УДК 519.85

Проекционный двухшаговый МПМ и численное решение задачи оптимального управления

© **В.Г. Малинов** [1]

Аннотация. В статье рассматривается проекционный обобщённый двухшаговый метод переменной метрики (ПОДМПМ) для решения задач минимизации в евклидовом пространстве E^n в случае функций с овражными вытянутыми поверхностями уровней. Получена оценка скорости сходимости метода в случае выпуклых функций. Приведён пример численного решения тестовой задачи оптимального управления вертикальным подъёмом ракеты сведением к нелинейной оптимизации; имеются некоторые результаты сравнительных вычислительных экспериментов на этой тест задаче ПОДМПМ и других проекционных методов минимизации.

Ключевые слова: минимизация на простом множестве, проекционный обобщённый двухшаговый двухэтапный метод переменной метрики, скорость сходимости, дифференциальные уравнения движения, задача оптимального управления, оптимизация.

1. Введение

Рассмотрим задачу оптимального управления (ЗОУ)

$$\frac{d\mathbf{z}}{dt} = F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),\ 0 \le t \le T,\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^1, \tag{1.1}$$

где $g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = 0$, $\varphi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \le 0$ — ограничения задачи, фазовый вектор $\mathbf{x}(t) \in E^q$, вектор управления $\mathbf{u}(t) \in E^r$. Численное решение ЗОУ связано с преодолением ряда проблем: учёта ограничений на фазовые координаты и управления; удовлетворения заданным конечным условиям; овражности гиперповерхностей уровня вспомогательной функции, минимизируемой для решения задачи (1) [1], [2]. Первую из них можно решить удачным подбором вспомогательной функции, а успешное решение второй и третьей существенно зависит от применяемого метода оптимизации. Поэтому наша основная цель — исследование метода оптимизации.

Методом редукции ЗОУ (1.1) к нелинейной задаче оптимизации перейдём к "дискретной"ЗОУ [1]. Разобьём отрезок $[0;T]$ на $m-1$ частей с малым шагом $h_i = \delta t_i = t_{i+1} - t_i$ и с помощью метода решения системы ОДУ построим сетку $x_i = x(t_i)$, $u_i = u(t_i)$, $i \in [1:m]$, $t_i = \sum_{j=1}^{j=m-1} h_j$, $F(\mathbf{z}_i) = F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, t_i)$. Полный фазовый вектор $\mathbf{x} \in E^{mr}$, полный вектор управлений $\mathbf{u} \in E^{ms}$, $ms = n$. Получим конечномерную задачу минимизации на выпуклом замкнутом множестве Q

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset E^n, \tag{1.2}$$

где n-мерное евклидово пространство E^n нормировано, $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2}\ \forall \mathbf{x} \in E^n$, выпуклая функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$. Предполагаем, что функция $f(\mathbf{x})$ есть вспомогательная функция, учитывающая функциональные ограничения задачи (1.1) в методе штрафных функций (МШФ), а множество Q образовано координатными ограничениями, гиперповерхности уровней функции $f(\mathbf{x})$ овражной структуры и

$$\inf f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty, \quad \mathbf{x} \in Q; \quad Q_* = \{\mathbf{x} \in Q:\ f(\mathbf{x}) = f_*\} \ne \emptyset. \tag{1.3}$$

[1] Доцент кафедры ЭММиИТ, Ульяновский госуниверситет, г. Ульяновск; vgmalinov@mail.ru.

В работах [3], [4] для решения задач вида (1.2), (1.3) были предложены проекционные двухэтапные двухшаговые методы (ПОДМ) переменной метрики, ориентированные на решение задач минимизации (функций с овражными гиперповерхностями уровней), соответствующих приложениям методов к ЗОУ движением ракет и самолётов. Целью данной работы является апробация методов решения задачи (1.2), (1.3) на ЗОУ вида (1.1) и оценка скорости ходимости нового метода.

2. Методы оптимизации

В работах [3], [4] рассматривались две модификации ПОДМ переменной метрики. Первая из двух

$$\text{1 этап. } \mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1};\ \mathbf{z}^k = P_Q\left(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k\right);\ \mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0 \in E^n$$

$$\text{2 этап. } \quad \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{z}^k - \beta_k \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)\nabla f(\mathbf{z}^k)\right], k = 0, 1, 2, ... \tag{2.1}$$

её далее будем обозначать ПОДМПМ1, и вторая модификация — ПОДМПМ2

$$\text{1 этап.} \mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}; \quad \mathbf{z}^k = P_Q\left(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k / \|\mathbf{y}^k\|\right);\ \mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0 \in E^n$$

$$\text{2 этап. } \quad \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{z}^k - \beta_k \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)\nabla f(\mathbf{z}^k)/\|\nabla f(\mathbf{z}^k)\|\right], k = 0, 1, 2, ... \tag{2.2}$$

где $P_Q(\mathbf{v})$ – проекция вектора $\mathbf{v}$ на множество Q; α_k, β_k, γ_k , – параметры методов; $\mathbf{B}(\mathbf{z}^k) = \mathbf{B}_k$ – последовательность (желательно) диагональных матриц, изменяющих метрику пространства в каждой точке $\mathbf{z}^k$. Используются реализации методов с одномерной минимизацией для вычисления параметра длины шага $\beta_k = argmin_{\beta>0} f\left(\mathbf{z}^k - \beta \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)\nabla f(\mathbf{z}^k)\right)$ — для метода (2.1), $\gamma_k = argmin_{\gamma>0} f\left(\mathbf{z}^k - \gamma \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)\nabla f(\mathbf{z}^k)/\|\nabla f(\mathbf{z}^k)\|\right)$ — для метода (2.2).

В работе [3] наряду с существующей метрикой в E^n введена новая метрика с помощью нового скалярного произведения $(\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u})\quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{x} \in E^n$ и получено евклидово пространство с двумя скалярными произведениями и определяемыми ими метриками, обозначенное E_1^n. Далее и здесь подразумеваем задачу вида (2.1) в нём. В E_1^n о сходимости метода (2.1) с параметрами константами $\alpha_k = \alpha$, $\beta_k = \beta$ доказана [3]

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия: 1) множество $Q \in E_1^n$ выпукло и замкнуто; 2) функция $f(\mathbf{x})$ выпуклая и выполнены соотношения (1.3); 3) оператор $\mathbf{B}(\mathbf{x})\ \forall\ \mathbf{x} \in E_1^n$ таков, что выполнено неравенство*

$$m\|\mathbf{u}\|^2 \le (\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}),\ 0 < m,\ \mathbf{u}, \mathbf{x} \in E_1^n;$$

4) существует выпуклая функция $varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ такая, что имеет место равенство $\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})\ \forall \mathbf{x} \in E_1^n$; 5) параметры константы метода (2.1) таковы, что:

$$0 < \alpha < 1/\sqrt{5},\ 0 < \beta < (4 - 10\alpha - 5\alpha^3)/(2L - 10L\alpha^2). \tag{2.3}$$

Тогда последовательность $\left\{\mathbf{x}^k\right\}$, определяемая методом (2.1), (2.3), из любой начальной точки $\mathbf{x}^0 \in E_1^n$ сходится к точке $\mathbf{x}^* \in Q_*$,

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \longrightarrow 0, \quad f(\mathbf{x}^k) \longrightarrow f(\mathbf{x}^*), \quad k \to \infty.$$

Следствие. *Из теоремы 1 следует выполнение неравенств*

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \le \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \le \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\| \le \cdots \le \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|,$$
$$\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k\| \ge \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| \ge \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^{k+2}\| \ge \cdots .$$

3. Оценка скорости сходимости метода (2.1) для выпуклых функций

Получим оценку скорости сходимости ПОДМПМ (2.1) без традиционного для методов проекции градиентов предположения о сильной выпуклости функции $f(\mathbf{x})$. При этом появляется необременительное дополнительное ограничение. Сначала в леммах получим используемые при этом неравенства, полезные для обоснования методов класса ПОДМ.

