В Средневолжском математическом обществе

УДК 533.6.013.42

Сравнительный анализ условий динамической устойчивости упругого элемента канала при взаимодействии с потоком сжимаемой и несжимаемой среды

© А.В. Анкилов[1], П.А. Вельмисов[2], Ю.К. Сагдеева[3]

Аннотация. Исследуется динамическая устойчивость упругого элемента стенки канала при протекании в нем дозвукового потока идеальной жидкости (газа). Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Получены достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на скорость потока, сжимающего (растягивающего) элемент усилия, изгибную жесткость упругого элемента и другие параметры механической системы. Проведено сравнение областей устойчивости для сжимаемой и несжимаемой среды.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, устойчивость, упругая пластина, деформация, дозвуковой поток, сжимаемая и несжимаемая среда.

1. Введение

При проектировании конструкций, обтекаемых потоком газа или жидкости, важное значение имеет исследование устойчивости деформируемых элементов, так как воздействие потока может приводить к увеличению амплитуды колебаний, и, тем самым, к их разрушению.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике, используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий, например, устройств для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например, [1]).

Таким образом, при проектировании конструкций и устройств, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости упругих элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

В работе исследуется динамическая устойчивость упругого элемента стенки канала при протекании в нем дозвукового потока идеальной сжимаемой или несжимаемой среды (жидкости или газа). Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции

[1] Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru.

[2] Зав. кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

[3] Аспирант кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; Julianna5361@rambler.ru.

устойчивости динамических систем по Ляпунову. Исследование устойчивости проводится в линейной постановке, соответствующей малым возмущениям однородного дозвукового потока и малым прогибам упругого элемента стенки канала. На основе построения функционалов для связанных систем дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций – прогиба упругого элемента стенки канала и потенциала скорости жидкости (газа), получены условия устойчивости решений этих систем.

2. Постановка задачи для сжимаемой среды

Рассмотрим плоское течение в прямолинейном канале $J = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$. Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox. Упругой является часть стенки $y = y_0$ при $x \in [b,c]$ (рис. [2.1] 2.1).

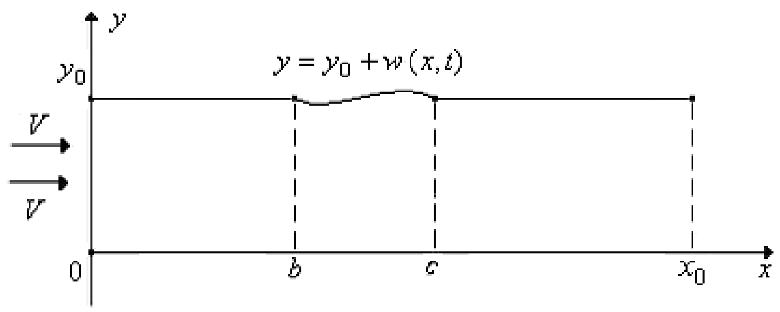

Рисунок **2.1**

Канал, стенка которого содержит деформируемый элемент

Введем обозначения: $w(x,t)$ – функция деформации упругого элемента стенки канала; $\varphi(x,y,t)$ – потенциал скорости возмущенного потока.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x,y) \in J, \quad t \geq 0, \tag{2.1}$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x,t) + Vw'(x,t), \quad x \in (b,c), \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0,b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \tag{2.3}$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \tag{2.4}$$

$$\varphi(0,y,t) = 0, \quad \varphi(x_0,y,t) = 0, \quad y \in (0,y_0), \quad t \geq 0, \tag{2.5}$$

$$L(w) = -\rho\left(\varphi_t(x,y_0,t) + V\varphi_x(x,y_0,t)\right), \quad x \in (b,c), \quad t \geq 0. \tag{2.6}$$

Дифференциальный оператор $L(w)$ задается выражением

$$L(w) \equiv Dw''''(x,t) + \beta_2\dot{w}''''(x,t) + M\ddot{w}(x,t) + Nw''(x,t) + \beta_1\dot{w}(x,t) + \beta_0 w(x,t). \tag{2.7}$$

Индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t; штрих и точка – частные производные по x и t соответственно; ρ – плотность жидкости в однородном невозмущенном потоке; D, M – изгибная жесткость и погонная масса упругого элемента; N – сжимающая (растягивающая) упругий элемент сила; β_1, β_2 – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования; β_0 – коэффициент жесткости основания; a – скорость звука в невозмущенном потоке жидкости ($a > V$).

