УДК 517.938

О диффеоморфизмах Морса-Смейла с тремя неподвижными точками

© Е. В. Жужома[1], Л. А. Куприна[2], В. С. Медведев[3]

Аннотация. Изучается топологическая структура сепаратрис диффеоморфизма Морса-Смейла n-мерного многообразия ($n \geq 4$), неблуждающее множество которого состоит из трех неподвижных точек.

Ключевые слова: Многообразие, узлы, диффеоморфизм Морса-Смейла, сепаратрисы седла.

Пусть $f : M^n \to M^n$ - диффеоморфизм Морса-Смейла (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [1], [21]) замкнутого n-мерного ($n \geq 3$) многообразия M^n, и σ - седловая периодическая точка диффеоморфизма f с k-мерным ($1 \leq k \leq n-1$) устойчивым $W^s(\sigma)$ или неустойчивым многообразием $W^u(\sigma)$. Множество $Sep^\tau(\sigma) = W^\tau(\sigma) \setminus \{\sigma\}$ называется сепаратрисой (τ либо s, либо u). Если $Sep^\tau(\sigma)$ не пересекается с сепаратрисами других седловых периодических точек, то $Sep^\tau(\sigma)$ принадлежит неустойчивому (если $\tau = s$) или устойчивому (если $\tau = u$) многообразию некоторой узловой периодической точки, скажем N. Тогда топологическое замыкание сепаратрисы $Sep^\tau(\sigma)$ равно $W^\tau(\sigma) \cup \{N\}$, и является топологически вложенной в M^n k-сферой [5]. Возможность дикого вложения такой k-сферы впервые была доказана в [18] для многообразия, являющегося 3-сферой $M^3 = S^3$, при $k = 1, 2$ (аналогичные примеры были построены в [2] - [5], [12], [14], где рассматривались также вопросы классификации). Более точно, в [18] был построен градиентно-подобный диффеоморфизм 3-сферы с одним седлом и тремя узлами. Из [13] вытекает, что не существует ориентируемых замкнутых 3-многообразий, допускающих диффеоморфизм Морса-Смейла с тремя периодическими точками. Поскольку на любом замкнутом многообразии диффеоморфизм Морса-Смейла имеет, по крайней мере, одну источниковую и одну стоковую периодические точки [21], то получается, что в случае $n = 3$ минимальное число периодических точек с указанным эффектом дикого вложения замыкания сепаратрисы равно четырем.

В [17] было доказано существование замкнутых n-многообразий (и исследование таких многообразий), допускающих функции Морса ровно с тремя критическими точками при $n \geq 4$. Как следствие получаем, что в случае $n \geq 4$ существуют диффеоморфизмы Морса-Смейла ровно с тремя периодическими точками. Такой диффеоморфизм имеет ровно одно седло (лемма 1.4.). Поэтому естественно рассмотреть вопрос о возможности дикого вложения топологического замыкания сепаратрисы у (единственного) седла. Настоящая статья посвящена изучению данного вопроса. Основной результат содержится в следующей теореме.

Теорема 1.1. *Пусть $f : M^n \to M^n$ – диффеоморфизм Морса-Смейла замкнутого многообразия размерности $n \geq 4$, и неблуждающее множество диффеоморфизма состоит из трех неподвижных точек: стока ω, источника α и седла s_0. Тогда*

[1]Профессор кафедры математики, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

[2]Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная селскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

[3]Старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений, НИИ прикладной математики и кибернетики при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru.

- *M^n ориентируемое;*

- *сепаратрисы седла s_0 имеют одинаковую размерность (следовательно, размерность n многообразия M^n четная);*

- *замыкания неустойчивой $Sep^u(s_0)$ и устойчивой $Sep^s(s_0)$ сепаратрис являются топологически вложенными $\frac{n}{2}$-мерными сферами $W^u(s_0) \cup \{\omega\} = S_\omega$, $W^s(s_0) \cup \{\alpha\} = S_\alpha$ соответственно.*

- *если $n \geq 6$, то сферы S_ω и S_α локально плоские;*

Авторы благодарят участников семинара В.З. Гринеса за плодотворные обсуждения.

Сперва напомним некоторые основные определения. Диффеоморфизм f гладкого многообразия M^n (размерности $n \geq 3$) называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ состоит из конечного числа периодических точек (следовательно, $NW(f) = Per\ (f)$), все периодические точки гиперболические и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются трансверсально (если пересечение не пусто) для любых точек x, $y \in NW(f)$.

Индекс Кронекера-Пуанкаре есть число $Ind_p(f) = (-1)^{\dim W^u(p)}\Delta$, где Δ суть $+1$ или -1 в зависимости от того сохраняет или меняет ориентацию отображение $f|_{W^u(p)}$. Обозначим через $tr\ (f_{*k})$ след (линейного) отображения $f_{*k} : H_k(M, \mathbb{R})$, которое индуцируется диффеоморфизмом f в k-мерной группе гомологий $H_k(M, \mathbb{R}) = H_k(M)$, $0 \leq k \leq \dim M$. Если множество $Fix\ (f)$ неподвижных точек диффеоморфизма f состоит из гиперболических точек, то для такого диффеоморфизма имеет место следующая формула Лефшеца

$$\sum_{k=0}^{\dim M} (-1)^k tr\ (f_{*k}) = \sum_{p \in Fix\ (f)} Ind_p(f).$$

Дадим определение дикого и локально плоского вложений подмногообразий в некоторое многообразие. Для натуральных $1 \leq m \leq n$ мы рассматриваем евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ вложенным в $\mathbb{R}^n$ так, что последние $(n-m)$ координат точек из $\mathbb{R}^m$ равны 0. Пусть $e : M^m \to N^n$ - вложение замкнутого m-многообразия M^m во внутренность n-многообразия N^n. Тогда $e(M^m)$ *локально плоско в точке* $e(x)$, $x \in M^m$, если существует окрестность $U(e(x)) = U$ точки $e(x)$ и гомеоморфизм $h : U \to \mathbb{R}^n$ такие, что $h(U \cap e(M^m)) = \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$. В противном случае $e(M^m)$ *дико вложено в* $e(x)$. Аналогичные определения вводятся в случае компактного M^m с краем (в частности, $M^m = [0; 1]$).

В [5] доказано утверждение, которое мы сформулируем для ссылок в виде леммы.

Л е м м а 1.2. *Пусть $f : M^n \to M^n$ – диффеоморфизм Морса-Смейла, у которого сепаратриса $Sep^\tau(\sigma)$ некоторого седла σ не пересекается с сепаратрисами других седел. Тогда $Sep^\tau(\sigma)$ принадлежит неустойчивому (если $\tau = s$) или устойчивому (если $\tau = u$) многообразию некоторой стоковой периодической точки, скажем N, ее топологическое замыкание равно $W^\tau(\sigma) \cup \{N\}$, и является топологически вложенной в M^n сферой соответствующей размерности.*

Доказательство ориентируемости многообразия M^n будет вытекать из следующей леммы, которая имеет самостоятельный интерес.

Л е м м а 1.3. *Пусть $f : M^n \to M^n$ - диффеоморфизм Морса-Смейла, у которого нет одномерных сепаратрис и все сепаратрисы не имеют гетероклинических пересечений. Тогда многообразие M^n ориентируемое.*

Доказательство. Предположим противное. Не уменьшая общности, можно считать, что все периодические точки диффеоморфизма f являются неподвижными (в противном случае мы перейдем к некоторой итерации). Известно, что существует двулистное накрытие $\widehat{\pi}:\widehat{M^n}\to M^n$, где $\widehat{M^n}$ - ориентируемое многообразие. Покажем, что существует поднятие $\widehat{f}$ диффеоморфизма f относительно накрытия $\widehat{\pi}$. Положим $\widehat{f}=id$ во всех точках $\widehat{\pi}^{-1}(Fix\ f)$. Возьмем произвольную точку $\widehat{x}\in\widehat{M^n}$, $\widehat{x}\notin\widehat{\pi}^{-1}(Fix\ f)$. Тогда $\widehat{\pi}(\widehat{x})$ принадлежит либо устойчивому многообразию $W^s(\omega)$ некоторого стока ω, либо устойчивой сепаратрисе $Sep^s(\sigma)$ некоторого седла σ. В первом случае, поскольку $W^s(\omega)$ односвязно и, следовательно, полный прообраз $\widehat{\pi}^{-1}(W^s(\omega))$ состоит из попарно непересекающихся односвязных областей, существует единственная компонента $\widehat{W^s}$ полного прообраза $\widehat{\pi}^{-1}(W^s(\omega))$, содержащая $\widehat{x}$. Отметим, что существует также единственная точка $\widehat{\omega}\in\widehat{\pi}^{-1}(\omega)$, принадлежащая той же компоненте. Положим

$$\widehat{f}(\widehat{x})=\widehat{y}\in\widehat{\pi}^{-1}(f(\widehat{\pi}(\widehat{x})))\cap\widehat{W^s}.$$

Во втором случае, когда $\widehat{\pi}(\widehat{x})\in Sep^s(\sigma)$, согласно лемме 1.2., замыкание сепаратрисы $Sep^s(\sigma)$ есть k-сфера S_0^k. По условию, $k\geq 2$. Поэтому S_0^k односвязна и, следовательно, полный прообраз $\widehat{\pi}^{-1}(S_0^k)$ состоит из попарно непересекающихся k-сфер, одна из которых, скажем $\widehat{S}_0^k$, содержит $\widehat{x}$. Положим

$$\widehat{f}(\widehat{x})=\widehat{y}\in\widehat{\pi}^{-1}(f(\widehat{\pi}(\widehat{x})))\cap\widehat{S}_0^k.$$

Непосредственно проверяется, что построенное отображение $\widehat{f}$ является диффеоморфизмом Морса-Смейла, удовлетворяющим равенству $\widehat{\pi}\circ\widehat{f}=f\widehat{\pi}$.

Ясно, что $\widehat{f}$ не имеет одномерных сепаратрис. В работе [6] показано, что из отсутствия одномерных сепаратрис вытекает, что диффеоморфизм Морса-Смейла имеет ровно один источник и ровно один сток. Так как f имеет хотя бы один источник и хотя бы один сток, то $\widehat{f}$ должен иметь не менее двух источников и двух стоков. Полученное противоречие показывает, что многообразие M^n ориентируемое.

Доказательство закончено.

Следуя [10], будем говорить, что *седло σ имеет тип* (μ,ν), если $\mu=\dim W^u(\sigma)$, $\nu=\dim W^s(\sigma)$. Число μ (ν) называется неустойчивым (устойчивым) индексом Морса.

Лемма 1.4. *Пусть $f:M^n\to M^n$ – диффеоморфизм Морса-Смейла, неблуждающее множество $NW(f)$ которого состоит из трех неподвижных точек. Тогда*

- *$NW(f)$ состоит из стока, источника и седла, сепаратрисы которого имеют одинаковую размерность (следовательно, размерность n многообразия M^n четная);*
- *M^n ориентируемое.*

Доказательство. Напомним неравенства Морса-Смейла [20]. Обозначим через M_j число периодических точек p диффеоморфизма f, у которых устойчивое многообразие имеет размерность $j=\dim W^s(p)$. Пусть $\beta_i(M^n)=\beta_i$ – i-е число Бетти многообразия M^n, т.е. $\beta_i(M^n)=rank\ H_i(M^n,\mathbb{Z})$. Тогда имеют место следующие соотношения [20]:

$$M_0\geq\beta_0,\ M_1-M_0\geq\beta_1-\beta_0,\ \ldots,M_{n-1}-M_{n-1}+\cdots\geq\beta_{n-1}-\beta_{n-1}+\cdots \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^iM_i=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i. \tag{1.2}$$

Поскольку для связного многообразия $\beta_0 = 1$, то из (1.1) вытекает, что f имеет по крайней мере один сток и по крайней мере один источник. Если предположить, что f имеет два стока ω_1, ω_2 и один источник α, то получим, что связное множество $M^n \setminus \{\alpha\}$ является объединением двух непересекающихся открытых множеств $W^s(\omega_1)$ и $W^s(\omega_2)$. Аналогично показывается, что f не может иметь два источника и сток. Таким образом, $NW(f)$ состоит из стока ω, источника α и седла σ. Пусть σ имеет тип $(n-k,k)$. Тогда $M_0 = M_n = M_k = 1$. Для диффеоморфизма f^{-1} имеем $M_0 = M_n = M_{n-k} = 1$. Остальные $M_j = 0$ $(j \neq 0,\ n,\ k,\ n-k)$. Приравнивая левые части (1.2) для f и f^{-1}, получаем $(-1)^k = (-1)^{n-k}$ и, следовательно, число $n = 2m$ четное. Более того, $n \geq 4$.

Покажем, что $k \neq 1$. Предположим противное. Так как многообразия $W^s(\sigma)$, $W^u(\sigma)$ не имеют гетероклинических пересечений, то их топологические замыкания равны $W^s(\sigma) \cup \{\alpha\} \stackrel{\text{def}}{=} S^1_\alpha$, $W^u(\sigma) \cup \{\omega\} \stackrel{\text{def}}{=} S^{n-1}_\omega$ и являются топологически вложенными окружностью и $(n-1)$-сферой соответственно [5]. Из $n \geq 4$ и того, что S^{n-1}_ω гладко вложена за исключением быть может одной точки вытекает, что S^{n-1}_ω имеет окрестность U_ω, гомеоморфную $S^{n-1}_\omega \times (-1;+1)$ [15]. Более того, U_ω можно построить так, чтобы $f(U_\omega) \subset U_\omega$. Поскольку S^{n-1}_ω и S^1_α пересекаются только в одной точке σ, то S^{n-1}_ω не разбивает M^n. Поэтому множество $M^n_1 = M^n \setminus U_\omega$ является связным многообразием с двумя граничными компонентами, гомеоморфными S^{n-1}_ω. Приклеив к этим компонентам непересекающиеся n-мерные шары, получим замкнутое многообразие M^n_2. Из $f(U_\omega) \subset U_\omega$ следует, что можно продолжить f на M^n_2 до диффеоморфизма с одним источником и двумя стоками. Выше было показано, что такого диффеоморфизма не существует. Полученное противоречие доказывает неравенство $k \neq 1$. Применяя этот результат к f^{-1}, получаем $k \neq n-1$. Таким образом, $M_1 = M_{n-1} = 0$.

Так как у диффеоморфизма Морса-Смейла сепаратрисы одного седла не пересекаются, то обе сепаратрисы (единственного) седла диффеоморфизма f не имеют гетероклинических пересечений. Отсюда и леммы 1.3. следует, что многообразие M^n ориентируемое.

Покажем, что $k = m$. Предположим противное, и для определенности предположим, что $k > m$ (в противном случае, перейдем к диффеоморфизму f^{-1}). Из (1.1) вытекает $\beta_1 = \ldots = \beta_{n-k-1} = 0$, поскольку $M_1 = \ldots = M_{n-k-1} = 0$. Из двойственности Пуанкаре для ориентируемых многообразий (см. например, [8], стр. 145) следует $\beta_1 = \ldots = \beta_{k-1} = 0$. Тогда $\beta_i = 0$ для всех $i = 1,\ \ldots,\ n-1$. Равенство (1.2) принимает вид $1+(-1)^k+(-1)^n = 1+(-1)^n$, чего не может быть.

Равенство $k = m$ можно доказать другим способом, который не использует ориентируемость M^n. Снова предположим противное, и для определенности предположим, что $k < m$. В этом случае коразмерность многообразия $W^s(\sigma)$ не менее двух. Поэтому достаточно близким к тождественному диффеоморфизмом $\kappa : M^n \to M^n$ можно перевести объединение $W^s(\sigma) \cup \alpha$ в $\kappa(W^s(\sigma) \cup \alpha)$ с $\kappa(W^s(\sigma) \cup \alpha) \cap (W^s(\sigma) \cup \alpha) = \emptyset$. При этом можно считать, что κ равен тождественному диффеоморфизму в некоторой окрестности стока ω. Диффеоморфизм $\kappa^{-1} \circ f \circ \kappa = \kappa'$ является диффеоморфизмом Морса-Смейла, у которого есть сток ω, и замыкание сепаратрисы седла не пересекается с $W^s(\sigma) \cup \alpha$. Тогда устойчивые многообразия стока ω диффеоморфизмов f и κ' покрывают все многообразие M^n. Так как устойчивое многообразие стока гомеоморфно открытому n-шару, то M^n является n-сферой S^n [7]. Перейдя, если необходимо к некоторой итерации, можно считать, что f и ограничение $f|_{W^u(\sigma)}$ сохраняют ориентацию. Поскольку для n-мерной сферы S^n имеем $H_0(S^n) = H_n(S^n) = 1$, $H_k(S^n) = 0$, $1 \leq k \leq n-1$, то формула Лефшеца для диффеоморфизма Морса-Смейла сферы S^n принимает следующий вид:

$$1 + (-1)^n = \sum_{p \in Fix\ (f)} Ind_p(f). \tag{1.3}$$

Ясно, что $Ind_\alpha(f) = (-1)^n$, $Ind_\omega(f) = 1$. Тогда из (1.3) получаем $Ind_\sigma(f) = 0 = (-1)^{\dim W^u(\sigma)}$, чего не может быть. Полученное противоречие доказывает равенство $k = m$.
Доказательство закончено.

Для диффеоморфизма f, удовлетворяющего условиям основной теоремы, выше было доказано, что $n = 2k$, $k \geq 2$, и неблуждающее множество $NW(f)$ состоит из стока ω, источника α и седла s_0 с типом (k,k). Из леммы 1.2. следует следующее утверждение.

Лемма 1.5. *Пусть $f : M^{2k} \to M^{2k}$ – диффеоморфизм Морса-Смейла, неблуждающее множество $NW(f)$ которого состоит из стока ω, источника α и седла s_0 типа (k,k). Тогда замыкания неустойчивого $W^u(s_0)$ и устойчивого $W^s(s_0)$ многообразий являются топологически вложенными k-мерными сферами $W^u(s_0) \cup \{\omega\}$, $W^s(s_0) \cup \{\alpha\}$ соответственно.*

Положим $S^k_\omega = W^u(s_0) \cup \{\omega\}$, $S^k_\alpha = W^s(s_0) \cup \{\alpha\}$. Непосредственно из [9] (см. также [19], [16]) вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.6. *Пусть $f : M^{2k} \to M^{2k}$ – диффеоморфизм Морса-Смейла, неблуждающее множество $NW(f)$ которого состоит из стока ω, источника α и седла s_0. Если $k \geq 3$, то S^k_ω, S^k_α суть плоские k-сферы.*

Доказательство. Пусть $e : M^k \to \mathbb{R}^n$ - вложение k-мерного многообразия (возможно, с краем) в $\mathbb{R}^n$. В [15] и [16] доказано, что при $n \geq 5$, $k \neq n-2$ вложение e не имеет изолированных точек дикого вложения. Поскольку неустойчивое и устойчивое многообразия являются гладко вложенными подмногообразиями, то k-сферы S^k_ω, S^k_α могут иметь точки дикого вложения только в узлах. Если взять окрестность узла, гомеоморфную $\mathbb{R}^n$, то можно применить результаты из [9]. Отсюда следует, что S^k_ω, S^k_α являются локально плоскими топологически вложенными k-сферами.
Доказательство закончено.

Работа выполнена в рамках гранта Правительства Российской Федерации для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях высшего профессионального образования, договор № 11.G34.31.0039, а также в рамках гранта РФФИ № 11-01-12056 офи-м.

Список литературы

1. Аносов Д.В. Исходные понятия. Элементарная теория. – В сб. серии "Современные проблемы математики Фундаментальные направления (Итоги науки и техники), Дин. системы – 1 (под ред. Д. В. Аносова), том 1, 1985. С. 156–204.

2. Бонатти Х., Гринес В.З., Медведев В.С., Пеку Е. О топологической классификации градиентноподобных диффеоморфизмов без гетероклинических кривых на трехмерных многообразиях. – Доклады РАН. 2001. Т. 377, № 2. С. 151–155.

3. Бонатти Х., Гринес В.З., Медведев В.С., Пеку Е. О диффеоморфизмах Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на трехмерных многообразиях. – Труды МИАН. 2002. Т. 236. С. 66–78.

4. Бонатти Х., Гринес В.З., Починка О.В. Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях. – Труды МИАН. 2005. Т. 250. С. 5–53.

5. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С. О диффеоморфизмах Морса-Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях. – Матем. заметки. 2003. Т. 74, № 3. С. 369–386.

6. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С., Починка О.В. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла. – Труды МИАН. 2010. Т. 271. С. 1–23.

7. Келдыш Л.В. Топологические вложения в евклидово пространство. – Труды Матем. инст. им. В.А. Стеклова. Москва. «Наука». 1966.

8. Фоменко А.Т., Фукс Д.Б. Курс гомотопической топологии. – М. «Наука». 1989.

9. Чернавский А.В. Об особых точках топологических вложений многообразий и объединении локально плоских клеток. – Докл. АН СССР. 1966. Т. 167, № 3. С. 528–530.

10. Abraham R., Smale S. Nongeneracity of Ω-stability. Global Analysis. – Proc. Sympos. Pure Math. 1970. V. 14. P. 5–8.

11. Andrews J., Curtis M. Knotted 2-spheres in the 4-sphere. – Annals of Math. 1959. V. 70, no. 3. P. 565–571.

12. Bonatti Ch., Grines V. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3. – Journal of Dyn. and Control Syst. 2000. V. 6. P. 579–602.

13. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Three-dimensional manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves. – Topology and Appl. 2002. V. 117. P. 335–344.

14. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds. – Topology. 2004. V. 43. P. 369–391.

15. Cantrell J. C. Almost locally flat embeddings of S^{n-1} in S^n. – Bull. Amer. Math. Soc. 1963. V. 69. P. 716–718.

16. Cantrell J., Edwards C. Almost locally flat imbeddings of manifolds. – Michigan Math. Jour. 1965. V. 12. P. 217–223.

17. Eells J., Kuiper N. Manifolds which are like projective planes. – Publ. Math. IHES. 1962. V. 14. P. 5–46.

18. Pixton D. Wild unstable manifolds. – Topology. 1977. V. 16. P. 167–172.

19. Stallings J. On topologically unknotted spheres. – Annals of Math. 1963. V. 77. P. 490–503.

20. Smale S. Morse inequalities for a dynamical system. – Bull. Amer. Math. Soc. 1960. V. 66. P. 43–49.

21. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, no. 1. P. 741–817. Имеется первод: Успехи мат. наук. 1970. Т. 25. С. 113–185.

On the Morse-Smale diffeomorphisms with three fixed points

© E.V. Zhuzhoma[4], L.A. Kuprina[5], V.S. Medvedev[6]

Abstract. We study the topological structure separatrices of Morse-Smale diffeomorphisms of n-dimensional manifold ($n \geq 4$) with non-wandering set consisting of three fixed points.

Key Words: Manifolds, knots, Smale-Vietoris diffeomorphism, sadle separatrics

[4]Professor of Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[5]Assistant professor of Higher Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.

[6]Senior Staff Scientist Department of differential equations, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru.