УДК 517.938

О бифуркациях в моделях гиперболического шума

© **Е. В. Жужома[1], Н. В. Исаенкова[2], В. С. Медведев[3]**

Аннотация. В работе доказывается, что сколь угодно малым (в C^0 -топологии) возмущением отображения Смейла можно получить отображение с нетривиальным нульмерным гиперболическим множеством. Полученное отображение можно использовать в системах передачи информации с полной хаотической синхронизацией.

Ключевые слова: гиперболические неблуждающие множества, диффеоморфизмы Смейла-Вильямса, хирургия Смейла, синхронизация хаотических генераторов

1. Введение

Одной из основных задач коммуникации при передаче сообщений является конфиденциальность. Для ее решения в начале 90-ых годов прошлого века было предложено использовать шум. Применение шума основано на следующей идее. Вместе с полезным сообщением передается более «громкий», шум. Для тех, кому данное сообщение не предназначено, воспринимают сигнал как шум. Предположим, что на приемном пункте могут синхронно воспроизвести этот шум (данный метод называется полной хаотической синхронизацией [3]). Тогда естественно предположить, что на приемном пункте могут и убрать эту хаотическую «маску», выделив полезное сообщение. Впервые, видимо, синхронизируемый хаос был предложен Л. Пекорой, Т. Кэрроллом [15] и реализован К.Куомо, А. Оппенгеймом [8], см. [18]. Отметим, что один из первых примеров простой электрической схемы, в которой целенаправленно реализовался режим хаотических автоколебаний, был предложен А.С. Пиковским и М.И. Рабиновичем [6].

Первые радиотехнические реализации синхронизируемого хаоса были основаны на генераторах, которые описывались системами дифференциальных уравнений, аналогичными системе Лоренца. Известно, что неблуждающее множество системы Лоренца не является равномерно гиперболическим, и не обладает, следовательно, присущей гиперболическим системам устойчивостью (грубостью). Это приводило к тому, что передача сигнала в канале связи была слишком чувствительна к помехам. Ситуация изменилась в лучшую сторону, когда С.П.Кузнецовым и его соратниками была предложена серия радиотехнических генераторов, в фазовом пространстве которых были реализованы равномерно гиперболические неблуждающие множества [4], [5], [11]-[13]. Большая часть примеров содержала (динамическую) надстройку над отображением (последования Пуанкаре), переводящего полноторий в себя так, что его образ прокручивался вдоль оси полнотория не менее двух раз. Известно, что если отображение последования Пуанкаре является отображением Смейла полнотория в себя (сжатие в направлении, перпендикулярном оси полнотория, и равномерное растяжение вдоль оси полнотория), то оно имеет соленоидальный гиперболический аттрактор (аттрактор Смейла). Поскольку топологически он локально гомеоморфен произведению канторова множества на отрезок, то аттрактор Смейла относят в список странных аттракторов.

---

[1]Профессор кафедры математики, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

[2]Аспирант кафедры математического анализа, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; nisaenkova@mail.ru

[3]Старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru.

Анализ некоторых работ, в частности, работы [5], показывает, что отображение вдоль оси полнотория не всегда является равномерно растягивающим. Поэтому возникла необходимость исследовать более общий класс диффеоморфизмов полнотория в себя. В [2] был введен такой класс диффеоморфизмов (диффеоморфизмы Смейла-Виеториса), существенная часть которых составляла диффеоморфизмы полнотория в себя (в параграфе 2. мы приводим точное определение). В предположении, что неблуждающее множество имеет гиперболическую структуру, было показано, что кроме соленоидального аттрактора Смейла может быть совокупность конечного набора изолированных периодических орбит и нетривиального нульмерного базисного множества. Возникает естественный вопрос о возможности плавного перехода от одного случая к другому, и о возможности реализации нетривиальных (соленоидальных) базисных множеств в реальных системах.

Цель данной статьи показать, что сколь угодно малым (в C^0-топологии) возмущением отображения Смейла можно получить отображение с нетривиальным нульмерным гиперболическим множеством (см. теорему 3.1.). Построенное возмущение напоминает хирургию Смейла при построении ДА-диффеоморфизма из диффеоморфизма Аносова. Отметим, что оба диффеоморфизма полнотория в себя (как диффеоморфизма Смела, так и его возмущение) Ω-устойчивы. Поэтому не существует аналогичного возмущения, которое будет сколь угодно малым в C^1 топологии.

2. Предварительные сведения

В данном параграфе мы напоминаем необходимые определения и вводим диффеоморфизмы Смейла-Виеториса, включающие классический пример Смейла с гиперболическим соленоидальным аттрактором (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [1]).