Лемма 1. *В евклидовом пространстве E_1^n имеет место неравенство*

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2 \geq (1-\varepsilon)\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + (1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2, \varepsilon > 0,\ \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in E_1^n. \tag{3.1}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся известным равенством

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{v}-\mathbf{w}) + \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2\ \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in E_1^n. \tag{3.2}$$

запишем его в форме

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 - 2(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{w}-\mathbf{v}) + \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in E_1^n. \tag{3.3}$$

и второе слагаемое в его правой части оценим с помощью неравенств Коши-Буняковского и $2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1}b^2, \quad a,b,\varepsilon > 0$, из которого следует неравенство

$$2|(\mathbf{u}-\mathbf{v},\mathbf{w}-\mathbf{v})| \leq \varepsilon\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 + +\varepsilon^{-1})\|\mathbf{w}-\mathbf{v}\|^2,\ \varepsilon > 0. \tag{3.4}$$

Пользуясь (3.4) в (3.3), получим, $\|\mathbf{u}-\mathbf{w}\|^2 \geq \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 - \varepsilon\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 - \varepsilon^{-1}\|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v}-\mathbf{w}\|^2$. Отсюда следует (3.1).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть множество точек минимума задачи (1.2), (1.3) $Q_* \neq \emptyset$.*

Тогда для точек последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ методов класса ПОДМ в E_1^n имеет место неравенство

$$\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2 \geq (\varepsilon-1)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2 - (1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2, \tag{3.5}$$

границы числа $\varepsilon > 0$ следующие: $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2} = \left((s \mp (s-4l_2l_3)^{1/2}\right)/(2l_2)$, где $s = l_1 + l_2 + l_3$, $l_1 = \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2$, $l_2 = \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2$, $l_3 = \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку E_1^n метрическое пространство с метрикой $\rho(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|\ \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v} \in E_1^n$, в нём имеет место неравенство ([6], с. 31)

$$|\rho(\mathbf{u},\mathbf{x}) - \rho(\mathbf{v},\mathbf{y})| \leq \rho(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) \forall\, \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x},\mathbf{y} \in E^n. \tag{3.6}$$

Отсюда при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x} = \mathbf{x}^*, \mathbf{v} = \mathbf{x}^k, \mathbf{y} = \mathbf{x}^*$, с помощью формулы для метрики получим неравенство $|\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\| - \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|| \leq \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\| + \|\mathbf{x}^*-\mathbf{x}^*\|$. Возведём его в квадрат, под знаком модуля раскроем квадрат разности,

$$|\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2 - 2\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2| \leq \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2,$$

и удвоенное произведение под знаком модуля оценим с помощью известного неравенства (3.4). Тогда придём к неравенству

$$|\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2 - \varepsilon|\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2 - -\varepsilon^{-1}\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2 + \ + \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2| \leq \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2.$$

Развернём модуль и представим в форме двойного неравенства

$$-\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2 \le (1-\varepsilon)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2-(1-\varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2 \le \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2. \qquad (3.7)$$

.Возьмём левую часть этого неравенства и, умножив на -1, придём к неравенству (3.5). Решив неравенство $l_2\varepsilon^2 - s\varepsilon + l_3 \le 0$, следующее из (3.5), получим множество допустимых для (3.5) значений числа $\varepsilon > 0$. Заметим, что правое неравенство (3.7) совпадает с неравенством (3.1).

Лемма 2 доказана.

Примечание 1. Верхняя и нижняя границы числа ε в (3.5) зависят от соотношения длин сторон треугольника с вершинами $\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^*$ (случай их расположения на одной прямой не исключается). Зададим дополнительные ограничения, при которых обеспечиваются конкретные значения ε, используемые в доказательстве теорем. Например, не обременительны условия: а) $\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\| \le \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\| \le \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|$;

$$\text{б)}(21/10)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\| \le \|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\| \le \|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|. \qquad (3.8)$$

В случае а) для вычисления границ ε решаем неравенство $l_2\varepsilon^2 - s\varepsilon + l_3 \le 0$, следующее из (3.5), но с учётом неравенства (3.8а), полагая $l_1 = l_2 = l_3$. Получаем значения $\varepsilon_{1,2} = (3 \mp 5^{1/2})/2$, то есть округлённо можно принять значения из интервала $0.39 \le \varepsilon \le 2.6$. В случае б) решаем неравенство аналогично, положив $(21/10)^2 l_2 = l_1 = l_3$; получаем границы $\varepsilon_{1,2} = (491 \mp 19698^{1/2})/100$; тогда приближённый интервал возможных значений $0.47 \le \varepsilon \le 9.3$ достаточен для применения (3.5) в данной работе.

