010, 192 с.

Modeling the dynamics of personnel with the use of differential equations with deviating argument

© V.A. Atryahin[3], P.A. Shamanaev[4]

Abstract. This article describes the process formation of the prospective evaluation of staffing needs. In as a mathematical model uses a system differential equations with deviating argument. To find the estimates of unknown system parameters using the method of least squares.

Key Words: the need for personnel, a system of differential equations, deviating argument, the method least-squares prediction, the integro-interpolation method.

[3] Postgraduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; atrvol@rambler.ru.

[4] Chief of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.