

УДК 534.113

Сохранение частот колебаний трубопровода при изменении параметров жидкости

© Г. Ф. Сафина¹

Аннотация. В статье исследовано влияние параметров жидкости на частоты его изгибных. Предложен метод, с помощью которого можно определять закрепления трубопровода, позволяющие сохранять заданные частоты его колебаний.

Ключевые слова: колебания, закрепления, трубопровод с жидкостью, собственные частоты, сохранение частот.

1. Введение

Решение проблемы сохранения заданных частот колебаний трубопровода с жидкостью важно в связи с увеличением техногенных катастроф и опасностями, связанными с изношенностью основных фондов. Исследования подобной проблемы тесно связаны с прямой задачей определения влияния характеристик жидкости и закреплений трубопровода на частоты его колебаний и обратной задачей по диагностированию закреплений трубопровода.

Часто колебания трубопроводов могут приводить к дребезжанию, лишнему шуму, вибрациям, что связано с нахождением спектра частот в опасном для здоровья человека диапазоне. Для изменения частот колебаний трубопровода не всегда бывает целесообразно менять его длину или же прикреплять сосредоточенные массы. Поэтому возникает задача определения таких закреплений трубопровода, которые обеспечивали бы безопасный диапазон частот его колебаний. Именно подобному вопросу сохранения безопасных частот колебаний трубопровода и посвящена представленная работа.

Прямые задачи по колебательным процессам в механических системах рассмотрены во многих классических учебниках, таких как [1], [2]. Влияние ряда краевых условий на величины собственных значений свободных колебаний полых труб рассмотрено, например, в работе [1]. Аналогичные зависимости собственных частот колебаний трубопровода с жидкостью от таких краевых условий, как защемления, шарнирные опирания, исследованы в работах [2], [4]. Однако обратное влияние — влияние собственных частот на краевые условия — в этих работах не исследовалось. К тому же в них рассматриваются лишь приближенные методы (например, методы Галеркина и Рэлея-Ритца), которые не применимы для решения поставленной здесь задачи сохранения частот колебаний трубопровода.

Задачам диагностирования также посвящено много работ, например, работа [5].

В отличие от всех этих работ по диагностике, в данной работе отыскиваются не форма области или местоположение объекта, а определяются вид и параметры закрепления, сохраняющие безопасные частоты колебаний трубопровода. Причем на вид закрепления, соответствующего данному диапазону частот колебаний трубы, влияют такие параметры протекающей жидкости, как скорость, плотность, внутреннее давление.

Отличается рассматриваемая в работе задача и от обратных задач, в которых требуется восстановить коэффициенты дифференциального уравнения и краевых условий и в

¹Доцент кафедры математического моделирования, Нефтекамский филиал Башкирского государственного университета, г. Нефтекамск; Safinagf@mail.ru

качестве данных восстановления краевых условий используется не один спектр (как в данной работе), а несколько спектров или же другие дополнительные спектральные данные (например, спектральная функция, функция Вейля или так называемые весовые числа). К тому же основной целью обратных задач является восстановление коэффициентов в уравнении, а не в краевых условиях.

Цель же настоящей работы состоит в восстановлении краевых условий задачи с известными коэффициентами в уравнении по одному спектру. Подобные обратные задачи акустической диагностики (по известному спектру частот колебаний) закрепленных струн, мембран, стержней, пластин, полых труб, труб с жидкостью, валов рассматривались во многих работах автора статьи. В продолжение исследований работ [2], [3], [4] в данной работе исследовано влияние параметров жидкости на частоты колебаний трубопровода, и решена задача сохранения безопасных частот колебаний при изменениях параметров жидкости.

2. Влияние параметров жидкости на частоты колебаний трубопровода

Задача о свободных колебаниях узкого трубопровода, заполненной несжимаемой жидкостью сводится к дифференциальному уравнению в частных производных [2]:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m + \tilde{m}) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\tilde{m} V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \tilde{m} \left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь

$$I = \frac{\pi}{4} (r^4 - r_1^4), \quad m = \pi (r^2 - r_1^2) \rho, \quad \tilde{m} = \pi r_1^2 \rho_0,$$

где I — момент инерции трубчатого сечения, EI — жесткость трубы, p_0 — критическое внутреннее давление, m и \tilde{m} — массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины l трубы, r и r_1 — радиусы внешнего и внутреннего поперечного сечения, V_0 — скорость движения жидкости, ρ — плотность материала трубы, ρ_0 — плотность жидкости, x — координата вдоль оси трубы, t — время.