Предположим, что концы упругого элемента закреплены либо жестко, либо шарнирно, тогда при $x = b$ и $x = c$ выполняется одно из условий

$$1)\, w = w' = 0, \quad 2)\, w = w'' = 0. \tag{2.8}$$

Для двух неизвестных функций – прогиба упругого элемента стенки канала $w\,(x,t)$ и потенциала скорости сжимаемой жидкости (газа) $\varphi\,(x,y,t)$ имеем связанную задачу (2.1) - (2.8).

3. Исследование устойчивости для сжимаемой среды

Исследуем устойчивость нулевого решения $\varphi\,(x,y,t) \equiv 0$, $w\,(x,t) \equiv 0$ системы (2.1) - (2.8) по Ляпунову. Введем функционал

$$\begin{gathered}\Phi\,(t) = \iint\limits_J \left(\varphi_t^2 + \left(a^2 - V^2\right)\varphi_x^2 + a^2\varphi_y^2\right)dxdy - 2a^2V\int\limits_b^c \varphi\,(x,y_0,t)w'\,(x,t)\,dx+\\ +\frac{a^2}{\rho}\int\limits_b^c \left(M\dot{w}^2 + Dw''^2 - Nw'^2 + \beta_0 w^2\right)dx.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Для функций $\varphi\,(x,y,t)$ и $w\,(x,t)$, удовлетворяющих уравнениям (2.1) и (2.6), (2.7), производная от Φ по t примет вид

$$\begin{gathered}\dot{\Phi}(t) = 2\iint\limits_J \left(\varphi_t\left(-2V\varphi_{xt} - V^2\varphi_{xx} + a^2\left(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}\right)\right) + \left(a^2 - V^2\right)\varphi_x\varphi_{xt} +\right.\\ \left. + a^2\varphi_y\varphi_{yt}\right)dxdy - 2a^2V\int\limits_b^c \left(\varphi_t\,(x,y_0,t)\,w'\,(x,t) + \varphi\,(x,y_0,t)\,\dot{w}'\,(x,t)\right)dx+\\ +\frac{2a^2}{\rho}\int\limits_b^c \left(\dot{w}\left\{-\rho\left(\varphi_t\,(x,y_0,t) + V\varphi_x\,(x,y_0,t)\right) - Dw'''' - \beta_2\dot{w}'''' - Nw'' - \right.\right.\\ \left.\left. -\beta_1\dot{w} - \beta_0 w\right\} + Dw''\dot{w}'' - Nw'\dot{w}' + \beta_0 w\dot{w}\right)dx.\end{gathered} \tag{3.2}$$

Произведя интегрирование с учетом условий (2.2)-(2.5), (2.8), получим

$$\dot{\Phi}\,(t) = -\frac{2a^2}{\rho}\int\limits_b^c \left(\beta_2\dot{w}''^2 + \beta_1\dot{w}^2\right)dx.$$

Пусть выполняются условия

$$\beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \tag{3.3}$$

тогда имеют место неравенства

$$\dot{\Phi}\,(t) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi\,(t) \leq \Phi\,(0)\,. \tag{3.4}$$

Для оценки функционала для функции $w\,(x,t)$ запишем неравенства Рэлея [2]

$$\int\limits_b^c w''^2\,(x,t)\,dx \geq \lambda_1\int\limits_b^c w'^2\,(x,t)\,dx, \quad \int\limits_b^c w''^2\,(x,t)\,dx \geq \mu_1\int\limits_b^c w^2\,(x,t)\,dx, \tag{3.5}$$

где λ_1, μ_1 - наименьшие собственные значения краевых задач $\psi''''(x) = -\lambda\psi''(x)$, $\psi''''(x) = \mu\psi(x)$, $x \in (b,c)$ с граничными условиями (2.8), и неравенство Рэлея

$$\int\limits_0^{x_0} \varphi_x^2(x,y,t)dx \geq \eta_1 \int\limits_0^{x_0} \varphi^2(x,y,t)dx, \tag{3.6}$$

где $\eta_1 = \dfrac{\pi^2}{x_0^2}$ - наименьшее собственное значение краевой задачи $-\psi'' = \eta\psi$, $x \in (0,x_0)$ с краевыми условиями $\psi(0) = 0, \quad \psi(x_0) = 0$, соответствующими (2.5).