Примечание 2. Неравенство (3.1) объединяет разрозненные процедуры оценки квадрата нормы разности векторов в E^n. Неравенство (3.5) новое, выведено для обоснования методов класса ПОДМ, — необходимый математический инструмент при оценке скорости сходимости многошаговых методов минимизации. Появление дополнительных ограничений неравенств при его применении здесь не представляется слишком обременительным. Случай неравенства (3.6) для трёх точек известен как второе неравенство треугольника для метрики ([9], с. 27)

$$|\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})-\rho(\mathbf{y},\mathbf{z})| \le \rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) \;\forall\, \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z} \in X \qquad (3.9)$$

в метрическом пространстве (X, ρ).

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, выполнены неравенства (3.8б), параметры метода (2.1), (2.3) таковы, что*

$$0 < \alpha < 1/6,\; 0 < \beta < \min[\beta^{31}; \beta^{32}], \qquad (3.10)$$

где $\beta^{31} = (6-35\alpha)/(2L-20L\alpha^2),\; \beta^{32} = (8-10\alpha)/(13L)$.

Тогда последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$, *определяемая методом (2.1), (2.3), (3.10), (3.8), со скоростью геометрической прогрессии сходится к решению задачи (1.2) и*

$$\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\| \le q^k\|\mathbf{x}^0-\mathbf{x}^*\|, \qquad (3.11)$$

где $q = [(6+10\alpha/3-L\beta)/(13-8L\beta)$, $0 < q^2 < 2/3$ *при условиях (3.10).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала заметим, что в условиях данной теоремы все рассуждения и выкладки теоремы 1 верны и, в частности, неравенство (см. [3])

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^*\|^2 + a\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^k\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}^{k-1}-\mathbf{x}^*\|^2 \le \\ \le b\|\mathbf{y}^k\|^2 + (1+\alpha)\|\mathbf{x}^k-\mathbf{x}^*\|^2, \quad k \ge 0,\end{gathered} \qquad (3.12)$$

где $a = (4 - 2L\beta)/5$, $b = 2\alpha + \alpha^2(3 + \alpha - 2L\beta)$. Представим (3.12) в форме

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{20}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + b_{21}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \\ +\alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \le b_{31}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{41}\|\mathbf{y}^k\|^2, \quad k \ge 0,\end{gathered} \tag{3.13}$$

где $b_{20} = 1/5 - L\beta/5$, $b_{21} = 3/5 - L\beta/5$, $b_{31} = 1 + \alpha$, $b_{41} = 2\alpha + 4\alpha^2 - 2L\alpha^2\beta$ при $\alpha^3 < \alpha^2$. С помощью неравенства (3.5) из леммы 2 оценим второе слагаемое в левой части (3.13), положив в (3.5) $\varepsilon = 9$,

$$b_{20}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \ge 8b_{20}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + (8b_{20}/9)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2.$$

Четвёртое слагаемое в левой части (3.13) преобразуем с помощью (3.1) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k-1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{x}^*$, $\varepsilon = 3/2$,

$$\alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \ge -(\alpha/2)\|\mathbf{y}^k\|^2 + (\alpha/3)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2.$$

Тогда (3.13) преобразуется к виду

$$\begin{gathered}b_1\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{21}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \le \\ \le b_3\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + b_4\|\mathbf{y}^k\|^2, \quad k \ge 0,\end{gathered} \tag{3.14}$$

где $b_1 = 1 + 8b_{20} = (13 - L\beta)/5$, $b_3 < 6/5 + 2\alpha/3 - L\beta/5$, $b_4 = 7\alpha/2 - 2L\alpha^2\beta$, $4\alpha^2 < \alpha$; $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $b_4 > 0$ при $0 < \beta < 1/L$, $0 < \alpha < 1/4$.

