УДК 517.929

# Другой подход поиска решений системы линейных алгебраических уравнений

© С.А. Стрекопытов[1], И.С. Стрекопытов[2], И.С. Виташевская[3]

**Аннотация.** В данной статье рассмотрен другой подход поиска решений и псевдорешений системы линейных алгебраических уравнений. Этот метод основан на построении системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которое имеет единственное асимптотическое устойчивое положение равновесия, являющееся решением или псевдорешением исходной системы линейных алгебраических уравнений.

**Ключевые слова:** вектор, матричное тождество, собственное число, ранг матрицы.

## 1. Введение

Решение системы (2.1) можно искать методом Гаусса или иным методом. В статье предложен другой подход поиска решений и псевдорешений системы линейных алгебраических уравнений, основанный на построении системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которое имеет единственное асимптотически устойчивое положение равновесия, являющееся решением или псевдорешением исходной системы линейных алгебраических уравнений [1].

## 2. Метод решения системы линейных алгебраических уравнений

Остановимся на методе решения прямоугольной системы линейных алгебраических уравнений (2.1)

$$AX = B, \tag{2.1}$$

где матрица $A$ размера $n \times m$ $(m \leq n)$ и вектор $B$ размера $n \times 1$, являются вещественными и постоянными [5].

Нетрудно видеть, что если ранг матрицы $A$ равен $m$, то матрица $A^T A$ является положительно определенной. Это вытекает из очевидных соотношений:

$$\forall X \neq 0 \quad AX = C \neq 0 \Rightarrow C^T C = X^T A^T AX = \|C\|^2 > 0 \Rightarrow A^T A > 0.$$

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, где матрица $A$ размера $n \times m$, $n \geq m$ имеет ранг равный $m$ [6],

$$\dot{X} = -A^T AX + A^T B. \tag{2.2}$$

Справедлива теорема.

**Теорема 2.1.** *Положение равновесия системы* (2.2) *является решением системы* (2.1) *или ее псевдорешением.*

[1] Доцент, к.ф.-м.н., СПбГУ факультет ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.
[2] Аспирант, СПбГУ факультет ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.
[3] Преподаватель, СПбГУ факультет ПМ-ПУ, г.Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как матрица $-A^T A$ - отрицательно определенная, то любое решение этого уравнения асимптотически стремится к положению равновесия этой системы $X = C$, которое удовлетворяет соотношению:

$$-A^T AC + A^T B = 0 \quad \text{или} \quad C = (A^T A)^{-1} A^T B. \tag{2.3}$$

Отсюда вытекает, что если $AC = B$, то решение уравнения (2.1) получено [1].

Допустим теперь, что $AC \neq B$. Представим вектор $B$ в виде разложения по подпространствам, одно из которых $L_1$, является линейной оболочкой натянутой на столбцы матрицы $A$, а второе $L_2$, является ортогональным дополнением первого, т.е. $B = B_1 + B_2$, $B_1 \in L_1$, $B_2 \in L_2$, $L_1 \perp L_2$. Тогда уравнение (2.3) примет вид:

$$-A^T AC + A^T (B_1 + B_2) = -A^T AC + A^T B_1 = 0$$

или

$$C = (A^T A)^{-1} A^T B_1 = (A^T A)^{-1} A^T B. \tag{2.4}$$

Покажем, что найденная величина $C$, является псевдорешением уравнения (2.1), т.е. имеет место неравенство [2]

$$\|AC - B\| < \|AX - B\|, \quad X \neq C,$$

где $\| \, \|$ - евклидова норма. Это будет означать, что квадратичное отклонение $\|AX - B\|$ при $X = C$ принимает наименьшее значение [3].

Введем обозначения:

$$U = B - AC, \quad V = AC - AX, \quad U + V = B - AX,$$

тогда,

$$\|U + V\|^2 = U^T V + V^T U + \|U\|^2 + \|V\|^2$$

$$V^T U = U^T V = (C - X)^T A^T (B - AC) = (C - X)^T (A^T B - A^T AC) = 0.$$

Отсюда вытекает равенство:

$$\|B - AX\|^2 = \|B - AC\|^2 + \|A(X - C)\|^2.$$

Очевидно, что при $X = C$ величина $\|B - AX\|$ имеет наименьшее значение, т. е. вектор $C = (A^T A)^{-1} A^T B$ является псевдорешением.

Для того чтобы избежать вычисления величины $C = (A^T A^{-1}) A^T B$ достаточно найти стационарную точку уравнения (2.1) произвольным численным методом, к примеру, методом Эйлера

$$X_{k+1} = (E - hA^T A) X_k + hA^T B, \tag{2.5}$$

где $h < \|A^T A\|$. Этот метод поиска решения (псевдорешения) уравнения (2.1) свободен от ошибок округления и имеет точность в пределах точности представления чисел в компьютере. Для того, чтобы в этом убедиться можно ввести обозначение $\alpha = \|E - hA^T A\| < 1$, тогда справедливы стандартные оценки [4]

$$\|X_k - C\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|X_{k+1} - X_k\|$$

$$\|X_{k+1} - X_k\| \leq \alpha^k \|X_1 - X_0\|, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Для систем большого порядка итерационный процесс (2.5) будет занимать меньшее количество операций, чем обращение матрицы $A^T A$ методом Гаусса и вычисление величины $(A^T A)^{-1} A^T B$.

