В Средневолжском математическом обществе

УДК 519.862.7

Построение математической модели динамики потока претендентов на поступление в аспирантуру с использованием системы дифференциальных уравнений с запаздыванием

© **В. А. Атряхин**[1], **П. А. Шаманаев**[2]

Аннотация. В работе описывается процесс построения потока претендентов на поступление в аспирантуру. В качестве математической модели используется система обыкновенных дифференциальных уравнений. Для отыскания оценок неизвестных параметров системы используется метод наименьших квадратов.

Ключевые слова: система обыкновенных дифференциальных уравнений, метод наименьших квадратов, прогнозирование, интегро-интерполяционный метод.

1. Введение

В данной статье описывается модель прогнозирования изменения потока претендентов на поступление в аспирантуру среди учащихся заведений ВПО с помощью системы дифференциальных уравнений. Данная задача является подзадачей задачи прогнозирования потока научных и научно-педагогических кадров [1]. В основу формирования модели положены механизмы, многие годы использующиеся для прогнозирования социодемографического поведения населения, например, прогнозирования миграции городского населения [2].

Для построения прогноза всё множество студентов разобьем на два подмножества: подмножество претендентов на поступление в аспирантуру и остальные студенты. Сделать это можно, например, взяв за критерий некую фиксированную величину среднего балла на последних экзаменах. Состав группы претендентов на поступление в аспирантуру будет меняться два раза в год по итогам очередной сессии. Какие-то студенты будут выбывать из данной группы, а какие-то в неё вливаться. Очевидно, что приток (или отток) студентов в группу претендентов на поступление в аспирантуру во многом зависит от набора преподавателей и от сложности изучаемых предметов на рассматриваемом отрезке времени. Зачастую данные факторы остаются постоянным из года в год. А значит, каждый поток студентов из года в год оказывается в похожих обстоятельствах. В основу данной модели положена гипотеза о том, что численные значения потоков вливающихся в группу претендентов на поступление в аспирантуру (и выбывающих из нее) определяются статистической информацией по данным показателям за некоторый отрезок времени, предшествующий прогнозируемому, количественным составом этой группы в данный момент времени и материальной заинтересованностью студентов в хороших оценках.

[1]Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; atrvol@rambler.ru.

[2]Заведующий кафедрой прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

2. Постановка задачи

Очевидно, что никакое влияние в описываемой системе взаимосвязей не осуществляется мгновенно. Вся система в целом достаточно консервативна и не может сразу же реагировать на те, или иные импульсы. Рассмотрим отдельные связи. Во-первых, изменение потока претендентов на поступление в аспирантуру связано с суммой капи-таловложений в то, чтобы повысить материальную заинтересованность студентов в хороших оценках. Во-вторых, изменение потока претендентов на поступление в аспирантуру связано с интенсивностью потока претендентов на поступление в аспирантуру в некотором прошлом. В-третьих, изменение потока претендентов на поступление в аспирантуру связано с численностью претендентов на поступление в аспирантуру в данный момент времени.

Таким образом, изменение потока присоединяющихся к группе претендентов на поступление в аспирантуру в данный момент ставится в зависимость от численности претендентов на поступление в аспирантуру в данный момент, интенсивности потока присоединяющихся к группе претендентов на поступление в аспирантуру в некотором прошлом и интенсивности потока выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру в некотором прошлом. А значит, изменение потока присоединяющихся к претендентам на поступление в аспирантуру в момент времени t описывается дифференциальным уравнением следующего вида:

$$\dot{y}(t) = a'w(t) + b'y(t-h) + c'z(t-h), \tag{2.1}$$

где $w(t)$ - численность претендентов на поступление в аспирантуру в момент времени t; $y(t)$ - интенсивность потока присоединяющихся к группе претендентов на поступление в аспирантуру в момент времени t; $x(t)$ - сумма капиталовложений в повышение материальной заинтересованности студентов в хороших оценках в момент времени t.

Обратимся теперь к потоку покидающих группу претендентов на поступление в аспирантуру. Изменение потока выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру в данный момент ставится в зависимость от численности претендентов на поступление в аспирантуру в данный момент, интенсивности потока присоединяющихся к группе претендентов на поступление в аспирантуру в некотором прошлом и интенсивности потока выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру в некотором прошлом.

Таким образом, изменение потока выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру в момент времени t описывается уравнением следующего вида:

$$\dot{z}(t) = a''w(t) + b''z(t-h) + c''y(t-h), \tag{2.2}$$

где $z(t)$ - интенсивность потока выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру в момент времени t. Последнее, что нам необходимо - это балансовое уравнение, связывающее прирост и отток численности претендентов на поступление в аспирантуру с количеством людей в данной группе:

$$\dot{w}(t) = y(t) - z(t), \tag{2.3}$$

Итак, мы сформулировали модель в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = a'w(t) + b'y(t-h) + c'z(t-h), \\ \dot{z}(t) = a''w(t) + b''z(t-h) + c''y(t-h), \\ \dot{w}(t) = y(t) - z(t). \end{cases} \tag{2.4}$$

Ставится задача отыскания коэффициентов $a', a'', b', b'', c', c''$, при которых решение системы дифференциальных уравнений (2.4) наименьшим образом «отклоняется» от известных статистических данных. Мы предполагаем, что коэффициенты дифференциальных уравнений постоянны и не зависят от времени t.