Для (3.14) покажем, что $b_4\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_{21}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \le 0$. Для этого заметим, что имеют место неравенства: $\|\mathbf{y}^k\|^2 \ge \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2$ (ввиду следствия теоремы 1); $b_{21} > b_4 - b_{21}$, $b_4 - b_{21} < 7\alpha/2 - 2L\alpha^2\beta + L\beta/5 - 3/5 < 0$ (при $0 < \alpha < 6/35$, $4\alpha^2 < \alpha$, $0 < \beta \le \beta_{31} = (6 - 35\alpha)/(2L - 20L\alpha^2)$, $(b_4 - b_{21})\left(\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2\right) \ge 0$. С их помощью получаем

$$\begin{gathered}0 \ge (b_4 - b_{21})\left(\|\mathbf{y}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2\right) = \\ = b_4\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_4\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + b_{21}\left(\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2\right) \ge \\ \ge b_4\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_{21}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (b_4 - b_{21})\left(\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2\right) \ge \\ \ge b_4\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_{21}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2.\end{gathered}$$

С учётом последней оценки из (3.14) следует неравенство

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 \le q^2\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*|^2, \ k \ge 0, \tag{3.15}$$

где $q^2 = b_3/b_1$, $0 < q^2 < 2/3$ при условиях (3.10) и (2.3); при этом $0 < \beta < (8 - 10\alpha)/(13L) = \beta^{32} < \beta^{31}$ при $0 < \alpha < 1/6$. Из (3.15) следует (3.11).

Теорема 2 доказана.

Примечание 3. Неравенства (3.6) и (3.9) имеют место $\forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n$, поэтому (3.5) и (3.8) можно записать в общем виде. Пользуясь формулой для метрики, из (3.9) при $\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\mathbf{z} = \mathbf{x}$, $\mathbf{y} = \mathbf{v}$, после преобразований, аналогичных проведённым в лемме 2 после неравенства (3.6), получим

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \ge (\varepsilon - 1)\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2 - (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2. \tag{3.16}$$

Это неравенство имеет самостоятельное значение и полезно при обосновании методов класса ПОДМ; из него можно получить конкретные неравенства для точек последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$. Границы числа $\varepsilon > 0$ определяются из (3.16) неравенствами $0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon \le \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2} = [s \mp (s - 4bc)^{1/2}]/(2b)$, где $s = a + b + c$, $a = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$, $b = \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2$, $c = \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2$. Из (3.16) в частности, при дополнительном требовании $\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| \le \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|$, для числа $\varepsilon > 0$ получаем приблизительный интервал возможных значений $0.39 \le \varepsilon \le 2.61$, вычисленный для (3.8а). Аналог неравенства (3.8б) запишется в виде $(21/10)\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| \le \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|$, для числа $\varepsilon > 0$ в (3.16) приближённый интервал возможных значений $0.47 \le \varepsilon \le 9.3$.

4. Тестовый пример ЗОУ

Процесс вертикального подъёма ракеты на максимальную высоту над Землёй описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -u(t),\ \frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t),\ \frac{dx_3(t)}{dt} = [Vu(t) - Q(\mathbf{x}(t))]/x_1(t) - g \tag{4.1}$$

при начальных условиях $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$. Требуется определить закон оптимального расхода массы (горючего) $u(t)$ в этом процессе с фиксированным временем $T = 100c$, $0 \le t \le T$, при условии расхода не более 80 процентов запасов топлива (что влечёт краевое условие для массы $x_1(T) = 0.2$ или ограничение равенство $k_2[x_1(t) - 0.2] = 0$, $k_2 = 10$), заданных начальных и краевом условии и ограничении на управление $0 \le u(t) \le 0.04$. Обозначения в математической модели (4.1): $x_1(t)$ – масса ракеты, отнесённая к начальной массе; $x_2(t)$ – высота над Землёй (км); $x_3(t)$ – скорость ракеты (*км/с*); $u(t)$ – расход массы в единицу времени (c^{-1}); $V = 2\,км/c$ – скорость истечения газов из сопла двигателя ракеты; $g = 0.01$ *км/сек* – ускорение свободного падения (const); $Q(\mathbf{x}) = 0.05exp(-0.1x_2)x_3^2$ – величина аэродинамического сопротивления; $T = 100c$ – продолжительность полёта; $k_1 = 0.01$; $k_2 = 10$ – весовые коэффициенты.

Требуется минимизировать функцию $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -k_1 x_2(T)$ при заданных начальных и краевом условии.

