

УДК 517.9

Оценка параметров моделей системной динамики

© С. И. Спивак¹, О. Г. Кантор², И. Р. Салахов³

Аннотация. Разработан подход, позволяющий осуществлять поэтапную корректировку моделей системной динамики и обеспечивающий приемлемую точность. Осуществлена его апробация при построении модели системной динамики численности населения Российской Федерации.

Ключевые слова: модели системной динамики, оценка параметров модели, вычислительный эксперимент.

Системная динамика – метод изучения сложных систем с нелинейными обратными связями, разработанный в середине XX века профессором Массачусетского технологического института Дж. Форрестером – одним из крупнейших специалистов в области теории управления

Изначально системная динамика разрабатывалась для решения проблем управления в промышленности [6], но в дальнейшем ее стали применять для анализа более широкого класса динамических систем (экономических, социальных и др.). В моделях системной динамики используются переменные двух типов: системные уровни и темпы. Системные уровни полностью описывают состояние системы в произвольный момент времени. Изменение системных уровней вызвано соответствующими темпами, которые в свою очередь зависят от одного или нескольких системных уровней (но не от других темпов).

В методе системной динамики предполагается, что для всех системных уровней пишутся уравнения одного и того же типа [2]:

$$\frac{dy}{dt} = y^+ - y^-, \quad (1.1)$$

где y^+ и y^- – положительный и отрицательный темпы скорости системного уровня y , каждый из которых включает в себя все факторы, вызывающие соответственно рост и убывание y . Предполагается, что y^+ и y^- являются функциями только системных уровней.

Основными этапами системной динамики являются

- концептуализация, в рамках которой происходит выделение главных тенденций изучаемого процесса и, как следствие, основных характеристик – системных уровней;
- математическое описание изучаемого процесса посредством составления уравнений типа (1.1);
- численное решение системы полученных уравнений (1.1).

На основании моделей системной динамики возможно осуществлять прогноз для изучаемой системы, т.е. определять значений системных уровней в последующие моменты

¹Заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; s.spivak@bashnet.ru.

²Старший научный сотрудник, ИСЭИ УНЦ РАН, г. Уфа; o_kantor@mail.ru.

³Аспирант кафедры математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; salah-off@mail.ru.

времени, а также исследовать различные состояния системы. При этом очевидно, что от того, насколько качественно будут составлены уравнения (1.1), зависит и точность прогнозных оценок, и результаты дальнейших исследований.

В некоторых случаях уравнения (1.1) составляются на основе очевидных логических связей между системными уровнями и темпами. Именно такого рода зависимости использовал Дж. Форрестер при построении моделей мировой динамики [5]. В более сложных ситуациях, например, когда исследователю до конца не ясно каким образом выбранные для анализа системные уровни и темпы взаимодействуют друг с другом, а увеличение размерности моделируемой системы является нежелательным, определение зависимостей (1.1) представляет собой самостоятельную задачу.

Пожалуй, самым разработанным инструментом для моделирования уравнений (1.1) имеющимся исходным данным является эконометрический анализ, позволяющий определять зависимости, качество которых контролируется совокупностью критериев: индексом (коэффициентом) детерминации (R^2), F -критерием Фишера, t -критерием Стьюдента, средней ошибкой аппроксимации (\bar{A}) и т.д. Однако в ходе применения данного подхода при построении моделей системной динамики может возникать ряд проблем, к числу которых относятся следующие.

1. При проведении эконометрических исследований качество модели, как и ее тип, контролируется исследователем, который принимает решение о том, достаточна достигнутая точность или нет, основываясь на своих субъективных оценках. В дальнейшем это может привести к существенным погрешностям на этапах численного решения системы полученных уравнений и построения прогноза.
2. Исходные данные могут быть малочисленными, что может отразиться на качестве определяемых зависимостей (1.1), и, как следствие, на точности реализации последующих этапов.