Интегрируя неравенство (3.6) от 0 до y_0 по переменной y, окончательно получим

$$\iint\limits_J \varphi_x^2(x,y,t)dxdy \geq \frac{\pi^2}{x_0^2} \iint\limits_J \varphi^2(x,y,t)dxdy. \tag{3.7}$$

Воспользовавшись неравенством Коши - Буняковского, получим неравенства

$$w^2(x,t) \leq (c-b) \int\limits_b^c w'^2(x,t)\,dx, \tag{3.8}$$

$$\iint\limits_J \varphi_y^2 dxdy \geq \frac{2}{y_0^2} \iint\limits_J (\varphi(x,y_0,t) - \varphi(x,y,t))^2\,dxdy. \tag{3.9}$$

Оценим $\Phi(0)$ сверху, используя неравенства (3.5) и очевидное неравенство $-2ab \leq$ $\leq a^2 + b^2$

$$\begin{gathered}\Phi(0) \leq \iint\limits_J \left(\varphi_{t0}^2 + \left(a^2 - V^2\right)\varphi_{x0}^2 + a^2\varphi_{y0}^2\right)dxdy + a^2\int\limits_b^c \varphi^2(x,y_0,0)\,dx + \\ + \frac{a^2}{\rho}\int\limits_b^c \left(M\dot{w}_0^2 + \left(D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1}\right){w_0''}^2\right)dx,\end{gathered} \tag{3.10}$$

где введены обозначения $\varphi_{t0} = \varphi_t(x,y,0)$, $\varphi_{x0} = \varphi_x(x,y,0)$, $\varphi_{y0} = \varphi_y(x,y,0)$, $\dot{w}_0 = \dot{w}(x,0)$, $w_0'' = w''(x,0)$.

Оценим $\Phi(t)$ снизу. Применяя (3.5), (3.7), (3.9) для (3.1), получим неравенство

$$\begin{gathered}\Phi(t) \geq \iint\limits_J \left(\varphi_t^2 + \left(a^2 - V^2\right)\frac{\pi^2}{x_0^2}\varphi^2 + \frac{2a^2}{y_0^2}(\varphi(x,y_0,t) - \varphi(x,y,t))^2\right)dxdy - \\ -2a^2V\int\limits_b^c \varphi(x,y_0,t)w'(x,t)\,dx + \frac{a^2}{\rho}\int\limits_b^c (\lambda_1 D - N)\,w'^2 dx.\end{gathered} \tag{3.11}$$

Введем обозначение

$$f(x,t) = \begin{cases} 0, \quad x \in (0,b], \\ w'(x,t), \quad x \in (b,c), \\ 0, \quad x \in [c,x_0), \end{cases}$$

тогда из (3.11) получим неравенство

$$\begin{gathered}\Phi(t) \geq \iint\limits_J \left[\varphi_t^2(x,y,t) + \left(\left(a^2 - V^2\right)\frac{\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2}\right)\varphi^2(x,y,t) - \frac{4a^2}{y_0^2}\varphi(x,y_0,t)\times\right. \\ \left.\times\varphi(x,y,t) + \frac{2a^2}{y_0^2}\varphi^2(x,y_0,t) - \frac{2a^2V}{y_0}\varphi(x,y_0,t)\,f(x,t) + \frac{a^2(\lambda_1 D - N)}{\rho y_0}f^2(x,t)\right]dxdy.\end{gathered} \tag{3.12}$$

Введем обозначения

$$d_{11}=\frac{\left(a^2-V^2\right)\pi^2}{x_0^2}+\frac{2a^2}{y_0^2},\quad d_{22}=d_{12}=\frac{2a^2}{y_0^2},\quad d_{23}=\frac{V}{y_0^2},\quad d_{33}=\frac{a^2\left(\lambda_1 D-N\right)}{\rho y_0}. \tag{3.13}$$

Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма относительно $\varphi\left(x,y,t\right)$, $\varphi\left(x,y_0,t\right)$, $f\left(x,t\right)$ в (3.12) будет положительно определенной, если выполняются условия

$$\lambda_1 D-N>0, \tag{3.14}$$

$$\frac{\lambda_1 D-N}{\rho y_0}\cdot\frac{2\left(a^2-V^2\right)\pi^2}{x_0^2}-V^2\left(\frac{\left(a^2-V^2\right)\pi^2}{x_0^2}+\frac{2a^2}{y_0^2}\right)>0. \tag{3.15}$$