Поставленная задача в [1] названа классической тестовой задачей оптимального управления. Для численного решения ЗОУ (4.1) была преобразована к задаче минимизации функционала от n-мерного вектора управляющих параметров ($n = ms$, $x_i = u(t_i)$, $i \in [1 : n]$, см. п.1) и решалась МШФ. Модельная система ОДУ интегрировалась модифицированным методом Эйлера

$$h_i = t_{i+1} - t_i;\ \mathbf{x}^{i+1/2} = \mathbf{x}^i + h_i/2;$$
$$\mathbf{z}^{i+1/2} = \mathbf{z}^i + (h_i/2)f(\mathbf{z}^i);\ \mathbf{z}^{i+1} = \mathbf{z}^i + h_i f(\mathbf{z}^{i+1/2})$$

в двух вариантах: отрезок $[0;T]$ разбивался на части, что определяло размерность n пространства ($n = 101, n = 125$; при расчётах с половинным шагом $n = 201$, $n = 250$).

5. Результаты численного решения задачи

Результаты сравнительных численных экспериментов по решению задачи (4.1) с несколькими методами минимизации приведены в таблицах 1 и 2. Для сравнения приведены также результаты, полученные Т.М. Энеевым, Р.П. Федоренко, Ю.Г. Евтушенко. Обозначения методов приведены в первых колонках таблиц. Приняты сокращения: МШФ – метод штрафных функций, КМ – комбинированный метод из [1], на первом этапе которого счёт по МШФ, а затем — методом простых итераций; ПОДМПМ2 — метод (2.2); ММПГ — модификация метода проекции градиента $\mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{x}^k - \gamma_k \nabla f(\mathbf{x}^k)/\|\nabla f(\mathbf{x}^k)\|\right]$; MLe-D – проекционная модификация автора данной статьи метода из работы [5]. ПОДМЧ1 – ПОДМ четырёхпараметрический [8]

$$1\ \text{этап.}\ \mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1};\ \mathbf{z}^k = P_Q\left(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k\right);$$

$$2\ \text{этап.}\quad \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{z}^k + \beta_k(\gamma_{1k}\mathbf{y}^k - \gamma_{2k}\nabla f(\mathbf{z}^k)\right],\ k = 0, 1, 2, ...$$

ПОДМЧ2 – другая версия ПОДМ четырёхпараметрического [8]

$$1 \text{ этап. } \mathbf{y}^{1k} = (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1})/\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|; \ \mathbf{z}^k = P_Q\left(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^{1k}\right);$$

$$2 \text{ этап. } \quad \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{z}^k + \beta_k(\gamma_{1k}\mathbf{y}^{1k} - \gamma_{2k}\nabla f(\mathbf{z}^k)/\|\nabla f(\mathbf{z}^k)\|\right], \ k \geq 0.$$

где $\mathbf{x}^0 \in E^n$ – начальная точка; $P_Q[v]$ – проекция вектора $\mathbf{v}$ на множество $Q \subset E^n$; $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0$; $\alpha_k,\, \beta_k,\, \gamma_k, \gamma_{1k},\, \gamma_{2k}$ — параметры длин шагов вдоль соответствующих векторов в методах; поиск $\beta_k,\, \gamma_k$ (в том числе в (2.1) и (2.2)) — одномерной минимизацией по MUM ([7], с. 47). В нижеприведенных таблицах в столбце "$1 - u(t)$"(остаток горючего из 1.0) приведены данные о точности выполнения ограничения равенства; it — число итераций метода оптимизации; $x_2(T)$ — достигнутая ракетой высота. Начальные точки $(A) = (.008; .008; .008; ....008)$, и $(B) = (.011; .011; .011; .011; .011; .011; .011; .008; ....008)$ задают начальные значения управляющей переменной $u(t)$ в точках деления отрезка $[0; T]$.