3. Переход от системы дифференциальных уравнений к вычислительной схеме

Чтобы экспериментально проверить правильность сформулированной модели, необходимо перейти от системы дифференциальных уравнений к некоторой вычислительной схеме, позволяющей оценить величины численности претендентов на поступление в аспирантуру и «миграционных» потоков в реальном масштабе времени с ориентацией на существующие методы учета. Заметим, что в системе (2.4) мы имели дело с «мгновенными» значениями численности претендентов на поступление в аспирантуру, капиталовложений, потоков вливающихся в эту группу и выбывающих из неё. На практике же мы располагаем лишь данными годового учета. Поэтому нам необходимо перейти от системы (2.4) к системе, в которой фигурируют интегралы от соответствующих функций.

Пусть длина отрезка времени $[t_0, T]$, за который можно получить информацию, равна $T - t_0 = N\delta$, где δ - шаг интегрирования. Предположим, что с точностью до некоторого $\varepsilon > 0$ коэффициенты системы (1) постоянны на каждом интервале $((i-1)\delta, i\delta), i = 1, 2, ..., N)$. Проинтегрировав систему (2.4) по интервалу $((i-1)\delta, i\delta)$ получим новую систему:

$$\begin{cases} \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} \dot{y}(\tau)d\tau = a' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau)d\tau + b' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau-\delta)d\tau + c' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau-\delta)d\tau, \\ \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} \dot{z}(\tau)d\tau = a'' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau)d\tau + b'' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau-\delta)d\tau + c'' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau-\delta)d\tau, \\ \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} \dot{w}(\tau)d\tau = \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau)d\tau - \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau)d\tau. \end{cases} \tag{3.1}$$

Поскольку практически значения величин Y, Z, w, X, R известны лишь в конечном числе точек отрезка $[t_0, T]$, то число δ удобно считать минимальным расстоянием между точками отрезка $[t_0, T]$, в которых и заданы значения этих величин.

Предположим далее, что функция $w(t)$ слабо меняется на интервале $((i-1)\delta, i\delta), i = 1, 2, ..., N)$ и что значения $w(t)$ известны нам лишь на границах этого интервала. Тогда правомерна замена $\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau)d\tau$ в системе (3.1) на выражение $[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]\delta/2, i = 1, 2, ..., N)$.

Аппроксимируем конечными разностями $[\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau)d\tau$ - $\int\limits_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} y(\tau)d\tau]/\delta$, $[\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau)d\tau$ - $\int\limits_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} z(\tau)d\tau]/\delta$ - соответствующие производные из (3.1). С учетом этих замечаний, получим следующую систему конечно-разностных уравнений:

$$\begin{cases} [\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau)d\tau - \int\limits_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} y(\tau)d\tau]/\delta = a'[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]\delta/2 + \\ \qquad\qquad\qquad + b' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau-\delta)d\tau + c' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau-\delta)d\tau + d', \\ [\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau)d\tau - \int\limits_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} z(\tau)d\tau]/\delta = a''[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]\delta/2 + \\ \qquad\qquad\qquad + b'' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau-\delta)d\tau + c'' \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau-\delta)d\tau + d'', \\ [\int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau)d\tau - \int\limits_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} w(\tau)d\tau]/\delta = \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau)d\tau - \int\limits_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau)d\tau. \end{cases} \tag{3.2}$$

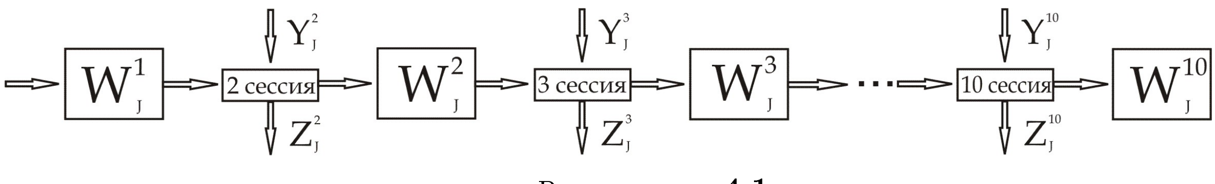
Поскольку мы не имеем никакой информации в точках, отличных от начала (конца) года, то полагаем $\delta = 1$. Пренебрегая также погрешностями d', d'', получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \bar{y}_j^i = a_j^i[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]/2 + (b_j^i + 1)\bar{y}_{j-1}^i + c_j^i \bar{z}_{j-1}^i, \\ \bar{z}_j^i = k_j^i[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]/2 + (l_j^i + 1)\bar{z}_{j-1}^i + m_j^i \bar{y}_{j-1}^i, \\ \bar{w}_j^i = \bar{w}_j^{i-1} + \bar{y}_j^i - \bar{z}_j^i. \end{cases} \tag{3.3}$$