2.1. Диффеоморфизмы Смейла-Виеториса

Первые примеры соленоидов были построены Виеторисом [19] в 1927 году и независимо Ван Данцигом [9] в 1930 году, и изучались ими с различных точек зрения. В гиперболическую теорию динамических систем соленоиды ввел Смейл [17], который построил диффеоморфизм полнотория в себя с одномерным растягивающимся аттрактором, являющимся соленоидом. Схематично пример Смейла можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси, лежащей внутри полнотория, и сжатие в направлении, перпендикулярном оси. Затем полученный (промежуточный) полноторий вкладывается в исходный так, чтобы ось промежуточного полнотория прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория. Отображение, индуцируемое на оси полнотория, есть растягивающийся эндоморфизм окружности, который является Ω-устойчивым (даже структурно устойчивым) отображением [16]. Известно [7], что диффеоморфизм Смейла полнотория в себя может быть продолжен до диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме А Смейла, некоторого замкнутого 3-многообразия. Этот результат и пример Смейла естественным образом приводят к следующему обобщению конструкции Смейла.

Рассмотрим полноторий $S^1 \times D^2$, где $S^1 = [0;1]/(0 \sim 1)$ – единичная окружность, наделенная естественной параметризацией $[0;1] \to S^1$, $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ – единичный круг $x^2 + y^2 \leq 1$ в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x, y). Сюрьективное C^1 отображение $g : S^1 \to S^1$ называется *эндоморфизмом.* Эндоморфизм g называется *неособым*, если его производная $Dg \neq 0$. Мы для определенности будем рассматривать сохраняющие ориентацию неособые эндоморфизмы с положительной Dg. Неособый эндоморфизм является иммерсией, принадлежащей классу d-накрытий (т.е., отображений окружности в себя степени d, которые являются локальными гомеоморфизмами). Будем говорить, что диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$, удовлетворяющий аксиоме А Смейла, замкнутого 3-многообразия M^3 принадлежит классу SV[4], если существует вложенный в M^3 полноторий $\mathcal{B}^3$ (далее мы отождествляем полноторий $S^1 \times D^2$ с его вложением $\mathcal{B}^3 \subset M^3$, *базовым* полноторием) такой, что ограничение $f|_{\mathcal{B}^3} \stackrel{\text{def}}{=} F$ является диффеоморфизмом $F : \mathcal{B}^3 \to F(\mathcal{B}^3) \subset \mathcal{B}^3$ на свой образ, который удовлетворяет следующим условиям:

- F имеет вид
$$F(t,z) = (g(t), w(t,z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^2, \tag{2.1}$$
где $g : S^1 \to S^1$ – неособый C^1 эндоморфизм степени $d \geq 2$;

- при фиксированном $t \in S^1$ преобразование $w|_{\{t\}\times D^2} : \{t\} \times D^2 \to \mathcal{B}^3$ является равномерно сжимающим C^1 вложением
$$\{t\} \times D^2 \to int\left(\{g(t)\} \times D^2\right) \tag{2.2}$$
т.е. существуют константы $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ такие, что
$$diam\ (F^n(\{t\} \times D^2)) \leq C\lambda^n diam\ (\{t\} \times D^2),\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

В классическом примере Смейла [17] эндоморфизм g представляет собой линейный растягивающий эндоморфизм $E_d : S^1 \to S^1$ вида $E_d(x) = dx \mod 1$ степени $d \geq 2$. В этом случае неблуждающее множество диффеоморфизма $f|_{\mathcal{B}^3} = F$ совпадает с соленоидом $\cap_{n\geq 0} F^n(\mathcal{B}^3)$. Ключевую роль в доказательстве этого факта играет то, что неблуждающее множество растягивающего эндоморфизма E_d совпадает с окружностью S^1. В общем случае неблуждающее множество диффеоморфизма F принадлежит соленоиду, но не обязательно совпадает с ним [2]. Именно, соленоид может содержать ровно одно нетривиальное нульмерное гиперболическое множество, а также конечное (ненулевое) число стоковых периодических точек и конечное (возможно, нулевое) число седловых изолированных периодических точек.

2.2. Свойства диффеоморфизмов Смейла-Виеториса

Обозначим через $\mathfrak{M}$ множество преобразований $F : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, удовлетворяющих условиям (2.1)-(2.3). Обозначим через $End^1_0(S^1)$ наделенное C^0 топологией пространство сохраняющих ориентацию неособых C^1-эндоморфизмов окружности.

Лемма 2.1. *Пусть $F(t,z) = (g(t), w(t,z)) \in \mathfrak{M}$. Тогда в C^0 топологии существует окрестность $U(g)$ отображения g в пространстве $End^1_0(S^1)$ такая, что для любого $g' \in U(g)$ преобразование $F' = (g', w)$ принадлежит $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Якобиан J отображения F равен $|Dg \cdot J_w|$ и отличен от нуля, так как F – C^1 диффеоморфизм, где J_w – якобиан $w(t,z)$. Поскольку $g' \in End^1_0(S^1)$ имеет положительную производную, то преобразование $F' = (g', w)$ также имеет отличный от нуля якобиан и, следовательно, является локальным диффеоморфизмом. Осталось показать, что в некоторой окрестности $U(g)$ отображения g преобразования $F' = (g', w)$, $g' \in U(g)$, взаимно однозначны.

[4] Аббревиатура SV составлена из первых букв фамилий Smale, Vietoris

Отметим, что так как неособый эндоморфизм g имеет степень $d \geq 2$, то для любой точки $t \in S^1$ полный прообраз $g^{-1}(t)$ состоит из d различных точек. Пусть t_1, t_2, $\ldots$, $t_d \in S^1$ попарно различны и $g(t_1) = \ldots = g(t_d)$. Тогда

$$F(t_i, D^2) \cap F(t_j, D^2) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq d, \tag{2.4}$$

т.е. диски $F(t_1, D^2)$, $\ldots$, $F(t_d, D^2)$ попарно не пересекаются. Положим

$$\alpha_g(t) = \min_{i \neq j}\{|w_i - w_j| \,:\, w_i \in F(\{t_i\} \times D^2),\, w_j \in F(\{t_j\} \times D^2)\}. \tag{2.5}$$

Из (2.4) вытекает, что $\alpha_g(t) > 0$ для любого $t \in S^1$. Покажем, что существует $\alpha_g^* > 0$ такое, что $\alpha_g(t) \geq \alpha_g^*$ для всех $t \in S^1$.

Предположим противное. Тогда существует последовательность t_k такая, что $\alpha(t_k) \to 0$ при $k \to \infty$. Поскольку функция $w(t, z)$ непрерывна, то минимум в правой части (2.5) достигается. Поэтому для каждой точки t_k существуют t_i^k, $t_j^k \in S^1$ и точки z_i^k, $z_j^k \in D^2$ такие, что $\alpha(t_k) = |w(t_i^k, z_i^k) - w(t_j^k, z_j^k)|$, где $g(t_i^k) = g(t_j^k) = t_k$. Не уменьшая общности, можно считать, что последовательности t_k, t_i^k сходятся, $t_k \to t_*$, $t_i^k \to t_1^*$, так как индекс $i = i(k)$ может принимать только значения от 1 до d. Перейдя, если необходимо к подпоследовательности, можно считать, что соответствующие последовательности t_j^k, z_i^k, z_j^k также сходятся, $t_j^k \to t_2^*$, $z_i^k \to z_1^*$, $z_j^k \to z_2^*$. Ясно, что $t^* = g(t_1^*) = g(t_2^*)$.

В силу того, что производная Dg строго положительна и отделена от нуля некоторой положительной константой, число

$$\beta(t) = \min_{t_k, t_j}\{|t_k - t_j| \,:\, g(t_k) = g(t_j) = t,\, t_k \neq t_j\}$$

положительно для любого $t \in S^1$ и непрерывно зависит от t. Поскольку S^1 – компакт, то существует $\beta_* > 0$ такое, что $\beta(t) \geq \beta_*$ для всех t. Поэтому $|t_i^k - t_j^k| \geq \beta_*$ и, следовательно, $t_1^* \neq t_2^*$. Имеем

$$|w(t_1^*, z_1^*) - w(t_2^*, z_2^*)| \leq |w(t_1^*, z_1^*) - w(t_1^k, z_1^k)| + |w(t_1^k, z_1^k) - w(t_2^k, z_2^k)| + |w(t_2^*, z_2^*) - w(t_2^k, z_2^k)|. \tag{2.6}$$

Так как функция $w(t, z)$ равномерно непрерывна, то $|w(t_1^*, z_1^*) - w(t_1^k, z_1^k)|$ и $|w(t_2^*, z_2^*) - w(t_2^k, z_2^k)|$ стремятся к нулю при $k \to \infty$. Поскольку в силу предположения о противном, $|w(t_1^*, z_1^*) - w(t_2^*, z_2^*)|$ также стремится к нулю, то правая часть (2.6) может быть сколь угодно малой. Из $\alpha(t^*) \leq |w(t_1^*, z_1^*) - w(t_2^*, z_2^*)|$ вытекает, что $\alpha(t^*) = 0$, что противоречит тому, что $\alpha_g(t) > 0$ для любого $t \in S^1$.

Учитывая, что точки w_i, w_j в (2.5) имеют вид $w(t_i, z_1)$, $w(t_j, z_2)$, получаем, что

$$|w(t_i, z_1) - w(t_j, z_2)| \geq \alpha_g^*, \quad i \neq j \ \forall z_1, z_2 \in D^2. \tag{2.7}$$

Так как отображение w непрерывно и задано на компактном множестве $S^1 \times D^2$, то w равномерно непрерывно. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что неравенство $|t - s| < \delta$ влечет неравенство $|w(t, z) - w(s, z)| < \varepsilon$ для любых t, $s \in S^1$ и любой точки $z \in D^2$. Положим $\varepsilon = \frac{\alpha_g^*}{3}$. Соответствующее $\delta > 0$ обозначим через δ_*. Таким образом,

$$|t - s| < \delta_* \quad \Rightarrow \quad |w(t, z) - w(s, z)| < \frac{\alpha_g^*}{3}. \tag{2.8}$$