Метод	it	$t(sek.)$	$x_2(T)$	$1 - u(t)$	n и нач.точка
Энеев Т.М. [1]	50	-	132.346	.19967	51; -
Федоренко Р.П. [1]	12	-	132.180	.20000	51; -
[1] МШФ	5	-	132.898	.19838	51; (A)
[1] КМ	3	233	132.133	.2000006	51; (A)
ММПГ	80	121	132.2098	.19998669	101; (B)
ПОДМЧ1	8	20	132.2107	.200000094	101; (A)
MLe-D	7	18	132.2059	.200000095	101; (B)
ПОДМЧ2	2	14	132.2037	.200000028	125; (A)
[1] КМ	5	420	132.167	.199996	201; (A)
ММПГ	14	68	132.4349	.200000007	201; (B)
MLe-D	7	53	132.4349	.200000009	201; (B)
ПОДМЧ1	4	53	132.4349	.200000006	201; (B)
ПОДМПМ1	1	44	132.2154	.200000023	250; (A)
ПОДМЧ2	4	54	132.2134	.200000046	250; (A)
ПОДМПМ1	2	50	132.4349	.200000006	250; (B)

Таблица 1: Результаты численного решения задачи

ЗОУ (4.1) решалась также принципом максимума Понтрягина (принципом минимума Ю.Г. Евтушенко ([1], с. 80); некоторые результаты приведены в таблице 2. Функция Гамильтона- Понтрягина $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = p_1 f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + p_2 f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + p_3 f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ для данной задачи минимизации использована в составе вспомогательной функции $FH(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = k_2(x_1(T) - 0.2) - k_1 x_2(T) - H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t)$, где $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = -u(t)$; $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = x_3(t)$; $f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = [Vu - Q(x)]/x_1 - g$, параметры $p_1 = -1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$ вычислялись в ходе минимизации. Численные результаты аналогичны приведённым в таблице 1 (много совпадающих).

Метод	it	$t(sek.)$	$x_2(T)$	$1-u(t)$	n и нач.точка
ММПГ	80	121	132.2098	.19998669	101; (A)
ПОДМПМ2	8	20	132.2107	.200000094	101; (A)
MLe-D	7	18	132.2059	.200000095	101; (A)
MLe-D	1	6	132.1431	.200000007	125; (A)
ПОДМПМ2	1	12	132.2065	.200000004	125; (A)
ПОДМЧ2	4	53	132.4949	.200000006	201; (B)
MLe-D	21	180	132.2154	.200000042	250; (A)

Таблица 2: Результаты решения задачи принципом максимума Понтрягина

Выводы. Представляют интерес результаты по оценке скорости сходимости ПОДМПМ наряду со вспомогательными неравенствами. Результаты сравнительных вычислительных экспериментов показывают работоспособность предложенных методов минимизации и их способность решать ЗОУ с достаточной точностью и быстродействием.

Список литературы

1. Евтушенко Ю. Г., *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации*, Наука, М., 1982, 432 с.

2. Дикусар В. В., Милютин А. А., *Качественные и численные методы в принципе максимума*, Наука, М., 1989, 141 с.

3. Малинов В.Г., “О проекционном квазиньютоновском обобщенном двухшаговом методе минимизации и оптимизации траектории летательного аппарата”, *Журнал СВМО*, **12**:4 (2010), 37–48.

4. Малинов В. Г., “Оптимизация траектории и математическая модель движения ракеты”, *Труды 7 Международной конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, ... систем и процессов". 2-5 февраля 2009.*, 2009, 178–179.

5. Le D., “A Fast and Robust unconstrained optimization method requiring minimum storage”, *Mathematical Programming*, **32**:1 (1985), 41–68.

6. Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977:, 744 с.

7. Малинов В. Г., *Некоторые одномерные экстремальные задачи и методы их решения*, ОИПКРО, Оренбург, 2002, 54 с.

8. Малинов В. Г., “Четырехпараметрические двухшаговые проекционные методы минимизации первого порядка”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **36**:12 (1996), 48–56.

9. Шилов Г.Е., *Математический анализ. Специальный курс*, Физматлит, М., 1960, 388 с.

Projected two-step VMM and numerical solution of optimal control problem

© V.G. Malinov [2]

Abstract. This paper describes a new projection generalized two-step variable metric method (PTVMM) for solving minimization problems in the Euclidean space E^n in the case when function $f(\mathbf{x})$ has prolate level surfaces. The estimate of rate of convergence of the method in the case of convex functions is presented. Finally, we indicate, how these considered methods can be used to solving of testing optimal control problem. Some results of comparative numerical experiments are given.

Key Words: minimization on the simple set, projection generalized two-step two-stage variable metric method, rate of convergence, differencial equations of movement, optimal control problem, optimization.

[2] Assistant Professor of Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vgmalinov@mail.ru.