Выражение для прогиба, удовлетворяющее условиям на концах трубки в виде [4] $w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$, принято в форме

$$w = \sum_{s=1}^{\infty} W_s \sin \frac{s\pi}{l} x e^{i\omega t}.$$

Решение задачи найдено приближенно по методу Бубнова-Галеркина.

В работе [3] нами рассмотрен другой подход к решению данной задачи. С помощью безразмерных переменных

$$\tilde{x} = x/l, \quad \tilde{w} = w/r, \quad \tilde{t} = t/\tau,$$

где $\tau = l^2 \sqrt{\frac{m+\tilde{m}}{EJ}}$, уравнение (1) сведено к дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^4 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^4} + a \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x}^2} + 2b \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{x} \partial \tilde{t}} + \frac{\partial^2 \tilde{w}}{\partial \tilde{t}^2} = 0. \quad (2.2)$$

Рассматривая выражение для прогиба в виде $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}) = X(\tilde{x}) e^{i\omega\tilde{t}}$, последнее уравнение разделено относительно переменных \tilde{x} и \tilde{t} . Получено линейное дифференциальное уравнение

$$X^{(4)} + aX'' + 2bi\omega X' - \omega^2 X = 0, \quad (2.3)$$

линейно независимыми решениями которого являются функции

$$X_j = X_j(\tilde{x}, \omega) = e^{\lambda_j \tilde{x}}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$ — различные корни характеристического уравнения, ω — безразмерная собственная частота колебаний. В работе [3] рассмотрены краевые условия, учитывающие любые закрепления трубы. Здесь мы рассмотрим различные виды упругого закрепления и примем краевые условия к уравнению (2.3) в виде:

$$\begin{aligned} U_1(X) &= X(0) - c_1 X'''(0) = 0, \\ U_2(X) &= X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= X(l) + c_2 X'''(l) = 0, \\ U_4(X) &= X''(l) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Коэффициенты c_1 и c_2 линейных форм $U_1(X)$, $U_3(X)$ характеризуют величины относительной жесткости на изгиб пружин, с которыми упруго закреплены соответственно левый и правый концы трубопровода.

Подставляя решения уравнения (2.3) в краевые условия (2.4), получим систему уравнений, характеристический детерминант которой примет вид:

$$D = \begin{vmatrix} 1 - c_1 \lambda_1^3 & 1 - c_1 \lambda_2^3 & 1 - c_1 \lambda_3^3 & 1 - c_1 \lambda_4^3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \lambda_4^2 \\ e^{\lambda_1} (1 + c_2 \lambda_1^3) & e^{\lambda_2} (1 + c_2 \lambda_2^3) & e^{\lambda_3} (1 + c_2 \lambda_3^3) & e^{\lambda_4} (1 + c_2 \lambda_4^3) \\ \lambda_1^2 e^{\lambda_1} & \lambda_2^2 e^{\lambda_2} & \lambda_3^2 e^{\lambda_3} & \lambda_4^2 e^{\lambda_4} \end{vmatrix}.$$

Приравнивая определитель к нулю, получим следующее частотное уравнение

$$c_1 f_1(\lambda_j) - c_2 f_2(\lambda_j) - c_1 c_2 f_3(\lambda_j) + f_4(\lambda_j) = 0, \quad (2.5)$$

где функции $f_k(\lambda_j)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) выражаются в виде произведений, сумм и разностей $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$ и показательных функций от $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$. Из уравнения (2.5) при различных значениях параметров c_1 , c_2 краевых условий (2.4) определяются собственные частоты изгибных колебаний трубопровода.

Исследуем влияние на значения собственных частот изгибных колебаний трубопровода параметров жидкости, таких, как внутреннее давление, скорость и плотность.

Рассмотрим зависимость собственных частот колебаний трубы от изменения внутреннего давления в трубопроводе при условии не протекания жидкости (т.е. при $V_0 = 0$). В этом случае в дифференциальном уравнении (2.3) коэффициент $b = 0$. Зададим следующие параметры системы (трубопровод – жидкость):

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,0095 \text{ м}, \quad r = 0,01 \text{ м}, \quad l = 5 \text{ м}, \\ \rho &= 2,7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad V_0 = 0 \text{ м/с}, \quad \rho_0 = 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ E &= 6,9 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь в качестве материала трубы рассматривается металлопластик, а в качестве жидкости — вода. Найдем максимальное значение внутреннего давления p_0 , которое может привести к разрыву трубы. Это значение определяется формулой [5]:

$$p_{\max} = \sigma (r - r_1) / r. \quad (2.7)$$

Для принятых выше параметров

$$r - r_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}, \quad \sigma = 1800 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2,$$

тогда значение максимально допустимого давления равно $p_{\max} = 90 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$.

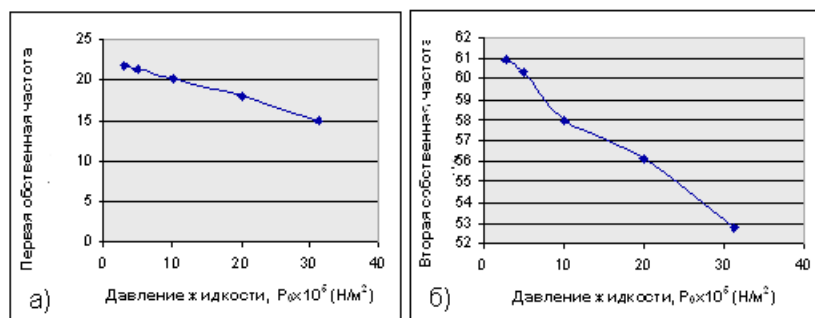
Поставим к уравнению (2.3) краевые условия в виде

$$\begin{aligned} U_1(X) = X(0) - X'''(0) = 0, & \quad U_2(X) = X''(0) = 0, \\ U_3(X) = X(1) + X'''(1) = 0, & \quad U_4(X) = X''(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Эти краевые условия, как было сказано, означают упругие закрепления обоих концов трубы пружинами с относительными жесткостями на изгиб, равными единице. Будем вычислять значения собственных частот колебаний трубопровода, меняя давление p_0 , которое оказывает жидкость на стенки трубы, оставляя остальные параметры системы неизменными. Как изменятся при этом собственные частоты изгибных колебаний трубопровода?

Результаты решений уравнения $\Delta(\omega_k) = 0$ при параметрах системы (2.6) и краевых условиях (2.8) рассмотрим на графиках и таблицах.

На рисунке 2.1 (а) дана зависимость первой собственной частоты колебаний трубы от внутреннего давления жидкости. Видно, что с увеличением давления, первая собственная частота ω_1 уменьшается. На рисунке 2.1 (б) подобная зависимость рассмотрена для второй собственной частоты колебаний трубопровода.



Р и с у н о к 2.1

Зависимость значений первой (а), второй (б) собственных частот колебаний от давления жидкости для задачи (2.3), (2.8) при параметрах (2.6) системы (трубопровод – жидкость)

Такое изменение касается не только первых двух собственных частот, но и всех последующих частот изгибных колебаний трубопровода. В таблице 2.1 приведены значения пяти собственных частот колебаний трубы, соответствующие увеличивающимся значениям внутреннего давления жидкости в трубе для рассматриваемой выше задачи.

Установлено, что подобная зависимость собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления жидкости справедлива при любых параметрах системы (трубопровод – жидкость). Кроме того, увеличение внутреннего давления жидкости ведет к уменьшению частот колебаний трубы не только при упругих закреплениях трубы, но и при других видах закреплений (свободных опорах, плавающих заделках и т. п.). На рисунке 2.2 (а, б), например, показаны зависимости первой и второй собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления жидкости при шарнирных опорах трубы

$$\begin{aligned} U_1(X) = X(0) = 0, & \quad U_2(X) = X''(0) = 0, \\ U_3(X) = X(1) = 0, & \quad U_4(X) = X''(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

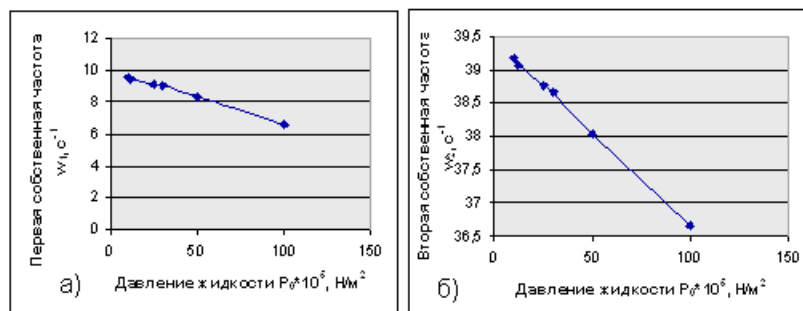
Таблица 2.1 – Зависимость частот изгибных колебаний трубы от давления жидкости для задачи (2.3), (2.8) при параметрах (2.6) системы (трубопровод – жидкость)

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
$p_0 = 2,9 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	21,82	60,92	120,08	199,00	297,67
$p_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	21,39	60,35	119,46	198,35	297,00
$p_0 = 10 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	20,35	58,00	118,00	198,83	295,44
$p_0 = 20 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	18,04	56,14	114,99	193,71	292,25
$p_0 = 31,3 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	15,03	52,78	111,53	190,18	288,66

и при параметрах

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,01 \text{ м}, & r &= 1,08 r_1, & l &= 1 \text{ м}, \\ \rho &= 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, & V_0 &= 0 \text{ м/с}, & \rho_0 &= 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ E &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

системы (трубопровод – жидкость). Параметры (2.10) определяют в качестве материала трубы – сталь, в качестве жидкости – воду. Максимальное значение давления, которое может привести к разрыву трубы равно $p_{\max} = 422 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ (при $r - r_1 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ и $\sigma = 5700 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$).



Р и с у н о к 2.2

Зависимость значений первой (а), второй (б) собственных частот от давления жидкости для задачи (2.3), (2.9) при параметрах (2.10) системы (трубопровод – жидкость)

Заметим также, что обратная зависимость значений собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления справедлива и в случае протекания жидкости по трубопроводу.

Исследуем теперь зависимость частот колебаний трубы от таких параметров жидкости, как скорость и плотность потока. Для этого рассмотрим задачу с дифференциальным уравнением (2.3) и краевыми условиями

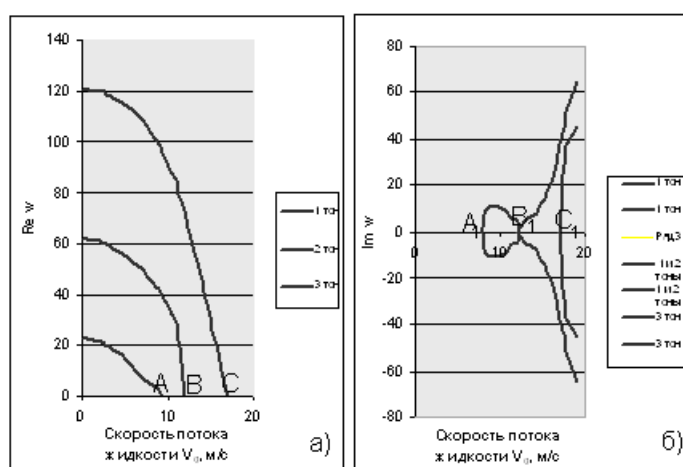
$$\begin{aligned} U_1(X) &= X(0) - 3X'''(0) = 0, & U_2(X) &= X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= X(1) + 3X'''(1) = 0, & U_4(X) &= X''(1) = 0, \end{aligned} \quad (2.11)$$

которые означают упругие закрепления обоих концов трубы пружинами с относительными жесткостями на изгиб, равными трем. Пусть имеются параметры (2.10) системы при давлении жидкости $p_0 = 170 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$. Рассмотрим влияние скорости потока жидкости на собственные формы колебаний трубы при неизменных значениях остальных параметров системы.

Исследования прямой спектральной задачи показывают, что увеличение скорости V_0 потока жидкости ведет к уменьшению значений ω_k собственных частот изгибных колебаний цилиндрической оболочки.

Известно, что если для какой-либо собственной частоты, мнимая часть равна нулю, и одновременно действительная часть равна нулю, то это отвечает порогу дивергенции, т.е. наличию статической потери устойчивости [4]. Исследуя изменения действительной и мнимой частей собственных частот ω_k можно также установить порог флаттера для данной упругой системы.

На рисунке 2.3 представлены значения $Re \omega_k$ и $Im \omega_k$ для первых трех тонов колебаний системы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (2.3), (2.11) при параметрах системы (2.6) и внутреннем давлении жидкости $p_0 = 0.5 \times 10^3 \text{ Н/м}^2$. На оси ординат рисунка 2.3 (а) отложены значения $Re \omega_k$ системы (трубопровод – жидкость) при упругих закреплениях (2.11) в отсутствие течения жидкости $\omega_1 = 21, 203$, $\omega_2 = 61, 502$, $\omega_3 = 120, 729$.



Р и с у н о к 2.3

Частотные годографы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (2.3), (2.11) при параметрах (2.6) системы (трубопровод – жидкость)

Остановимся на частотных годографах рисунка 2.3 подробнее. Видим, что увеличение скорости V_0 потока жидкости ведет к уменьшению значений собственных частот. При достижении значения скорости $V_0 = 9,4 \text{ м/с}$ находим, что $Re \omega_1 = 0$ (точка A), кроме того по рисунку 2.3 (б) значение $Im \omega_1 = 0$ (точка A_1).

Таким образом, мы имеем порог дивергенции для первой формы колебаний ω_1 , (точки A и A_1). При дальнейшем возрастании скорости потока жидкости можно отметить на оси абсцисс точки, отвечающие порогу дивергенции для второй формы (точки B и B_1) и третьей формы (C и C_1) колебаний трубы.

Дальнейшее же увеличение скорости потока за точкой B приводит к флаттеру, объединяющему первую и вторую формы колебаний. Таким образом, здесь мы имеем классический флаттер для рассматриваемой задачи при увеличении скорости потока жидкости. Собственные частоты ω_k становятся комплексно сопряженными, что и отражено на рисунке 2.3 (б).

Если, как и в работе [4], рассматривать безразмерную скорость U и считать внутреннее давление p_0 жидкости равным нулю, то для трубы с заземленными концами и на свободных опорах получаются те же результаты, что и в указанной работе. А именно, для трубы с заземленными концами порог дивергенции для первого тона колебаний отвечает значению $U = 2\pi$, а порог флаттера соответствует величине U , чуть меньшей 3π .

Причем при отсутствии течения жидкости имеем

$$\omega_1 = 22,373, \quad \omega_2 = 61,673, \quad \omega_3 = 120,903,$$

что отвечает квадратам соответствующих собственных значений задачи для балки с заземленными концами [6].

Для трубы же, как балки с шарнирно опертыми концами порог дивергенции отвечает значениям $U = \pi k$, где $k = 1, 2, 3$ и т.д., а порог флаттера соответствует величине U , несколько превышающей 2π .

Обратные зависимости значений собственных частот колебаний трубы с жидкостью при упругих закреплениях аналогичны подобной зависимости при заземлениях и шарнирных опорах указанной выше работы с разницей в значениях порогов дивергенций и флаттера. Например, для задачи (2.3), (2.11) при параметрах (2.6) системы имеем: порог дивергенции для первой формы колебаний соответствует величине U , чуть большей 2π , а порог флаттера соответствует U , несколько превышающей 3π .

Аналогичные результаты получены в исследованиях спектра частот колебаний трубопровода при упругих закреплениях трубы пружинами с другими относительными жесткостями на изгиб.

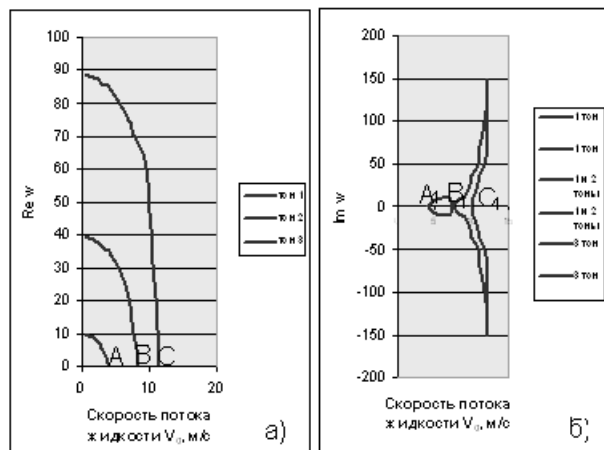
Проведенные вычисления позволяют сделать вывод о том, что при различных видах упругих закреплений пороги дивергенции отвечают следующим значениям U безразмерной скорости: $2\pi < U < 3\pi$ — порог дивергенции для первой собственной частоты, $3\pi < U < 4\pi$ — для второй собственной частоты, $4\pi < U < 5\pi$ — для третьей собственной частоты и т.д.; порог флаттера соответствует значению U , несколько превышающей 3π .

Проведены также исследования по влиянию скорости потока жидкости на частоты изгибных колебаний трубы при таких закреплениях, как свободные опоры, заделки. Получено, что и при этих видах закреплений увеличение скорости потока жидкости ведет к уменьшению значений форм колебаний трубы. Например, на рисунке 2.4 (а, б) приведены частотные годографы для трубы со свободными концами

$$\begin{aligned} U_1(X) = X'''(0) = 0, & \quad U_2(X) = X''(0) = 0, \\ U_3(X) = X'''(1) = 0, & \quad U_4(X) = X''(1) = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

при параметрах (2.6) системы (трубопровод – жидкость).

Здесь точками A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 отмечены пороги дивергенции соответственно для первой, второй, третьей форм колебаний. Этим же порогам отвечают соответственно следующие значения скорости потока жидкости $V_0 = 4,1 \text{ м/с}$, $V_0 = 7,5 \text{ м/с}$, $V_0 = 11,3 \text{ м/с}$. Флаттеру, объединяющему первую и вторую формы колебаний отвечает скорость $V_0 = 7,5 \text{ м/с}$.



Р и с у н о к 2.4

Частотные годографы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (2.3), (2.12) при параметрах (2.6) системы (трубопровод – жидкость)

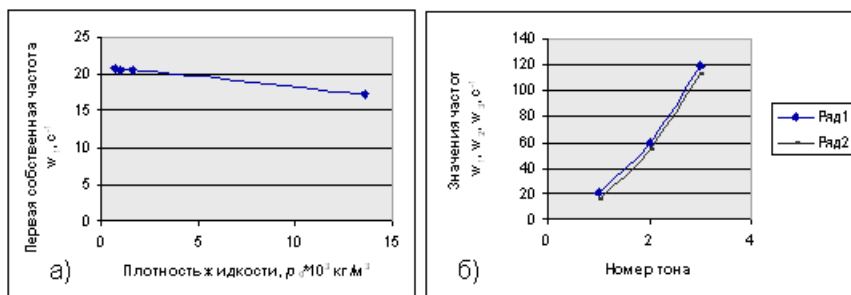
Таким образом, увеличение скорости потока жидкости при любых закреплениях концов трубопровода ведет к уменьшению собственных частот его изгибных колебаний.

Исследуем теперь влияние на частоты колебаний трубы плотности жидкости. Рассмотрим задачу (2.3), (2.8) при следующих параметрах системы

$$\begin{aligned}
 r_1 &= 0,0095 \text{ м}, & r &= 0,01 \text{ м}, & \rho &= 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\
 V_0 &= 5 \text{ м/с}, & E &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, & l &= 5 \text{ м}, \\
 p_0 &= 1,78 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2.
 \end{aligned}
 \tag{2.13}$$

Будем вычислять собственные значения частот колебаний при увеличении плотности жидкости и неизменных значениях остальных параметров системы. Результаты, полученные по решениям прямых задач, продемонстрируем снова на графиках и таблицах. Для указанной выше задачи на рисунке 2.5 (а) показан график зависимости значений первой собственной частоты ω_1 колебаний трубопровода от различных значений ρ_0 плотности жидкости.

По графику видно, что при увеличении плотности жидкости первая собственная частота колебаний трубопровода уменьшается. Вычисления показывают, что увеличение плотности жидкости ведет к уменьшению не только первой собственной частоты колебаний трубопровода, но и всех значений из спектра частот его колебаний.



Р и с у н о к 2.5

Зависимость первой собственной частоты колебаний трубы от плотности жидкости (а) и изменение значений первых трех тонов колебаний трубы при различных значениях плотности жидкости (б)

На рисунке 2.5 (б), например, рассмотрен график изменения значений первых трех собственных частот колебаний трубы в зависимости от плотности потока жидкости. Здесь ряду 1 соответствуют значения первых трех частот при $\rho_0 = 0,71 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$, ряду 2 — при $\rho_0 = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Если же увеличивать одновременно скорость потока жидкости и плотность, то темп падения частот колебаний будет резче. Например, для задачи (2.3), (2.8) при параметрах системы (2.13) будем увеличивать не только плотность жидкости, но и ее скорость. Результаты вычислений прямых задач представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2 – Зависимость частот колебаний от скорости и плотности потока жидкости для задачи (2.3), (2.8) при параметрах (2.13) системы

	ω_1	ω_2	ω_3
$\rho_0 = 0,71 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, V_0 = 1 \text{ м/с}$	20,92	59,94	119,05
$\rho_0 = 1,59 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, V_0 = 10 \text{ м/с}$	18,82	57,56	116,89

Таким образом, установлено, как на значения собственных частот колебаний трубопровода с жидкостью влияют меняющиеся параметры потока жидкости. По решению прямой спектральной задачи (2.3), (2.9) при различных параметрах системы (трубопровод – жидкость) установлено, что на значения собственных частот колебаний трубопровода с жидкостью влияют меняющиеся параметры потока жидкости. Результаты вычислений показывают, что при увеличении как скорости потока жидкости, так и ее плотности значения собственных частот колебаний трубопровода уменьшаются.

Проведенное исследование важно для решения проблемы сохранения заданного диапазона частот колебаний трубы при изменениях параметров жидкости.

3. Задача сохранения заданных частот колебаний

Обратная задача диагностирования закреплений трубопровода по спектру частот его колебаний, впервые поставлена и решена в работе [3]. В ней рассмотрен общий метод восстановления любых краевых условий задачи по 9-ти значениям из спектра частот колебаний трубопровода с непротекающей жидкостью. В продолжение исследований поставим к прямой задаче задачу сохранения частот: по известным параметрам системы (трубопровод-жидкость) и собственным частотам свободных изгибных колебаний трубы найти параметры ее упругих закреплений, сохраняющие заданные частоты колебаний. В терминах задачи (2.3), (2.4) имеем: по известным ненулевым частотам ω_j , а значит значениям λ_j уравнения (2.3), найти неизвестные коэффициенты c_1, c_2 краевых условий (2.4), сохраняющих заданный диапазон частот колебаний трубопровода.

Пусть известны значения двух собственных частот ω_1 и ω_2 спектральной задачи (2.3), (2.4) и соответствующие им значения λ_j^1 и λ_j^2 . Тогда равенства (2.5) представляют собой систему двух уравнений от двух неизвестных c_1, c_2 :

$$\begin{aligned} c_1 f_1(\lambda_j^1) - c_2 f_2(\lambda_j^1) - c_1 c_2 f_3(\lambda_j^1) + f_4(\lambda_j^1) &= 0, \\ c_1 f_1(\lambda_j^2) - c_2 f_2(\lambda_j^2) - c_1 c_2 f_3(\lambda_j^2) + f_4(\lambda_j^2) &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$(j = 1, 2, 3, 4).$$

Преобразуя последнюю систему уравнений, получим следующие аналитические формулы для коэффициентов относительной жесткости на изгиб:

$$c_1 = \frac{-N \pm \sqrt{N^2 - 4MR}}{2M}, \quad c_2 = \frac{f_4(\lambda_j^1) + c_1 f_1(\lambda_j^1)}{f_2(\lambda_j^1) + c_1 f_3(\lambda_j^1)}, \quad (3.2)$$

в которых

$$\begin{aligned} M &= f_1(\lambda_j^2) f_3(\lambda_j^1) - f_3(\lambda_j^2) f_1(\lambda_j^1); \\ N &= f_1(\lambda_j^2) f_2(\lambda_j^1) - f_2(\lambda_j^2) f_1(\lambda_j^1) - f_3(\lambda_j^2) f_4(\lambda_j^1) + f_4(\lambda_j^2) f_2(\lambda_j^1); \\ K &= f_4(\lambda_j^2) f_2(\lambda_j^1) - f_2(\lambda_j^2) f_4(\lambda_j^1). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Таким образом, справедлива следующая теорема:

Т е о р е м а 3.1. *Если известны две ненулевые собственные частоты ω_1 и ω_2 задачи (2.3), (2.4), а значит, соответствующие им значения λ_j^1 и λ_j^2 , ранг матрицы системы (3.1) равен двум, то коэффициенты c_1 , c_2 крайних условий (2.4), сохраняющие заданные частоты колебаний трубы при изменениях параметров жидкости определяются по формулам (3.2), (3.3).*

Итак, известны частоты колебаний трубопровода. Необходимо, изменив параметры жидкости, сохранить прежние частоты его колебаний. Эту задачу предлагаем решить с помощью необходимых изменений в закреплениях трубы с жидкостью. Рассмотрим использование найденного алгоритма на конкретном примере. Дана задача (2.3), (2.4) при параметрах при параметрах

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,068\text{м}, \quad r = 0,07\text{м}, \quad l = 6\text{м}, \\ \rho &= 7,8 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3, \quad V_0 = 0\text{м/с}, \\ \rho_0 &= 0,68 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3, \quad E = 2 \cdot 10^{11} \text{Н/м}^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

системы (трубопровод-жидкость). Для принятых параметров

$$r - r_1 = 20 \cdot 10^{-4} \text{м}; \quad \sigma = 5700 \cdot 10^5 \text{Н/м}^2$$

и значение максимально допустимого давления, вычисленного по формуле [12] $p_0 = \sigma(r - r_1)/r$ равно $p_0 = 163 \cdot 10^5 \text{Н/м}^2$.

В ходе решения прямой задачи (2.3), (2.4) с коэффициентами относительной жесткости $c_1 = 9,5$, $c_2 = 9,5$ и внутреннем давлении $p_0 = 55,268311 \cdot 10^5 \text{Н/м}^2$ получены собственные частоты колебаний трубы:

$$\omega_1 = 20,33; \quad \omega_2 = 58,99; \quad \omega_3 = 118 \quad \text{и т.д.} \quad (3.5)$$

Пусть требуется уменьшить внутреннее давление в трубопроводе до $p_0 = 55,268271 \cdot 10^5 \text{Н/м}^2$. Тогда для сохранения спектра частот (3.5), необходимо по формулам (3.2), (3.3), например, увеличить жесткость закрепления на левом конце трубы с $c_1 = 9,5$ до $c_1 = 18,82$, а на правом конце трубы уменьшить жесткость закрепления с $c_2 = 9,5$ до $c_2 = 6,35$. Такой же спектр частот при изменении давления жидкости сохранится и при других жесткостях на изгиб упругих закреплений трубы. В таблице 3.1 показаны, например, соответствующие значения коэффициентов упругих закреплений при изгибных колебаниях трубопровода, обеспечивающие частоты колебаний трубы для рассмотренной выше задачи.

Проведенные исследования показывают, что при уменьшении внутреннего давления для сохранения заданного диапазона частот колебаний трубы с жидкостью, необходимо увеличить жесткость закрепления на левом конце и уменьшить жесткость закрепления на правом конце трубы. Формулы (3.2), (3.3) для коэффициентов относительной жесткости упругих закреплений трубы позволяют диагностировать такие закрепления трубопровода, которые позволяют сохранять частоты его колебаний неизменными при изменении давления жидкости.

Таблица 3.1 – Значения коэффициентов c_1 , c_2 , обеспечивающие заданные частоты колебаний для задачи (2.3), (2.4) при параметрах (3.4) системы (труба-жидкость) при изменении внутреннего давления системы (трубопровод-жидкость)

	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5
$B_0 = 1, B_l = 1$	1,5641	4,7488	7,8573	10,9971	14,1378
$B_0 = 1, B_l = 2$	1,7501	4,7583	7,8594	10,9978	14,1379
$B_0 = 1, B_l = 5$	2,1249	4,7869	7,8656	11,0001	14,1392
$B_0 = 1, B_l = 7$	2,2908	4,8062	7,8698	11,0016	14,1400
$B_0 = 1, B_l = 10$	2,4779	4,8355	7,8769	11,0039	14,1410
$B_0 = 1, B_l = 20$	2,8661	4,9348	7,8975	11,0115	14,1446
$B_0 = 1, B_l = 30$	3,0903	5,0347	7,9194	11,0192	14,1482

4. Заключение

По решению прямой задачи исследовано влияние на спектр частот колебаний трубы давления жидкости, и показано, что увеличение давления жидкости на стенки трубы ведет к уменьшению собственных частот изгибных колебаний трубопровода. Такие изменения касаются колебаний трубы при любых ее закреплениях.

Разработанный метод решения задачи сохранения спектра частот позволяют обеспечивать заданный безопасный диапазон частот колебаний трубопровода при изменении давления жидкости. Полученные формулы позволяют определять значения коэффициентов относительной жесткости пружин, с которыми упруго закреплены края трубопровода, обеспечивающие заданный спектр частот его колебаний.

Построенный алгоритм решения задачи сохранения спектра частот при упругих закреплениях трубы может быть применен для диагностики недоступных для визуального осмотра закреплений элементов механических систем и строительных конструкций, составляющими которых являются трубопроводы с жидкостью.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978.
2. Ильгамов М.А. Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ. – М.: Наука, 1969.
3. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 139–147.
4. Вольмир А. С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости. – М.: Наука – 1979.
5. Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов. – М.: Наука – 1986. – 560 с.
6. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х т. / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение – 1968. Т. 1. 831 с.

Preservation of frequencies of fluctuations of the pipeline at change of parameters of a liquid

© G F. Safina²

Abstract. In article influence of parameters of a liquid on its frequencies is investigated The flexural. The method with which help it is possible to define is offered the pipeline fastenings, allowing to keep its set frequencies fluctuations.

Key Words: fluctuations, fastenings, the pipeline with a liquid, own frequencies, preservation of frequencies.

²The senior lecturer of chair Mathematical modelling of Neftekamsk branch The Bashkir state university; Neftekamsk Safinagf@mail.ru