Отметим еще раз, что метод нахождения решения (псевдорешения) уравнения (2.1) с помощью численного решения системы дифференциальных уравнений (2.2) не дает ошибок округления, а полученный результат лежит в пределах точности компьютера. Использование численных методов большего порядка (Рунге-Кутта и т.д.) не является необходимым, т.к. они используются при построении решений (траекторий) дифференциальных уравнений, чтобы минимизировать суммарные ошибки округления [2].

**Теорема 2.2.** *Если для первого из чисел* $k = \overline{0, n}$ *система линейных алгебраических уравнений* (2.1) *имеет решение, то минимальный многочлен матрицы* $A$ *имеет вид:*

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1} - c_k \lambda^k - c_{k-1} \lambda^{k-1} - \ldots - c_1 \lambda - c_0 = 0. \tag{2.6}$$

*Справедливо и обратное утверждение о том, что коэффициенты минимального многочлена* (2.6) $C = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T$, *являются решениями системы линейных алгебраических уравнений* (2.1) [3].

Доказательство. Разрешимость уравнения (2.1) означает разрешимость матричного тождества

$$A^{k+1} = c_k A^k + c_{k-1} A^{k-1} + \ldots + c_1 A + c_0 E. \tag{2.7}$$

Так как $k$ является минимальным из чисел $\overline{0, n}$, то многочлен (2.6), является минимальным многочленом [4].

С другой стороны, если многочлен (2.6), является минимальным многочленом, то справедливо матричное тождество (2.7), которое эквивалентно разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (2.1).
Доказательство закончено.

**Замечание 2.1.** *Итак, методика построения минимального многочлена заключается в поиске решения* $C = (c_k, c_{k-1}, \ldots, c_0)^T$ *системы линейных алгебраических уравнений* (2.1) *для наименьшего целого числа* $k, k = \overline{1, n}$. *При этом величины* $-c_k, -c_{k-1}, \ldots, -c_0$ *будут коэффициентами минимального многочлена* (2.6). *Заметим, что в силу теоремы Кели-Гамильтона матричное уравнение* (2.7) *всегда имеет решение.*

**Замечание 2.2.** *Если решение уравнения* (2.1) *при наименьшем из чисел* $k = \overline{0, n}$ *удовлетворяет условию* $c_0 = 0$, *то матрица* $A$ *- вырожденная. Более того, если в этом решении* $p$ *первых компонент нулевые* $c_0 = c_1 = \ldots = c_{p-1} = 0$, *то кратность нулевого собственного числа матрицы* $A$ *не меньше чем* $p$.

**Замечание 2.3.** *Если матрицы* $A^k, A^{k-1}, \ldots, A, A^0$, $A^0 = E$ *линейно независимы, а матрицы* $A^{k+1}, A^k, A^{k-1}, \ldots, A, E$ *линейно зависимы, то матрица* $B_k^T B_k$ *является положительно определенной, а матрица* $B_{k+1}^T B_{k+1}$ *неотрицательной и имеет одно собственное число равное нулю. Как известно* [3], *для прямоугольной матрицы* $A$

*размера $n \times m$ ранг $r$ сингулярной матрицы $A^T A$ совпадает с рангом матрицы $A$, а её сингулярные числа $\rho_i$ неотрицательные. Причем, если, например, $m \leq n$, то число нулевых $\rho_i$ равно $m - r$. Таким образом, чтобы найти коэффициенты минимального многочлена не обязательно искать решения системы* (2.1) *при* $k = 0, 1, 2, \ldots,$ *а достаточно проверить при каком числе $k$ матрица $B_{k+1}^T B_{k+1}$ становится неотрицательной (при меньших величинах $k$ эта матрица является положительно определенной)* [5]. *Это сильно сократит число вычислений и для получения коэффициентов минимального многочлена необходимо найти решение только одной системы линейных алгебраических уравнений* (2.1) *именно для этого числа $k$.*

## Список литературы


1. Л. Д. Блистанова, Г. А.Зеленков, И. В.Зубов, Н. В.Зубов., *Проблемы устойчивости матриц и вычислительных алгоритмов*, Уч. пособие, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2007, 150 с.

2. О. В.Мутлу, *Основы управления движением (Исследование равномерной устойчивости по Ляпунову)*, Уч. пос., СПб, 2007, 92 с.

3. М. В.Стрекопытова, *Исследование равновесных движений*, СПбГУ, СПб, 2007, 95 с.

4. А. В.Зубов, Н. В.Зубов., *Динамическая безопасность управляемых систем*, Монография, НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2009, 172 с.

5. А. В.Зубов, Н. В.Зубов, Н. И.Зубов., *Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления*, Монография, Мобильность плюс, СПб, 2010, 319 с.

6. И. В.Зубов, *Методы анализа динамики управляемых систем*, Физматлит, М, 2003, 224 с.


# Another approach of research solutions systems linear algebraic equations

**© S.A. Strecopitov[4], I.S. Strecopitov[5], I.S. Vitashevskay[6]**

**Abstract.** In giving article is looks another approach of research solutions systems linear algebraic equations and pseudo solutions of systems linear algebraic equations. This method is bases on building system ordinary differential equations, that is have single asymptotic stability situation equally weight, is appears solution or pseudo solution initial system linear algebraic equations.
**Key Words:** vector, matrix identity, own number, rank of matrix.

[4] Lecture, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru
[5] Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru
[6] Teacher, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru