УДК 517.929

Применение операции сдвига

© **С.В. Зубов**[1]

Аннотация. В этой статье предложен способ применения МПП в случае, когда при его использовании встречается многочлен, у которого коэффициент при первой степени аргумента равен нулю.

Ключевые слова: коэффициент, операция сдвига, корень, степень четная и нечетная, правая и левая полуплоскости.

1. Введение

Необходимость исследования робастной устойчивости в системах управления диктуется, во-первых, современными потребностями науки и техники и ее приложениями в практических задачах, связанных с конструированием и моделированием процессов управления в технике, экономике, биологии и т.д., а во-вторых, наличием большого числа нерешенных задач, прямо связанных с инженерной практикой. Фактически, результаты, полученные в теории робастной устойчивости, позволяют обеспечивать динамическую безопасность управляемых систем на этапе их конструирования и эксплуатации.

2. Использование операции сдвига

Пусть задан многочлен $F(z)$ степени n с действительными коэффициентами, не имеющий нулевых корней, к которому метод понижения порядка (МПП) не применим

$$F(z) = a_0 + a_2 z^2 + \ldots + a_{2p+1} z^{2p+1} + \ldots + a_n z^n, \tag{2.1}$$

т.е. для общности положим, что не только $a_1 = 0$, но и

$$a_3 = \ldots = a_{2p-1} = 0, \quad a_{2p+1} \neq 0,\, p \geq 1.$$

Перепишем этот многочлен в виде

$$F(z) = g(z) + z^{2p} h(z), \tag{2.2}$$

$$g(z) = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \ldots, \quad h(z) = a_{2p+1} z + a_{2p+3} z^3 + a_{2p+5} z^5 + \ldots$$

Определение 2.1. *Операцией сдвига будем называть операцию, преобразующую многочлен* (2.2) *в многочлен вида*

$$f(z) = g(z) + (-1)^p h(z). \tag{2.3}$$

Определение 2.2. *Кососимметричными корнями многочлена $F(z)$ мы будем называть корни этого многочлена z_j, для которых выполняются равенства $F(z_j) = F(-z_j) = 0$. Нетрудно видеть, что кососимметричными корнями являются, в частности, все чисто мнимые корни.*

[1] Доцент, СПбГУ факультет ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru

Справедливы следующие две теоремы.

Т е о р е м а 2.1. *Операция сдвига оставляет множество кососимметричных корней произвольного многочлена без изменений, т. е. кососимметричные корни многочлена* (2.2) *совпадают с кососимметричными корнями многочлена* (2.3) *и обратно. Если операция сдвига применена к многочлену, не имеющему нулевых корней, то получится многочлен, также не имеющий нулевых корней.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что все кососимметричные корни многочлена (2.3) являются общими корнями многочленов $g(z)$ и $z^{2p}h(z)$ и наоборот. Так как общие корни многочленов $g(z)$ и $(-1)^p h(z)$ совпадают с общими корнями многочленов $g(z)$ и $z^{2p}h(z)$, то кососимметричные корни многочлена (2.3) являются кососимметричными корнями многочлена (2.2) и обратно. Это вытекает из того, что все кососимметричные корни многочлена (2.3) являются общими корнями многочленов $g(z)$ и $(-1)^p h(z)$ и наоборот [1].

Доказательство второй части теоремы вытекает из того, что свободный член исходного многочлена при операции сдвига остается без изменений.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Свойства операции сдвига

Т е о р е м а 3.1. *Для многочленов с действительными коэффициентами, не имеющих нулевых корней, операция сдвига обладает следующими свойствами:*

1) если операцию сдвига (ОС) применить к многочлену (2.2) *с действительными коэффициентами четной степени, то получившийся многочлен* (2.3) *с действительными коэффициентами имеет такое же число корней, лежащих в правой (левой) полуплоскости, что и исходный многочлен;*

2) если в результате применения операции сдвига (ОС) к многочлену (2.2) *с действительными коэффициентами нечетной степени* n_F *получится многочлен* (2.3) *с действительными коэффициентами также нечетной степени* n_f, *то у получившегося многочлена число корней, лежащих в левой (правой) полуплоскости, по сравнению с исходным многочленом* (2.2) *уменьшается на одну и ту же величину* $(n_F - n_f)/2$;

3) если в результате применения опреации сдвига (ОС) к многочлену (2.2) *с действительными коэффициентами нечетной степени* n_F *получился многочлен* (2.3) *с действительными коэффициентами четной степени* n_f, *то число корней этого многочлена, лежащих в правой полуплоскости* m_f, *зависит от знаков коэффициентов при старших членах в многочленах* (2.2), (2.3) *и величины сдвига* p *следующим образом:*

$$m_f = m_F - (n_F - n_f - 1)/2$$

при

$$sign(-1)^{p+(n_F-1)/2} a_{n_F} = sign(-1)^{n_f/2} a_{n_f};$$

$$m_f = m_F - (n_F - n_f + 1)/2$$

при

$$sign(-1)^{p+(n_F-1)/2} a_{n_F} \neq sign(-1)^{n_f/2} a_{n_f},$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если многочлен $F(z)$ имеет кососимметричные корни, в том числе и чисто мнимые, то его можно написать в виде

$$F(z) = r(z)F_0(z) = r(z)(g_0(z) + z^{2p}h_0(z)),$$

где $r(z)$ - многочлен, содержащий все кососимметричные корни многочлена $F(z)$, в том числе и чисто мнимые, а многочлен $F_0(z)$ не содержит таких корней. Если применить к этому многочлену ОС, то получим многочлен [2]

$$f(z) = r(z)f_0(z) = r(z)(g_0(z) + (-1)^p h_0(z)).$$

Таким образом, результат применения операции сдвига (ОС) к многочлену $F(z)$ не изменится, если операцию сдвига (ОС) применить вначале к многочлену $F_0(z)$, не имеющих чисто мнимых корней, а затем умножить результат на многочлен $r(z)$. Отсюда вытекает, что изменение числа корней многочлена $F(z)$, лежащих в левой (правой) полуплоскости в результате применения операции сдвига (ОС), не зависит от того, есть ли у многочлена $F(z)$ чисто мнимые корни. Поэтому далее будем считать, что у многочлена $F(z)$ нет чисто мнимых корней для того, чтобы можно было использовать критерий Михайлова [3].

Дальнйшее доказательство теоремы основано на анализе поведения годографов Михайлова многочленов (2.2) и (2.3) в зависимости от значения и кратности величины p

$$F(i\omega) = \bar{g}(\omega) + i(-1)^p\omega^{2p}\bar{h}(\omega), \quad f(i\omega) = \bar{g}(\omega) + i(-1)^p\bar{h}(\omega),$$

$$\bar{g}(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + \ldots + (-1)^k a_{2k}\omega^{2k} + \ldots, \tag{3.1}$$

$$\bar{h}(\omega) = a_{2p+1}\omega - a_{2p+3}\omega^3 + \ldots + (-1)^k a_{2(p+k)+1}\omega^{2k+1} + \ldots.$$

Пусть $0 = \omega_1 < \ldots < \omega_s$ - вещественные корни многочленов $\bar{g}(\omega)$ и $(-1)^p\bar{h}(\omega)$, заданные в порядке их возрастания. Очевидно, что эти корни совпадают с корнями многочленов $\bar{g}(\omega)$ и $(-1)^p\omega^{2p}\bar{h}(\omega)$ и обратно.

Отсюда вытекает, что приращение аргументов годографов Михайлова этих многочленов при изменении ω от 0 до $+\infty$ отличается лишь на участке от ω_s до $+\infty$. Путем анализа этого приращения и использования метода понижения порядка (МПП) легко установить справедливость всех утверждений теоремы [4].
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 3.1. *Очевидно, что в результате многократного применения метода понижения порядка (МПП) и, если это необходимо, операции сдвига (ОС) к произвольному многочлену, не имеющему нулевых корней, будет получен остаток - порождающий многочлен первой степени или, многочлен, имеющий только кососимметричные корни. В первом случае задача исследования будет решена, т. к., опираясь на свойства метода понижения порядка (МПП) и операции сдвига (ОС), можно легко вычислить число корней исходного многочлена, лежащих в левой (правой) полуплоскости, опираясь на свойства метода понижения порядка (МПП) и операции сдвига (ОС) (теоремы 1, 2). Во втором случае, полученный в качестве остатка многочлен может содержать не только чисто мнимые, но и другие кососимметричные корни (действительные или комплексные), тогда необходимо продолжить исследование положения корней этого многочлена относительно мнимой оси.*

Список литературы

1. Л. Д. Блистанова, Г. А. Зеленков, Н. В. Зубов, В. И. Косюг, “Непрерывная стабилизация в системе с постоянным запаздыванием”, *Сборник трудов международной конференции «Устойчивость и процессы управления»*, **Т.1**, НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2005, 335-338.

2. Зубов И.В., *Методы анализа динамики управляемых систем*, Физматлит, М, 2003, 224 с.

3. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, *Динамическая безопасность управляемых систем*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2009, 172 с.

4. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, Н. И. Зубов, *Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления*, Монография, Мобильность плюс, СПб, 2010, 319 с.

The application of operation displacement

© **S.V. Zubov**[2]

Abstract. In this article is supposes way of application method of low to order in case, when by his using is meet polynom, by that coefficient by first degree of argument equality zero.
Key Words: coefficient, operation of displacement, root, degree even and noeven, right and left semi-plane.

[2] Lecture, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petesburg; a_v_zubov@mail.ru