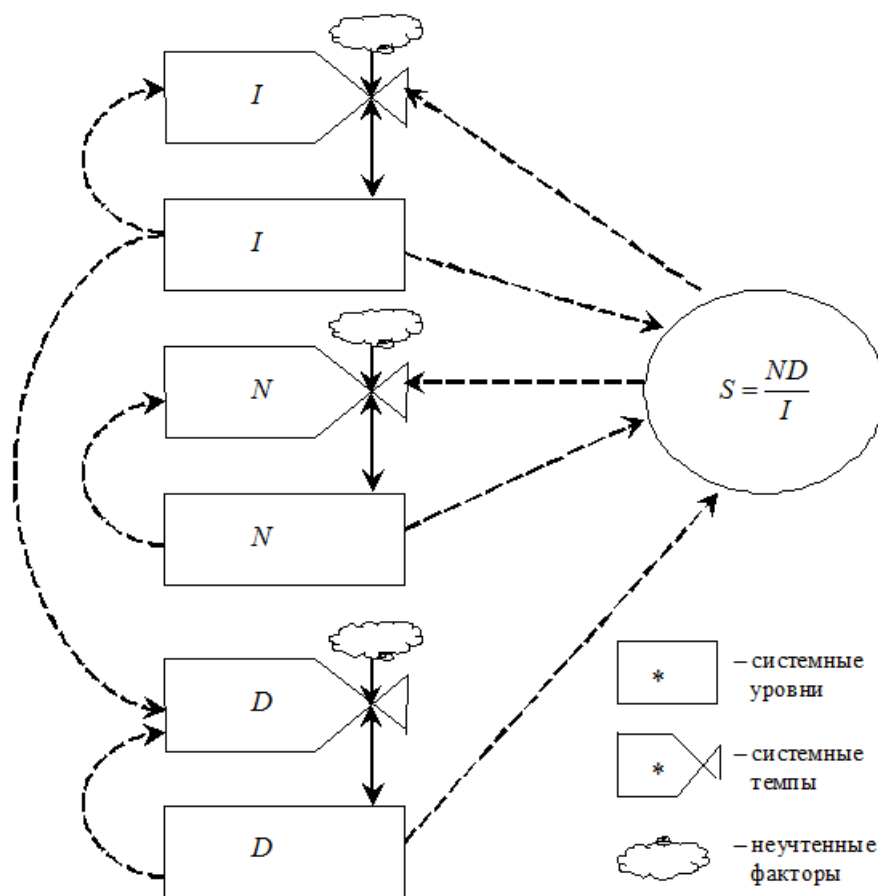
Столкнувшись с такого рода трудностями в своих исследованиях, авторы настоящей работы разработали подход, позволяющий осуществлять оценку параметров моделей системной динамики, нивелирующий перечисленные выше проблемы.

Известно, что в Российской Федерации на протяжении достаточно длительного периода времени происходит сокращение численности населения. Проблеме моделирования численности населения РФ посвящено большое число научных работ [1], [3], [4]. Авторы настоящей работы подошли к данной проблеме с позиций системной динамики, и поставили цель осуществить моделирование численности населения РФ не как обособленного параметра, а с учетом влияния определенных факторов. В качестве уровней, на которых строится структура системы, были выбраны следующие три:

- N - численность населения РФ, чел.;
- D - душевые доходы за год, руб./чел. в год;
- I - индекс потребительских цен, %.

Каждый из этих уровней является основной переменной моделируемой системы. Также в модель была включена вспомогательная переменная $S = \frac{ND}{I}$, которая по своей сути представляет реальный денежный доход, которым обладало население страны за год с учетом изменяющихся цен. Очевидно, что все переменные модели оказывают друг на друга влияние. При построении модели были учтены предположения, что рост величин D и S положительно сказывается на численности населения, в то время как величины I и N находятся в обратной зависимости.

Диаграмма анализируемой модели представлена на рис. 0.1.



Р и с у н о к 1.1

Диаграмма модели системной динамики численности населения Российской Федерации.

На основании имеющейся официальной статистической информации за период с 1998 по 2009 гг. с помощью методов эконометрического моделирования были определены следующие зависимости выбранных для анализа системных уровней и системных темпов.

$$\frac{dN}{dt} = 8,139 \cdot 10^{-22} N^{0,05} S^2 - 64,01 \cdot N^{0,03} S^{0,3} \quad (1.2)$$