Поскольку g – неособый эндоморфизм, то существует константа $\beta > 0$ такая, что $Dg \geq \beta$. Поэтому существует окрестность $U(g)$ отображения g в пространстве $End_0^1(S^1)$

такая, что для любого $g' \in U(g)$ и любого $t \in S^1$ выполняется следующее свойство. Пусть t_1, t_2, $\ldots$, $t_d \in S^1$ попарно различны и такие, что $t = g(t_1) = \ldots = g(t_d)$. Тогда полный прообраз $(g')^{-1}(t)$ состоит из d точек t'_1, t'_2, $\ldots$, $t'_d \in S^1$, которые можно так перенумеровать, что выполняются неравенства $|t_i - t'_i| < \delta_*$ для всех $i = 1$, $\ldots$, d.

Покажем, что окрестность $U(g)$ является искомой. Предположим, что для $g' \in U(g)$ преобразование $F' = (g', w)$ не является взаимно однозначным, то есть $(g'(s_1), w(s_1, z_1)) = (g'(s_2), w(s_2, z_2))$ для некоторых s_1, $s_2 \in S^1$, z_1, $z_2 \in D^2$. Тогда $g'(s_1) = g'(s_2) = t'$. В силу выбора окрестности $U(g)$, существуют t_1, t_2 такие, что $|t_1 - s_1| < \delta_*$, $|t_2 - s_2| < \delta_*$, $g(t_1) = g(t_2) = t'$. Точки $F(t_1, w(t_1, z_1))$, $F(t_2, w(t_2, z_2))$ принадлежат одному диску $\{t'\} \times D^2$. Отсюда и (2.8) вытекает

$$|w(t_1, z_1) - w(s_1, z_1)| < \frac{\alpha_g^*}{3}, \quad |w(t_2, z_2) - w(s_2, z_2)| < \frac{\alpha_g^*}{3}.$$

Тогда

$$|w(t_1, z_1) - w(t_2, z_2)| \le |w(t_1, z_1) - w(s_1, z_1)| + |w(s_2, z_2) - w(t_2, z_2)| \le \frac{2}{3}\alpha_g^*,$$

что противоречит (2.7). Лемма доказана.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

2.3. Эндоморфизм окружности с канторовым неблуждающем множеством

Первый пример непрерывного эндоморфизма окружности с канторовым неблуждающем множеством был построен Шубом [16]. Хирш [10] указал на то, что подобный эндоморфизм можно сделать аналитическим (но не указал явную формулу). Здесь мы приводим в виде явной формулы 2-параметрическое семейство C^∞ эндоморфизмов с канторовым неблуждающем множеством.

Пусть U_δ – так называемая бамп-функция, то есть функция, удовлетворяющая следующим условиям:

- $U_\delta(x) = 1$ при всех $x \in \left[-\frac{\delta}{2}; +\frac{\delta}{2}\right]$, $0 < \delta \le \frac{1}{4}$;
- $U_\delta(x) = 0$ при всех $|x| \ge \delta$;
- $U'_\delta(x) \ge 0$ при всех $x \in \left[-\delta; -\frac{\delta}{2}\right]$, и $U'_\delta(x) \le 0$ при всех $x \in \left[\frac{\delta}{2}; \delta\right]$.

Зафиксируем натуральное число $d \ge 2$, и положим

$$f_{\varepsilon,\delta}(x) = dx + (-d + \varepsilon)xU_\delta(x) \ \ mod\ 1,$$

где $\varepsilon \in (0; 1)$. Ясно, что $f_{\varepsilon,\delta} : S^1 \to S^1$ определяет 2-параметрическое семейство отображений окружности, которое можно рассматривать как возмущение линейного растягивающего эндоморфизма $E_d(x) = dx\ mod\, 1$.

Т е о р е м а 2.1. *Отображение $f_{\varepsilon,\delta} : S^1 \to S^1$, $0 < \delta \le \frac{1}{4}$, $\varepsilon \in (0; 1)$, является структурно устойчивым неособым эндоморфизмом окружности степени d с канторовым неблуждающем множеством. Более того, $f_{\varepsilon,\delta} \to E_d$ в C^0 топологии при $\delta \to 0$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вне δ-окрестности $V_\delta(0)$ точки $x_0 = 0$ отображение $f_{\varepsilon,\delta}$ совпадает с E_d. Поскольку $f_{\varepsilon,\delta}(V_\delta(0)) = E_d(V_\delta(0))$, то $f_{\varepsilon,\delta}$ является эндоморфизмом степени d.

Покажем, что $f_{\varepsilon,\delta}$ есть неособый эндоморфизм. Для этого найдем его производную

$$f'_{\varepsilon,\delta}(x) = d + (-d+\varepsilon)\left[xU_\delta(x)' + U_\delta(x)\right] = d + (-d+\varepsilon)xU_\delta(x)' + (-d+\varepsilon)U_\delta(x).$$

Из свойств функции U_δ вытекает, что $xU_\delta(x)' \leq 0$. Ясно, что $d + (-d+\varepsilon)U_\delta(x) \geq \varepsilon$. Поэтому $f'_{\varepsilon,\delta}(x) \geq \varepsilon$.