Преобразуем неравенство (3.15)

$$N<\lambda_1 D-\frac{V^2x_0^2\rho y_0}{2\left(a^2-V^2\right)\pi^2}\left(\frac{\left(a^2-V^2\right)\pi^2}{x_0^2}+\frac{2a^2}{y_0^2}\right). \tag{3.16}$$

Оценивая квадратичную форму в (3.12) относительно $w\left(x,t\right)$ с учетом (3.8), получим

$$\Phi\left(t\right)\geq\frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2\left(c-b\right)}w^2\left(x,t\right), \tag{3.17}$$

где $\Delta_2=d_{11}d_{22}-d_{12}^2>0$, $\Delta_3=d_{33}\Delta_2-d_{23}^2d_{11}>0$.

Учитывая (3.4), (3.10), (3.17), получим неравенство

$$w^2\left(x,t\right)\leq\frac{\Delta_2\left(c-b\right)}{\Delta_3 y_0}\iint\limits_J\left(\varphi_{t0}^2+\left(a^2-V^2\right)\varphi_{x0}^2+a^2\varphi_{y0}^2\right)dxdy+a^2\int\limits_b^c\varphi^2\left(x,y_0,0\right)dx+$$
$$+\frac{a^2}{\rho}\int\limits_b^c\left(M\dot{w}_0^2+\left(D+\frac{|N|+\rho V^2}{\lambda_1}+\frac{\beta_0}{\mu_1}\right)w_0''^2\right)dx,$$

из которого следует теорема

Т е о р е м а 3.1. *Пусть выполняются условия (3.3), (3.14), (3.16). Тогда решение $w\left(x,t\right)$ системы уравнений (2.1)-(2.8) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных φ_{t0}, φ_{x0}, φ_{y0}, $\varphi\left(x,y_0,0\right)$, $\dot{w}_0, w_0''$.*

Аналогично оценивая квадратичную форму в (3.12) относительно $\varphi\left(x,y,t\right)$, получим

$$\Phi\left(t\right)\geq\frac{\Delta_3}{d_{22}d_{33}-d_{23}^2}\iint\limits_J\varphi^2\left(x,y,t\right)dxdy. \tag{3.18}$$

Учитывая (3.4), (3.10), (3.18), получим неравенство

$$\iint\limits_J\varphi^2\left(x,y,t\right)dxdy\leq\frac{d_{22}d_{33}-d_{23}^2}{\Delta_3}\iint\limits_J\left(\varphi_{t0}^2+\left(a^2-V^2\right)\varphi_{x0}^2+a^2\varphi_{y0}^2\right)dxdy+$$
$$+a^2\int\limits_b^c\varphi^2\left(x,y_0,0\right)dx+\frac{a^2}{\rho}\int\limits_b^c\left(M\dot{w}_0^2+\left(D+\frac{|N|+\rho V^2}{\lambda_1}+\frac{\beta_0}{\mu_1}\right)w_0''^2\right)dx,$$

из которого следует теорема

Т е о р е м а 3.2. *Пусть выполняются условия (3.3), (3.14), (3.16). Тогда решение $\varphi\left(x,y,t\right)$ системы уравнений (2.1)-(2.8) устойчиво в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных φ_{t0}, φ_{x0}, φ_{y0}, $\varphi\left(x,y_0,0\right)$, $\dot{w}_0$, w_0''.*

4. Постановка задачи и исследование устойчивости для несжимаемой среды

Потенциал скорости для несжимаемой среды удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0. \tag{4.1}$$

Добавляя условия (2.2) - (2.8), получим связанную задачу для двух неизвестных функций – прогиба упругого элемента стенки канала $w(x,t)$ и потенциала скорости несжимаемой среды $\varphi(x,y,t)$.

Аналогично исследуем устойчивость нулевого решения $\varphi(x,y,t) \equiv 0, \quad w(x,t) \equiv 0$ системы (4.1), (2.2) - (2.8) по Ляпунову. Введем функционал

$$\begin{gathered}\Phi(t) = \iint\limits_J \left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right) dxdy - 2V\int\limits_b^c \varphi(x, y_0, t) w'(x,t)\, dx + \\ + \frac{1}{\rho}\int\limits_b^c \left(M\dot{w}^2 + Dw''^2 - Nw'^2 + \beta_0 w^2\right) dx.\end{gathered} \tag{4.2}$$

При выполнении условий (3.3) получим неравенство (3.4). Пусть выполняется условие (3.14), а также условие

$$N < \lambda_1 D - \frac{\rho V^2\left(\pi^2 y_0^2 + 2x_0^2\right)}{2\pi^2 y_0}. \tag{4.3}$$

Тогда справедливы неравенства

$$\iint\limits_J \varphi^2(x,y,t) dxdy \leq \frac{d_{22}d_{33} - d_{23}^2}{\Delta_3}\Psi, \quad w^2(x,t) \leq \frac{\Delta_2(c-b)}{\Delta_3 y_0}\Psi,$$

где введены обозначения $\Delta_2 = d_{11}d_{22} - d_{12}^2 > 0$, $\Delta_3 = d_{33}\Delta_2 - d_{23}^2 d_{11} > 0$, $d_{11} = \dfrac{\pi^2}{x_0^2} + $ $+\dfrac{2}{y_0^2}$, $d_{22} = \dfrac{2}{y_0^2}$, $d_{12} = -\dfrac{2}{y_0^2}$, $d_{23} = -\dfrac{V}{y_0^2}$, $d_{33} = \dfrac{\lambda_1 D - N}{\rho y_0}$, $\Psi = \iint\limits_J \left(\varphi_{x0}^2 + \varphi_{y0}^2\right) dxdy +$

$$+\int\limits_b^c \varphi^2(x, y_0, 0)\, dx + \frac{1}{\rho}\int\limits_b^c \left(M\dot{w}_0^2 + \left(D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1}\right) w_0''^2\right) dx.$$

Из этих неравенств следует теорема

Т е о р е м а 4.1. *Пусть выполняются условия (3.3), (3.14), (4.3). Тогда решение $w(x,t)$ системы уравнений (4.1), (2.2)-(2.8) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных φ_{t0}, φ_{x0}, φ_{y0}, $\varphi(x, y_0, 0)$, $\dot{w}_0$, w_0''. При этом решение $\varphi(x,y,t)$ устойчиво в среднем (в интегральном смысле).*

5. Сравнение условий устойчивости для сжимаемой и несжимаемой жидкости

Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда - воздух ($\rho = 1$), пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_{pl} = 8480$). Другие параметры механической системы: $a = 331$, $x_0 = 5$, $y_0 = 0,1$, $b = 2$, $c = 3$, $h = 0,005$, $\nu = 0,31$, $D = \dfrac{Eh^3}{12\left(1-\nu^2\right)} =$ $806,7$. Пусть концы упругой пластины закреплены шарнирно, тогда $\lambda_1 = \dfrac{\pi^2}{\left(c-b\right)^2} = \pi^2$. Все значения приведены в системе СИ.

Для неравенств (3.16), (4.3) построены области устойчивости на плоскости «сжимающее (растягивающее) усилие N – скорость потока V» (рис. 5.1). На рис. 5.1 светло серая область - область устойчивости для сжимаемого потока (неравенство (3.16)), светло серая плюс темно серая области – область устойчивости для несжимаемого потока (неравенство (4.3)). Рисунки 5.1а и 5.1б показывают, что при $V \in [0, 30]$ отличия областей незначительны. При $V > 30$ (рис. 5.1в, 5.1г) отличия становятся все более существенными (модель несжимаемой среды уже не работает). На рисунке 5.1г видно, что прямая $V = a$ (зона трансзвука) является асимптотой границы области (3.16).

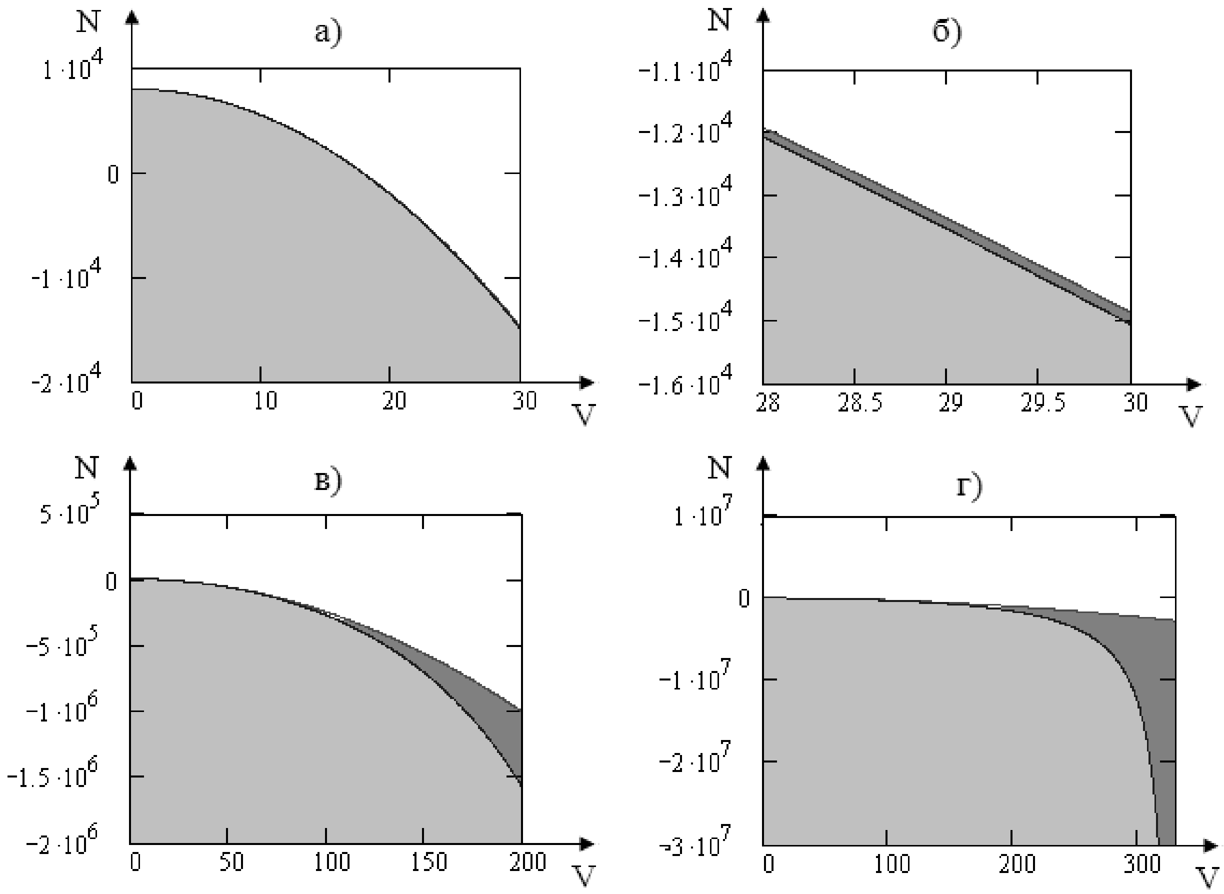

Рисунок **5.1**

Области устойчивости на плоскости (N, V)

Список литературы

1. Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К., *Пат. 2062662 Российская Федерация, МПК6 B 06 B 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель; заявитель и патентообладатель Ульяновский гос. технич. ун-т. – №5038746/28; заявл. 20.07.92; опубл. 27.06.96, Бюл. №18.*

2. Коллатц Л., *Задачи на собственные значения*, Наука, М., 1968, 503 с.

The stability of an elastic element of the channel wall

© **A.V. Ankilov[4], P.A. Velmisov[5], Yu.K. Sagdeeva[6]**

Abstract. The dynamic stability of an elastic element of the channel wall is studies. In the channel flow the subsonic the stream of an ideal compressible fluid (gas). Determination of the stability of an elastic body corresponds to the concept of stability of dynamical systems by Lyapunov. Obtained the sufficient conditions for stability. Conditions impose limitations on the speed of the uniform stream of gas, compressed (tensile) element of efforts, the elastic element stiffness and other parameters of the mechanical system.

Key Words: aerohydroelasticity, stability, elastic plate, deformation, subsonic flow, compressed and incompressible liquid (gas).

[4] Docent of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; ankil@ulstu.ru.

[5] Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

[6] Post graduate student of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; Julianna5361@rambler.ru.