где $\bar{y}_j^i$ - количество студентов j-го потока, присоединяющихся к группе претендентов на поступление в аспирантуру после i-ой сессии, $\bar{z}_j^i$ - количество студентов j-го потока, выбывающих из группы претендентов на поступление в аспирантуру после i-ой сессии, $\bar{w}_j^i$ - численность группы претендентов на поступление в аспирантуру j-го потока студентов после i-ой сессии, $\bar{x}_j^i$ - сумма капиталовложений в повышение материальной заинтересованности студентов j-го потока в хороших оценках после i-ой сессии.

4. Алгоритм проведения вычислений

Рассмотрим алгоритм проведения вычислений по предложенной модели на примере учащихся заведений ВПО категории «специалист». За весь срок обучения они 10 раз преодолевают учет знаний. Условно изменения, которые происходят за это время в группе J-ого потока претендентов на поступление в аспирантуру, представлены на рисунке 4.1.



Р и с у н о к **4.1**

Предположим, что у нас есть данные о результатах первой сессии. По ним мы можем выяснить количество студентов, которые принадлежат к группе претендентов на поступление в аспирантуру w_j^i. Кроме того нам известная вся статистическая информация по N потокам, предшествующим рассматриваемому J-ому потоку: $y_j^i, z_j^i, w_j^i, x_j^i, j = \overline{J-N, J}, i = \overline{2, 10}$. Главная цель вычислений w_j^{10}. Промежуточные значения, которые для этого придется вычислить $w_j^i, i=\overline{2,9}$ Переобозначив коэффициенты в системе (3.3), получим систему (4.1), которой будем пользоваться для вычислений:

$$\begin{cases} \bar{y}_j^i = a_j^i(\bar{w}_j^i + \bar{w}_j^{i-1})/2 + b_j^i \bar{y}_{j-1}^i + c_j^i \bar{z}_{j-1}^i, \\ \bar{z}_j^i = k_j^i(\bar{w}_j^i + \bar{w}_j^{i-1})/2 + l_j^i \bar{z}_{j-1}^i + m_j^i \bar{y}_{j-1}^i, \\ \bar{w}_j^i = \bar{w}_j^{i-1} + \bar{y}_j^i - \bar{z}_j^i. \end{cases} \tag{4.1}$$

Вычисления проводятся поэтапно для каждого i от 2 до 10. Коэффициенты $a_j^i, b_j^i, c_j^i, k_j^i, l_j^i, m_j^i$ находятся из системы (4.1) по статистическим данным. Если статистические данные доступны за три года, то система относительно коэффициентов решается численно (три уравнения - три неизвестных). Если статистические данные доступны за большее число лет, то система относительно коэффициентов решается методом наименьших квадратов. Затем w_j^i находится по формуле:

$$\bar{w}_j^i = \frac{(1 + a_j^i/2 - k_j^i/2)\bar{w}_j^{i-1} + (b_j^i - m_j^i)\bar{y}_{j-1}^i + (c_j^i - l_j^i)\bar{z}_{j-1}^i}{1 + k_j^i/2 - a_j^i/2}$$

Вычисления продолжаются до тех пор, пока не будет найдено w_j^{10}.

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2010-2013 гг.» Государственный контракт № 14.740.11.0225.

Список литературы

1. Шаманаев П. А., Атряхин В.А. Численное моделирование динамики потока научных и научно-педагогических кадров на основе статистических данных по МГУ им. Н.П.Огарева - Саранск: Журнал СВМО, 2011. - Т. 13, №1. - с. 84-90.

2. Бородкин Ф. М., Соболева С. В. Прогнозирование численности населения и миграции системой дифференциальных уравнений - Новосибирск: Математические методы в социологии, 1974. с. 99-145.

3. Годунов С. К., Рябенький В. С. Разностные схемы - М.: «Наука», 1973. 272 с.

Building of mathematical models of the dynamics stream of applicants for graduate school with system of differential equations with delay

© V.A. Atryahin[3], P.A. Shamanaev[4]

Abstract. The article describes the process of constructing the flow of applicants for graduate school. As a mathematical model uses a system of ordinary of differential equations. To find the estimates unknown parameters of the method of least-squares.

Key Words: system of ordinary differential equations, least squares, forecasting, integro-interpolation method.

[3]Postgraduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; atrvol@rambler.ru.

[4]Chief of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.