$$(R^2 = 0.797; F = 17,63; T = \{8,08; -15,60\}; \bar{A} = 20,2\%)$$

$$\frac{dD}{dt} = 108,17 \cdot D^{0,35} - 638,87 \cdot I \quad (1.3)$$

$$(R^2 = 0.882; F = 33,71; T = \{8,91; -2,90\}; \bar{A} = 11,3\%)$$

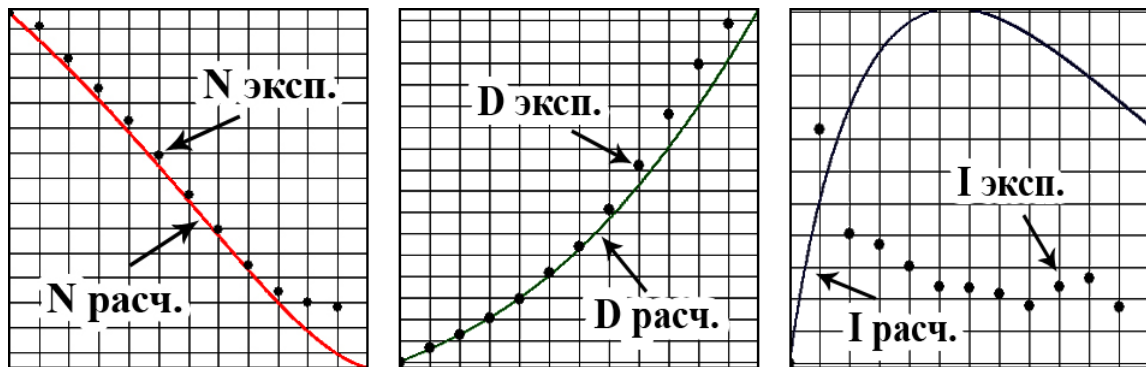
$$\frac{dI}{dt} = 1,23 \cdot I^{-0,5} - 0,0933 \cdot S^{0,08} \quad (1.4)$$

$$(R^2 = 0.796; F = 17,58; T = \{6,71; -5,83\}; \bar{A} = 23,0\%)$$

Заметим, что при построении данных зависимостей экзогенными факторами считались произведения системных уровней в соответствующих степенях. Полученные результаты свидетельствуют о достаточно хорошем качестве подобранных моделей, их статистической значимости в целом и значимости всех коэффициентов. К сожалению, на данном этапе

не удалось получить приемлемый (не более 10%) уровень средней ошибки аппроксимации \bar{A} , что может объясняться незначительным временным периодом выборки (данные более ранних периодов использовать не представлялось возможным ввиду несопоставимости величин D в результате осуществления денежной реформы 1998 г.).

Для численного интегрирования системы (1.2)-(1.4) был выбран метод Рунге-Кутты в силу его высокой точности и меньшей склонности к возникновению неустойчивости решения. В качестве основного критерия для оценки качества полученных результатов был принят показатель средней ошибки аппроксимации, численно равный среднему отклонению расчетных значений от экспериментальных. Общепринято, что допустимый уровень данного показателя должен составлять не более 8-10%. Результаты проведенных расчетов по методу Рунге-Кутты (рис. 0.2) показали низкую точность, что выразилось в первую очередь в высоком значении средней ошибки аппроксимации \bar{A}_I .



Р и с у н о к 1.2

$$\bar{A}_N = 0,19\%$$

$$\bar{A}_D = 4,81\%$$

$$\bar{A}_I = 27,40\%$$

Графическая иллюстрация результатов численного интегрирования системы (1.2)-(1.4) методом Рунге-Кутты.

Для корректировки самой проблемной зависимости (1.4) был использован следующий подход. Коэффициенты при переменных поочередно полагались неизвестными. Затем, используя очевидные соотношения для первого и второго коэффициентов соответственно

$$I(12) - I(0) = \int_0^{12} (aI^{-0,5} - 0,0933 \cdot S^{0,08}) dt \quad (1.5)$$

и

$$I(12) - I(0) = \int_0^{12} (108,171 \cdot I^{-0,5} - b \cdot S^{0,08}) dt \quad (1.6)$$

интегралы в правых частях заменялись приближенными выражениями, рассчитанными по методу Симпсона. Так, выражение для вычисления параметра a приняло вид

$$a \approx \frac{6(I(12) - I(0)) + 0,0933(S(0)^{0,08} + 2 \sum_{k=1}^{11} S(k)^{0,08} + 4 \sum_{k=1}^{12} S(k)^{0,08} + S(12)^{0,08})}{I(0)^{-0,5} + 2 \sum_{k=1}^{11} I(k)^{-0,5} + 4 \sum_{k=1}^{12} I(k)^{-0,5} + I(12)^{-0,5}} \quad (1.7)$$

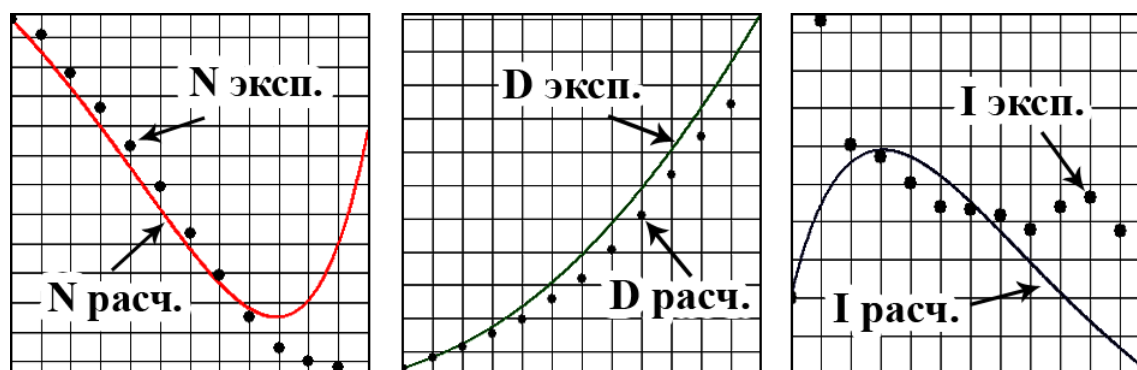
откуда следует

$$a \approx 1,0619 \quad (1.8)$$

Аналогичные расчеты, проведенные для вычисления параметра b , не изменили соответствующий коэффициент уравнения (1.4). Таким образом, после проведенной корректировки уравнение (1.4) приняло вид:

$$\frac{dI}{dt} = 1,06 \cdot I^{-0,5} - 0,0933 \cdot S^{0,08}. \quad (1.9)$$

Анализ результатов применения метода Рунге-Кутты для системы уравнений (1.2), (1.3), (1.9) (рис. 0.3) показал существенное улучшение средней ошибки аппроксимации по третьему уравнению.



Р и с у н о к 1.3

$$\bar{A}_N = 0,34\%$$

$$\bar{A}_D = 13,84\%$$

$$\bar{A}_I = 6,08\%$$

Графическая иллюстрация результатов численного интегрирования системы (1.2), (1.3), (1.9) методом Рунге-Кутты.

Однако, несмотря на возросшую точность решения, полученная модель осталась непригодной для построения прогноза ввиду резкого роста переменной N , что противоречит высокой инерционности показателя численности населения. Данное обстоятельство обусловило необходимость корректировки модели (1.2), (1.3), (1.9) с позиций обеспечения допустимого уровня Δ вариации значений переменной N . В дальнейших расчетах полагалось равным 1000000, что приблизительно соответствует максимальному значению в рамках наблюдаемого временного интервала данного системного темпа, увеличенному на 25%.

Дальнейшая корректировка модели (1.2), (1.3), (1.9) осуществлялась посредством очередного расчета диапазона значений всех параметров модели (коэффициентов и показателей степеней переменных), обеспечивающих выполнение условия

$$|N_{\text{расчетное}} - N_{\text{экспериментальное}}| \leq \Delta \quad (1.10)$$

Учитывая специфику уравнений системной динамики, для каждого параметра такой диапазон значений существует и единственен, а задача определения границ данных диапазонов сводится к ряду задач вычислительного эксперимента (табл. 1).

З а м е ч а н и е 1.1. $a_i, i = \overline{1,6}$ и $k_j, j = \overline{1,8}$, – занумерованные в порядке появления в уравнениях (1.2), (1.3), (1.9) коэффициенты и показатели степеней переменных соответственно.

Данные таблицы 1 явились основой организации вычислительного эксперимента для определения окончательного вида модели системной динамики численности населения РФ. Любой вычислительный эксперимент по своей сути представляет последовательность однотипных расчетов при различных значениях параметров модели, а принципиальное различие кроется в способах организации перебора этих значений. Такого рода способы

Таблица 1: Границы диапазонов вариации параметров модели системной динамики численности населения РФ (1.2), (1.3), (1.9)

Параметр модели	Минимальное значение	Максимальное значение	Параметр модели	Минимальное значение	Максимальное значение
a_1	$6 \cdot 10^{-22}$	$9,9 \cdot 10^{-22}$	k_2	1,990	2,006
a_2	60,2	72,2	k_3	0,025	0,034
a_3	72,0	107,8	k_4	0,297	0,302
a_4	571	948	k_5	0,298	0,355
a_5	1,05	1,53	k_6	0,228	3,009
a_6	0,057	0,096	k_7	-5,000	0,175
k_1	0,034	0,601	k_8	0,063	0,092

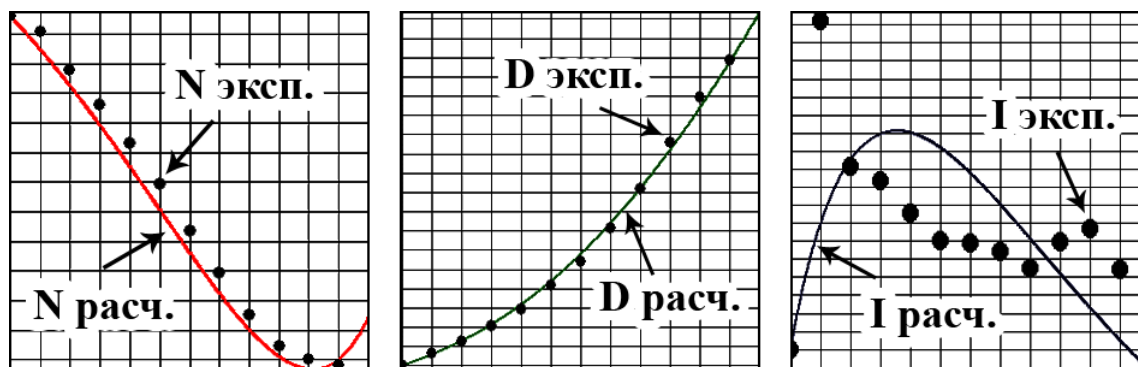
можно разделить на две большие группы: системные и случайные. В настоящей работе на данном этапе был использован метод случайного выбора значений параметров модели. В качестве критериев для оценки качества получаемой модели были использованы средние ошибки аппроксимации ($\bar{A}_N, \bar{A}_D, \bar{A}_I$) и критерий (1.10). По результатам серии вычислительных экспериментов на основании экспертных мнений о значениях критериев качества был определен окончательный вид модели системной динамики численности населения РФ:

$$\frac{dN}{dt} = 8,139 \cdot 10^{-22} N^{0,05} S^2 - 66,5 \cdot N^{0,03} S^{0,3} \quad (1.11)$$

$$\frac{dD}{dt} = 103,41 \cdot D^{0,35} - 638,87 \cdot I \quad (1.12)$$

$$\frac{dI}{dt} = 1,08 \cdot I^{-0,5} - 0,0933 \cdot S^{0,08} \quad (1.13)$$

Результаты применения метода Рунге-Кутты для системы уравнений (1.11)-(1.13) (рис. 0.4) подтвердили достаточно высокую степень точности полученной модели, что в свою очередь дает возможность осуществлять прогнозные оценки системных уровней и проводить дальнейшие исследования.



Р и с у н о к 1.4

$$\bar{A}_N = 0,18\%$$

$$\bar{A}_D = 2,95\%$$

$$\bar{A}_I = 5,95\%$$

Графическая иллюстрация результатов численного интегрирования системы (1.12)-(1.13) методом Рунге-Кутты.

На примере решения приведенной задачи, очевидно, что далеко не всегда применение только одного метода позволяет получать удовлетворительные результаты в силу того,

что, либо невозможно учесть влияние всех факторов на переменные модели, либо попросту недостаточно данных. В этой связи целесообразным является применение комплекса различных методов математического моделирования в сочетании с вычислительными алгоритмами и программными продуктами. Сказанное в полной мере относится к моделированию динамических систем. Предложенный в настоящей работе подход, основанный на использовании методов эконометрического моделирования, приближенных и численных методов интегрирования, серии вычислительных экспериментов и использовании ЭВМ позволяет исследователю осуществлять поэтапный процесс корректировки модели системной динамики с позиций адекватного описания экспериментальных данных.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. История человечества: Под ред. А.Н. Сахарова. Т.1-8. – М.: ЮНЕСКО, 2003.
2. Махов С.А. Математическое моделирование мировой динамики и устойчивого развития на примере модели Форрестера // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. – 2005. – № 6 – 24 с.
3. Капица С.П., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г. Синергетика и прогнозы будущего. – М. Наука. 1997.
4. Капица С.П. Общая теория роста человечества. – М. Наука. 1999.
5. Форрестер Дж. Мировая динамика.– М. Наука. 1978. 168 с.
6. Форрестер Дж. Основы кибернетики предприятия (индустриальная динамика). – М. Прогресс. 1971. 340 с.

Evaluation of model parameters the system dynamics.

© S. I. Spivak⁴, O. G. Kantor⁵, I. R. Salakhov⁶

Abstract. The approach, allow for the gradual adjustment of the system models dynamics and provides an acceptable accuracy. carried his testing in the model number of system dynamics population of the Russian Federation.

Key Words: system dynamics models, estimate the model parameters, computational experiment

⁴Head of the Department of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; s.spivak@bashnet.ru.

⁵Senior Research Scientist, Institute for Social and Economic Research, Ufa; o_kantor@mail.ru.

⁶Postgraduate of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; salah-off@mail.ru.