Так как $f'_{\varepsilon,\delta}(0) = \varepsilon \in (0;1)$, то $x_0 = 0$ является гиперболической притягивающей точкой эндоморфизма $f_{\varepsilon,\delta}$. Решая уравнение $dx + (-d+\varepsilon)xU_\delta(x) = x$, получаем, что в δ-окрестности $V_\delta(0)$ имеются две неподвижные точки $\pm x_*$ таких, что $U_\delta(\pm x_*) = \frac{d-1}{d-\varepsilon}$, где $\frac{\delta}{2} < x_* < \delta$. При этом, интервал $(-x_*; x_*)$ принадлежит области притяжения точки x_0 (в частности, ω-предельное множество любой точки из $(-x_*; x_*)$ совпадает с x_0). Отсюда вытекает, что неблуждающее множество отображения $f_{\varepsilon,\delta}$ равно

$$NW(f_{\varepsilon,\delta}) = \{x_0\} \bigcup \left(S^1 \setminus \cup_{k\geq 0} f^{-k}_{\varepsilon,\delta}(-x_*; x_*)\right),$$

и является канторовым множеством.

Покажем, что множество $NW(f_{\varepsilon,\delta})$ гиперболическое, то есть производная $f'_{\varepsilon,\delta}(x)$ на неблуждающем множестве отлична от единицы. В интервале $|x| < x_*$ имеется только одна точка неблуждающего множества $x_0 = 0$, и она гиперболическая. Вне δ-окрестности $V_\delta(0)$ отображение $f_{\varepsilon,\delta}$ совпадает с E_d и, следовательно, $f'_{\varepsilon,\delta}(x) = d \geq 2$. Осталось проверить гиперболичность в δ-окрестности при $|x| \geq x_*$. В $V_\delta(0)$ при $x \geq x_*$ функция $(-d+\varepsilon)U_\delta(x)$ возрастающая, а при при $x \leq -x_*$ – убывающая (здесь мы учитывали, что $-d+\varepsilon < 0$). Поэтому при $|x| \geq x_*$ имеем

$$f'_{\varepsilon,\delta}(x) = d + (-d+\varepsilon)xU'_\delta(x) + (-d+\varepsilon)U_\delta(x) \geq d + (-d+\varepsilon)U_\delta(x_*) + (-d+\varepsilon)xU'_\delta(x) =$$

$$= 1 + (-d+\varepsilon)xU'_\delta(x) > 1.$$

Таким образом, на неблуждающем множестве производная $f'_{\varepsilon,\delta}(x)$ строго больше единицы.

В силу [16], отображение $f_{\varepsilon,\delta}$ полусопряжено эндоморфизму E_d, у которого неблуждающее множество совпадает со всей окружностью. Поэтому периодические точки отображения $f_{\varepsilon,\delta}$ всюду плотны в $NW(f_{\varepsilon,\delta})$. Согласно [14], из гиперболичности $NW(f_{\varepsilon,\delta})$ следует, что эндоморфизм $f_{\varepsilon,\delta}$ структурно устойчивый.

Осталось проверить C^0-близость к E_d при $\delta \to 0$. При этом достаточно проверить это только для $x \in V_\delta(0)$. Имеем

$$|f_{\varepsilon,\delta}(x) - E_d(x)| = |(-d+\varepsilon)xU_\delta(x)| \leq \delta d \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Хирургия Смейла

Пусть $f_{\varepsilon,\delta} : S^1 \to S^1$ – неособый эндоморфизм, удовлетворяющий теореме 2.1.. Положим

$$m = \min_{x\in NW(f_{\varepsilon,\delta})} Df_{\varepsilon,\delta}(x).$$

Согласно теореме 2.1., $m > 1$.

Наряду с декартовыми координатами (x, y) на $\mathbb{R}^2$ будем использовать комплексную переменную $z = x+iy$. Эта переменная в единичном диске $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ будет использоваться для задания отображений базового полнотория $\mathcal{B} = S^1 \times D^2$.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть*

$$F_0(t,z) = \left(E_d(t),\ \lambda z + \frac{1}{2}\exp 2\pi i t\right) \tag{3.1}$$

есть линейный диффеоморфизм Смейла полнотория в себя, где

$$0 < \lambda < \frac{1}{4}\sin\left(\frac{\pi}{d} + \frac{\pi}{4}\right), \quad \lambda \leq \frac{m}{8}. \tag{3.2}$$

Тогда существует SV диффеоморфизм вида

$$F_\delta(t,z) = \left(f_{\varepsilon,\delta}(t),\ \lambda z + \frac{1}{2}\exp 2\pi i t\right) \tag{3.3}$$

с гиперболическим нульмерным неблуждающем множеством такой, что $F_\delta \to F_0$ в C^0 топологии при $\delta \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 2.1., для достаточно малого δ отображение F_δ является диффеоморфизмом полнотория в себя из класса SV, и мы далее будем предполагать такую малость δ. Для простоты обозначим $F_\delta = F$.

Непосредственно из построения вытекает, что для любой точки $y \in S^1$ минимальное расстояние между различными точками из ее прообраза t_k, $t_j \in f_{\varepsilon,\delta}^{-1}(y)$ относительно $f_{\varepsilon,\delta}$ не превосходит $\frac{d+4}{4d}$ (напомним, что $\delta < \frac{1}{4}$),

$$\min_{t_k,t_j}\{|t_k - t_j| \,:\, g_d(t_k) = g_d(t_j),\, t_k \neq t_j\} \leq \frac{1}{d} + \delta \leq \frac{1}{d} + \frac{1}{4} \leq \frac{d+4}{4d}.$$

Непосредственно из (3.1) вытекает, что t-сечение $D_t^2 = \{t\} \times D^2$ под действием F отображается в круглый диск, который мы обозначим через B_t, принадлежащий $D^2_{f_{\varepsilon,\delta}(t)}$. Из (3.1) также следует, что диск B_t имеет радиус λ с центром, лежащим на окружности $|z| = \frac{1}{2}$. Поскольку $\lambda < \frac{1}{4}$, то $B_t \subset int\ D^2_{f_{\varepsilon,\delta}(t)}$. Поэтому $F(\mathcal{B}) \subset int\ \mathcal{B}$. В координатах (t,z) на $\mathcal{B} = S^1 \times D^2$ отображение F имеет якобиан

$$DF(t,z) = \begin{pmatrix} Df_{\varepsilon,\delta}(t) & 0 \\ \pi i \exp 2\pi i t & \lambda I_2 \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

где I_2 – тождественная матрица на $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}^2$). Так как $Df_{\varepsilon,\delta} > 0$ и $\lambda > 0$, то F есть локальный диффеоморфизм. Для доказательства того, что F есть (глобальный) диффеоморфизм рассмотрим попарно различные t_1, t_2, $\ldots$, $t_d \in S^1$ такие, что $f_{\varepsilon,\delta}(t_1) = \ldots = f_{\varepsilon,\delta}(t_d)$. Центры O_1, $\ldots$, O_d дисков B_{t_1}, $\ldots$, B_{t_d} соответственно лежат на окружности $|z| = \frac{1}{2}$. Минимальный угол между лучами, проведенными из центра диска $D^2_{f_{\varepsilon,\delta}(t_k)}$ и точками O_1, $\ldots$, O_d, равен $2\pi\frac{d+4}{4d}$. Поэтому минимальное расстояние между O_1, $\ldots$, O_d равно $\sin\left(\pi\frac{d+4}{4d}\right)$. Радиусы дисков B_{t_1}, $\ldots$, B_{t_d} равны λ. Отсюда и из (3.2) следует, что диски B_{t_1}, $\ldots$, B_{t_d} попарно не пересекаются. Учитывая (3.1), получаем, что F является диффеоморфизмом $\mathcal{B} \to F(\mathcal{B})$, удовлетворяющий условиям (2.1)-(2.3). Таким образом, $F \in \mathfrak{M}$. Осталось доказать, что на $NW(F)$ имеется гиперболическая структура.

Касательное пространство $T(\mathcal{B}) = T(S^1 \times D^2)$ полнотория $\mathcal{B}$ естественным образом представимо в виде суммы $T(\mathcal{B}) = T(S^1) \oplus T(D^2)$. В каждой точке $(t,z) \in \mathcal{B}$ касательная плоскость $T_{(t,z)}(\mathcal{B})$ есть сумма одномерного $T_t(S^1) = \mathbb{E}^1 \cong \mathbb{R}$ и двумерного $T_z(T^2) = \mathbb{E}^2 \cong \mathbb{R}^2$ линейных пространств. Из (3.4) вытекает, что подрасслоение $\mathbb{E}^2$ инвариантно относительно DF:

$$DF_p\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \lambda \vec{v}_{23} \end{pmatrix},$$

где $\vec{v}_{23} \in \mathbb{E}^2$. Более того, поскольку $|\lambda| < 1$, то $\mathbb{E}^2$ является устойчивым подрасслоением, $E^s = \mathbb{E}^2$.

Отметим, что подрасслоение $\mathbb{E}^1$ не инвариантно относительно DF. Покажем, что, тем не менее, на множестве $NW(F)$ диффеоморфизм F имеет гиперболическую структуру. Пусть $q = (t, z) \in NW(F)$. Тогда $t \in NW(f_{\varepsilon,\delta})$. Известно, неблуждающее множество $NW(f_{\varepsilon,\delta})$ есть объединение канторова множества $\Sigma_{f_{\varepsilon,\delta}}$ с изолированной притягивающей (гиперболической) неподвижной точкой $x_0 \in S^1 \setminus \Sigma_{f_{\varepsilon,\delta}}$. Возможны два случая: 1) $t = x_0$; 2) $t \in \Sigma_{f_{\varepsilon,\delta}} = \Omega$. В случае 1), точка q является изолированной (неподвижной) точкой неблуждающего множества $NW(F)$. Из (3.4) вытекает, что q – гиперболическая притягивающая неподвижная точка.

В случае 2) рассмотрим в $T_{NW(F)}(\mathcal{B}) \subset T(\mathcal{B}) = \mathbb{E}^1 \oplus \mathbb{E}^2$ семейство конусов

$$C_q^u = \{\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} : \vec{v}_1 \in T_t(S^1),\ \vec{v}_{23} \in \mathbb{E}^2_z, \quad |\vec{v}_1| \geq \frac{m}{4}|\vec{v}_{23}|\}.$$

Сперва покажем, что $DF(C_q^u) \subset C_{F(q)}^u$. Пусть $\binom{\vec{v}_1}{\vec{v}_{23}} \in C^u$. В силу (3.4),

$$DF\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1' \\ \vec{v}_{23}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Df_{\varepsilon,\delta}(t)\vec{v}_1 \\ \pi i \vec{v}_1 \exp 2\pi i t + \lambda \vec{v}_{23} \end{pmatrix}.$$

Тогда $|\vec{v}_{23}'| \leq |\pi i \exp 2\pi i t \vec{v}_1| + \lambda|\vec{v}_{23}| = \pi|\vec{v}_1| + \lambda|\vec{v}_{23}|$. Учитывая неравенство $\lambda \leq \frac{m}{8}$, получаем

$$|\vec{v}_1'| = Df_{\varepsilon,\delta}(t)|\vec{v}_1| \geq \frac{m}{4}(4|\vec{v}_1|) \geq \frac{m}{4}\left(\pi|\vec{v}_1| + \frac{1}{2}|\vec{v}_1|\right) \geq$$

$$\geq \frac{m}{4}\left(\pi|\vec{v}_1| + \frac{m}{8}|\vec{v}_{23}|\right) \geq \frac{m}{4}\left(\pi|\vec{v}_1| + \lambda|\vec{v}_{23}|\right) \geq \frac{m}{4}|\vec{v}_{23}'|.$$

Таким образом, $\binom{\vec{v}_1'}{\vec{v}_{23}'} \in C_{F(q)}^u$. Отсюда

$$DF^k(C^u_{F^{-k}(q)}) \subset DF^{k-1}(C^u_{F^{-k+1}(q)}) \subset \cdots \subset DF(C^u_{F^{-1}(q)}) \subset C_q^u \quad \text{для любого} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Чтобы показать, что пересечение итераций конуса C_q^u относительно DF есть прямая, рассмотрим

$$\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_{23} \end{pmatrix} \in C^u_{F^{-k}(q)}, \quad \begin{pmatrix} \vec{v}_1^k \\ \vec{v}_{23}^k \end{pmatrix} = DF^k\begin{pmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \vec{w}_1^k \\ \vec{w}_{23}^k \end{pmatrix} = DF^k\begin{pmatrix} \vec{w}_1 \\ \vec{w}_{23} \end{pmatrix}.$$

Положим $|\vec{v}_1^j| = v_1^j$, $|\vec{w}_1^j| = w_1^j$, $\vec{v}_1 = (v_1, 0)$, $\vec{w}_1 = (w_1, 0)$, $v_1 > 0$, $w_1 > 0$. Тогда

$$\left|\frac{\vec{v}_{23}^1}{v_1^1} - \frac{\vec{w}_{23}^1}{w_1^1}\right| = \left|\frac{\pi i \vec{v}_1 \exp 2\pi i t + \lambda \vec{v}_{23}}{Df_{\varepsilon,\delta}(t)v_1} - \frac{\pi i \vec{w}_1 \exp 2\pi i t + \lambda \vec{w}_{23}1}{Df_{\varepsilon,\delta}(t)w_1}\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{\pi i \exp 2\pi i t(w_1\vec{v}_1 - v_1\vec{w}_1)}{Df_{\varepsilon,\delta}(t)v_1 w_1} + \frac{\lambda}{m}\left(\frac{\vec{v}_{23}}{v_1} - \frac{\vec{w}_{23}}{w_1}\right)\right| = \frac{\lambda}{m}\left|\frac{\vec{v}_{23}}{v_1} - \frac{\vec{w}_{23}}{w_1}\right|,$$

так как $w_1\vec{v}_1 - v_1\vec{w}_1 = |\vec{w}_1|\vec{v}_1 - |\vec{v}_1|\vec{w}_1 = 0$. Поэтому

$$\left|\frac{\vec{v}_{23}^k}{v_1^k} - \frac{\vec{w}_{23}^k}{w_1^k}\right| = \left(\frac{\lambda}{m}\right)^k \left|\frac{\vec{v}_{23}}{v_1} - \frac{\vec{w}_{23}}{w_1}\right|.$$

Правая часть стремится к нулю при $k \to \infty$, поскольку $\frac{\lambda}{m} < 1$ в силу (3.2). Поэтому последовательность $\frac{\vec{v}_{23}^k}{v_1^k}$ является фундаментальной и, следовательно, имеет предел, скажем $\vec{V}$. Не уменьшая общности, для простоты можно считать, что $v_1 = |\vec{v}_1| = 1$, $v_{23} = |\vec{v}_{23}| = 1$. Тогда единичный вектор $\vec{n}_k = \frac{\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k}{|\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k|}$, который определяет направление вектора $\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k = v_1^k \vec{v}_1 + v_{23}^k \vec{v}_{23}$ имеет предел $\frac{\vec{v}_1 + \vec{V}}{|\vec{v}_1 + \vec{V}|}$. Отсюда вытекает, что пересечение итераций конуса C_q^u относительно DF есть одномерное подпространство $\mathbb{E}^u$. Так как проекция вектора $\vec{v}_1^k + \vec{v}_{23}^k$ на вектор $\vec{v}_1$ равна $v_1^k \geq m^k v_1$, то $\mathbb{E}^u$ является неустойчивым подрасслоением, трансверсальным $E^s = \mathbb{E}^2$. Отсюда следует, что на $NW(F)$ диффеоморфизм F имеет гиперболическую структуру.

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039, а также в рамках гранта РФФИ № 11-01-12056 офи-м.

Список литературы

1. Аносов Д.В. Исходные понятия. В сб. серии "Современные проблемы математики Фундаментальные направления (Итоги науки и техники), том 1. – 1985. Динамические системы – 1 (под ред. Д. В. Аносова), 156–178.

2. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В. О нульмерных соленоидальных базисных множествах. – Матем. сб. 2011. 202, № 3. – 47–68.

3. Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации. – УФН. 2009. 179, № 12. – 1281–1310.

4. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике. – УФН. 2011. 181, № 2. – 121–149.

5. Кузнецов С.П., Пономаренко В.И. О возможности реализации странного аттрактора типа Смейла-Вильямса в радиотехническом генераторе с запаздыванием. – Письма в ЖТФ. 2008. 34, вып. 18. – 1–8.

6. Пиковский А.С., Рабинович М.И. Простой автогенератор со стохастическим поведением. – ДАН СССР. 1978. 239, № 2. – 301–304.

7. Bothe H. The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds. – Math. Nachr. 1983. 112. – 69–102.

8. Cuomo K.M., Oppenheim A.V. Synchronized chaotic circuit and systems for communucations. – MIT Reserch Laboratory of Electronic Technical Report. 1992. no. 575.

9. van Danzig D. Über topologisch homogene Kontinua. – Fund. Math. 1930. 14. – 102–105.

10. Hirsch M.W. A stable analytic foliation with only exceptional minimal sets. – Lect. Notes in Math. 1875. 468. – 9–10.

11. Kuztetsov S.P. Example of a physical system with a hyperbolic attractor of the Smake-Williams type. – Physical Rev. Lett. 2005. 95. – 144101.

12. Kuztetsov S.P., Pikovsky A. Autonomous coupled oscillators with hyperbolic strange attractors. – Physical D. 2007. 232. – 87–102.

13. Kuztetsov S.P., Sataev I.R. Hyperbolic attractor in a system of coupled non-autonomous van der Pol oscilators: Numerical test for expanding and countracting cones. – Physical Letters A. 2007. 365. – 97–104.

14. Nitecki Z. Nonsingular endomorphisms of the circle. – Proc. Symp. Pure Math. 1970. 14. – 203–220.

15. Pecora L.M., Carroll T.L. Synchronization in chaotic systems. – Phys. Rev. Lett. 1990. 64. – 821.

16. Shub M. Endomorphisms of compact differentiable manifolds. – Amer. Journ. Math. 1969. 91. – 175–199.

17. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73. – 747–817. Имеется перевод: УМН. 1970. 25. – 113–185.

18. Strogatz S.H. Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. – Perseus Books, Massachusetts.

19. Vietoris L. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Addildungen. – Math. Ann. 1927. 97. – 454–472.

On bifurcation in models of hyperbolic noise

© E. V. Zhuzhoma[5], N. V. Isaenkova[6], V. S. Medvedev[7]

Abstract. We prove that arbitrarily small (in C^0-topology) perturbation maps of Smale can get a map with a non-trivial zero-dimensional hyperbolic set. The resulting map can be used in information transmission systems with complete chaotic synchronization.
Key Words: hyperbolic non-wandering sets, Smale-Williams diffeomorphisms, Smale surgery, synchronization of chaotic oscillators

[5]Professor of Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[6]Aspirant faculty of mathematical analysis, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; nisaenkova@mail.ru.

[7]Senior Staff Scientist Department of differential equations, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru.