УДК 517.956.2

Странные нехаотические аттракторы в системах с квазипериодическим возмущением

© **М. Л. Коломиец**[1], **А. Н. Сахаров**[2]

Аннотация. Дается обзор результатов о топологической структуре минимальных множеств динамических систем, являющихся одномерными расширениями квазипериодических потоков на m-мерном торе. Устанавливается, что в таких системах минимальные множества либо торы, либо связные, но не локально связные множества. Последние могут играть роль странных нехаотических аттракторов.

Ключевые слова: Аттракторы, минимальные множества, проективные потоки, топологическая эквивалентность

1. Введение

Одно из наиболее обсуждаемых понятий в теории динамических систем является понятие странного аттрактора. *Аттрактор* – компактное инвариантное подмножество фазового пространства, которое асимптотически устойчиво, т.е. все траектории из некоторой его окрестности стремятся к нему при $t \to \infty$. Множество точек, асимптотических к аттрактору, называется его *бассейном притяжения.* Аттракторы системы при обращении времени $t \to -t$ называются *репеллерами.* Как правило, предполагается, что аттрактор – транзитивное множество динамической системы. Приведенное определение является, очевидно, чисто топологическим.

Термин «странный», введенный Рюэлем и Такенсом [1], используется для описания класса аттракторов, движение на которых хаотично, то есть имеет экспоненциальную чувствительность к начальным условиям. Большинство известных странных аттракторов имеют фрактальную геометрию и описываются спектром сингулярных (по отношению к естественной лебеговой мере фазового пространства) инвариантных мер. Обнаруженные, главным образом, в исследованиях физического характера, странные аттракторы не являлись грубыми (гиперболическими инвариантными множествами). К моменту выхода работы [1] уже было известно, что гиперболические системы (системы Аносова, системы, удовлетворяющие аксиоме A) не плотны в пространстве всех динамических систем. Стало ясно, что необходимо ослабить условия гиперболичности и расширить понятие аттрактора. Появились понятия частичной и неравномерной гиперболичности и аттрактора Милнора [2].

Все эти понятия в полной мере применимы к построенным в середине 80-х годов примерам динамических систем (см., например, [3]) с аттракторами, которые явно имеют фрактальную структуру, но не являются хаотическими. Наибольший показатель Ляпунова, измеряющий скорость расхождения траекторий с близкими начальными значениями, либо равен нулю, либо отрицателен. С другой стороны, благодаря фрактальной структуре аттрактора, динамика на нем похожа на хаотическую. Эти объекты – *странные нехаотические аттракторы* (СНА), находятся последние несколько лет в центре внимания как

[1]Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

[2]Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ansakharov2008@yandex.ru.

теоретических, так и экспериментальных исследований. Целью данной заметки является описание простейшего класса динамических систем, в которых могут возникать СНА.

Так как существует несколько формальных определений СНА (см. [4]), то будем считать синонимом СНА аттрактор Милнора.

Пусть X – многообразие с непрерывнем потоком на нем, μ_0 – мера, эквивалентная мере Лебега на X. *Странный нехаотический аттрактор* $\mathcal{A}$ – замкнутое множество фазового пространства такое, что

1. бассейн притяжения $B(\mathcal{A}) := \{x : \omega(x) \subset \mathcal{A}\}$ имеет положительную меру Лебега и не существует замкнутого подмножества $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ такого, что мера Лебега $\mu_0(B(\mathcal{A}'))$ положительна;

2. $\mathcal{A}$ не является ни конечным множеством точек, ни кусочно-гладким многообразием;

3. $\mathcal{A}$ – нехаотический: множество точек из бассейна притяжения, у которых показатели Ляпунова положительны, имеет нулевую меру Лебега.

В подавляющем большинстве работ, посвященным СНА, рассматриваются неавтономные динамические системы с квазипериодической зависимостью от времени. Такие системы можно рассматривать как автономные расширения квазипериодического потока на торе $\mathbb{T}^m$, $m \geq 1$. Ограничимся рассмотрением простейшего случая – потоков на произведении $\mathbb{T}^m \times S^1$ (S^1 *-расширений квазипериодических потоков*).

Пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ – угловые координаты на торе $\mathbb{T}^m$, ω – вектор, компоненты которого линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$. Определим поток f^t на $\mathbb{T}^m \times S^1$ равенством $f^t(\varphi, \theta) = (\varphi_t, f^t_\varphi(\theta))$, где $\varphi_t = \varphi + \omega t (\mod 2\pi)$ – квазипериодический поток на базе, $\theta \in S^1$, а f^t_φ – гомеоморфизм слоя $\{\varphi\} \times S^1$ в слой $\{\varphi_t\} \times S^1$ для всех t и φ. Будем считать, что этот поток порождается векторным полем

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{\theta} = v(\varphi, \theta). \tag{1.1}$$

Стандартная программа исследования аттракторов в таких потоках включает решение двух задач:

(1) топологическая классификация аттракторов;

(2) строгое обоснование типичных бифуркаций, приводящих к рождению аттракторов. В литературе описано несколько сценариев рождения СНА в системах с квазипериодическим возмущением, обоснованных численными методами. Поэтому иногда “странность” наблюдаемых объектов иногда объясняется ошибками эксперимента [5].

Ниже описывается ряд результатов, связанных с решением задачи (1). Непосредтвенно с этой задачей связана и задача топологической классификации потоков, порождаемых (1.1). Так как поток на базе фиксирован, то для классификации используется отношение *послойной топологической эквивалентности*, т.е. два таких потока $(\varphi_t, f^t_\varphi(\theta))$ и $(\varphi_t, g^t_\varphi(\theta))$ топологически эквивалентны, если существует непрерывное семейство гомеоморфизмов $h_\varphi : S^1 \to S^1$ такое, что $h_{\varphi_t} \circ f^t_\varphi = g^t_\varphi \circ h_\varphi$.

Кандидатами в аттракторы являются связные замкнутые инвариантные множества потока f^t. Пусть $\mathcal{A}$ – такое множество. Тогда сужение g^t потока f^t на $\mathcal{A}$ является расширением квазипериодического потока на базе, т.е. существует непрерывное отображение $p : \mathcal{A} \to \mathbb{T}^m$ такое, что $p \circ g^t = \varphi_t \circ p$ для всех $t \in \mathbb{R}$ (гомоморфизм потоков). Ясно, что $p = \pi\big|_{\mathcal{A}}$, где $\pi : \mathbb{T}^m \times S^1 \to \mathbb{T}^m$ – естественная проекция. Из минимальности потока на базе следует, что $\mathcal{A}$ имеет непустое пересечение с любым слоем: $\mathcal{A}_\varphi = \mathcal{A} \cap (\{\varphi\} \times S^1) \neq \varnothing$. Поэтому структура $\mathcal{A}$ определяется топологией слоев $\mathcal{A}_\varphi$.

Поток f^t может иметь как хаотические, так и нехаотические странные аттракторы. Очевидно, любые аттракторы содержатся в связных компонентах цепно-рекуррентного[3]

[3]Цепно-рекуррентное множество потока f^t на компактном метрическом пространстве X строит-

множества $\mathcal{R}$ потока f^t. В цепно-рекуррентном множестве естественно выделить инвариантные замкнутые множества, обладающие полноценной рекуррентностью. В данном случае – это минимальные множества.

Пусть f^t и g^t – потоки на компактных метрических пространствах X и Y соответственно, $p : Y \to X$ – гомоморфизм потоков. Поток g^t называется *почти однолистным расширением* потока f^t, если множество $D = \{x \in X :$ слой $p^{-1}(x)$ состоит из одной точки$\}$ является множеством второй категории в X.

Если поток f^t – почти периодический, то почти однолистное расширение называется *почти автоморфным.* Точки $x \in D$ в этом случае называются почти автоморфными точками. Минимальное множество почти автоморфного расширения называется *почти автоморфным минимальным множеством.*

Напомним, что траектории почти периодического потока – равномерно почти периодические функции $f^t(x)$. Замыкание почти периодической траектории $X = \overline{\{f^t(x), t \in \mathbb{R}\}}$ является пространством компактной абелевой группы: это либо m-мерный тор, либо m-мерный соленоид[4].

Пусть g^t – почти автоморфное расширение почти периодического потока f^t. Траектории точек $y, y' \in Y$ называются *дистальными*, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\varrho(g^t(y), g^t(y')) > \varepsilon$ для любого t (ϱ – метрика на Y). В противном случае эти траектории называются *проксимальными.* Определим отношение проксимальности $\mathcal{P}(Y)$, индуцируемое потоком g^t: точки $y \sim y'$ тогда и только тогда, когда их траектории проксимальны. Согласно структурной теореме теории почти автоморфных потоков ([8], § 3) множество дистальных точек потока g^t – это прообраз множества почти автоморфных точек при гомоморфизме p, отношение проксимальности $\mathcal{P}(X)$ является отношением эквивалентности и $X = Y/\mathcal{P}(Y)$.

Поток на торе $\mathbb{T}^{m+1}$, определяемый (1.1), обладает топологическим инвариантом – *числом вращения слоя*

$$\rho = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\overline{\theta}(t, \varphi_0, \theta_0),^{5}$$

которое не зависит от $(\varphi_0, \theta_0) \in \mathbb{T}^{m+1}$ [9], [10]. Вектор (ω, ρ) называется *вектором вращения* потока f^t. Число вращения слоя позволяет ввести следующую характеристику рассматриваемых потоков. Поток называется *регулярным*, если существует траектория $\theta(t, \varphi_0, \theta_0)$ и число $c > 0$ такие, что

$$|\overline{\theta}(t, \varphi_0, \theta_0) - \theta_0 - \rho t| \le c \tag{1.2}$$

для любого $t \in \mathbb{R}$. В противном случае он называется *нерегулярным*[6]. Выполнение неравенства (1.2) для одной траектории влечет его выполнение для всех траекторий потока.

ся следующим образом. Пусть $x, y \in X$, $\varepsilon, T > 0$, тогда (ε, T)-цепь от x к y – это множество точек $\{x_0 = x, x_1, \ldots, x_r = y\}$ и последовательность моментов времени $t_0, t_1, \ldots, t_{r-1} > T$ такие, что $\varrho(x_k, f^{t_k}(x_{k+1})) < \varepsilon$ для $k = 0, 1, \ldots, r-1$ (ϱ – метрика на X). Точка $x \in X$ называется *цепно-рекуррентной*, если для любых $\varepsilon, T > 0$ существует (ε, T)-цепь от x до x. Множество $\mathcal{R}$ всех цепно-рекуррентных точек потока называется цепно-рекуррентным множеством. $\mathcal{R}$ – замкнутое инвариантное множество, содержащее неблуждающее множество потока [6].

[4]Соленоидом $\mathcal{S}$ называется обратный предел $\varprojlim(\mathbb{T}^m, \alpha_k)$ последовательности групповых гомоморфизмов $\alpha_n : \mathbb{T}^m \to \mathbb{T}^m$. На универсальном накрытии тора каждому такому гомоморфизму соответствует линейное преобразование $A_n \in \mathrm{GL}(m, \mathbb{Z})$. Гомоморфизм α_n является q_n-листным накрытием $\mathbb{T}^m$, где $q_n = \det A_n$. Почти периодический поток – линейный поток на соленоиде [7].

[5]Здесь $\overline{\theta}$ – поднятие траектории на универсальное накрытие тора.

[6]Простой пример нерегулярного потока – поток, порождаемый векторным полем $\dot{\varphi} = \omega$, $\dot{\theta} = v(\varphi)$, для которого интеграл $I(t, \varphi) = \int\limits_0^t (v(\varphi + \omega s) - \rho) ds$, где $\rho = \int\limits_{\mathbb{T}^m} v(\varphi) d\varphi$, неограничен.

Если $R^t_{(\omega,\rho)}$ – линейный поток на торе $\mathbb{T}^{m+1}$, определяемый вектором вращения, то условие (1.2) означает, что траектория на универсальном накрытии имеет конечное отклонение от прямой $(\omega t + \varphi_0, \rho t + \theta_0)$, являющейся поднятием на универсальное накрытие траектории линейного потока $R^t_{(\omega,\rho)}$.

2. Потоки Данжуа

Простейшим примером почти автоморфного минимального множества является континуум Данжуа – минимальное множество потока Данжуа на торе $\mathbb{T}^2$. Этот пример замечателен тем, что допускает прозрачное геометрическое описание.

При $m = 1$ система (1.1) определяет неособый поток на торе $\mathbb{T}^2$ – S^1-расширение периодического потока (детальное описание таких потоков и подробный список первоисточников имеется в обзоре [11]).

Отметим, что такой поток всегда регулярен. Предположим, что число вращения слоя ρ (называемое в этом случае числом вращения А. Пуанкаре) иррационально. Тогда поток имеет единственное минимальное множество, которое либо совпадает с тором $\mathbb{T}^2$ (поток называтся *транзитивным*), либо является континуумом Данжуа $\mathcal{D}_\rho$ (поток называется *потоком Данжуа*). По теореме Пуанкаре транзитивный поток топологически сопряжен линейному потоку $R^t_{(1,\rho)}$, в случае потока Данжуа сопряженность заменяется полусопряженностью (гоморфизмом потоков).

Локально все континуумы Данжуа одинаковы: они являются локально тривиальными расслоениями с базой S^1 и канторовским множеством $\mathcal{C}$ в качестве слоя. Однако, существует несчетное множество негомеоморфных континуумов Данжуа: два множества $\mathcal{D}_\rho$ и $\mathcal{D}_{\rho'}$ гомеоморфны тогда и только тогда, когда существует линейное преобразование $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ такое, что $\rho' = \dfrac{a\rho + b}{c\rho + d}$, т.е. это преобразование переводит прямую в $\mathbb{R}^2$ с наклоном ρ в прямую с наклоном ρ' [12].

Теорема 2.1. *Поток Данжуа является почти автоморфным расширением квазипериодического потока $R^t_{(1,\rho)}$.*

Доказательство. Любой поток Данжуа может быть получен из транзитивного потока операцией раздутия[7] некоторого множества траекторий. Обратная операция называется операцией сдутия. Более точно: существует непрерывное гомотопное тождественному отображение $p : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ (отображение сдутия) со свойствами:

(1) $p \circ f^t = R^t_{(1,\rho)} \circ p$;

(2) $p(\mathcal{D}_\rho) = \mathbb{T}^2$;

(3) пусть Δ – компонента множества $\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{D}_\rho$, тогда

  (a) Δ односвязна;

  (b) граница Δ состоит в точности из двух траекторий $O_1, O_2 \subset \mathcal{D}_\rho$;

  (c) $p(\Delta \cup Q_1 \cup O_2)$ является одной траекторией потока $R^t_{(1,\rho)}$.

[7]Неформально эту операцию можно описать следующим образом: делается разрез вдоль траектории на поверхности тора и к его краям приклеивается (бесконечная) полоса конечной площади. Так как полоса имеет конечную площадь, то получаем поверхность, гомеоморфную тору. В полосе поток доопределяется заданием слоения бесконечных кривых. Очевидно, на вклеенной полосе траектории полученного потока будут обладать свойством проксимальности.

Траектории, принадлежащие компоненте связности Δ, обладают свойством проксимальности по построению. Так как число компонент связности множества $\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{D}_\rho$ не более чем счетно, то образ множества дистальных траекторий потока Данжуа – множество 2-ой категории в $\mathbb{T}^2$. Поэтому сужение $f^t\big|_{\mathcal{D}_\rho}$ является почти автоморфным расширением квазипериодического потока $R^t_{(1,\rho)}$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Пусть $\Delta(f^t) = \bigcup\limits_k \Delta_k$, где Δ_k – компонента связности множества $\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{D}_\rho$ потока Данжуа f^t. Два множества $R, S \subset \mathbb{T}^2$ называются *соизмеримыми*, если их прообразы $\overline{T}, \overline{S}$ на универсальном накрытии аффинно эквивалентны: $S = L(R)$, где $Lx = Ax + b$, $A \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$, $b = \begin{pmatrix}\alpha \\ 0\end{pmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Два потока Данжуа f_1^t и f_2^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда множества $\Delta(f_1^t)$ и $\Delta(f_2^t)$ соизмеримы. Таким образом, полным топологическим инвариантом потока Данжуа является пара чисел (ρ, σ), где σ – кардинальное число множества компонент связности $\Delta(f^t)$).

Множество $\mathcal{D}_\rho$ является единственным аттрактором потока Данжуа, цепно-рекуррентное множество которого – весь тор. Этот аттрактор – негрубый: в любой ε-окрестности потока Данжуа найдется транзитивный поток, имеющий то же самое число вращения слоя ρ. Чтобы это показать, заметим, что непрерывный поток Данжуа топологически эквивалентен C^1-гладкому потоку. Известно, что в любой достаточно малой C^1-окрестности гладкого гомеоморфизмома окружности можно найти транзитивный гомеоморфизм с тем же самым числом вращения ([13], теорема 12). Теперь наше утверждение доказывается применением конструкции надстройки над найденным транзитивным гомеоморфизмом.

Континуум Данжуа допускает описание с помощью обратного предела последовательности вложений [14]. Пусть $d_\rho : S^1 \to S^1$ – гомеоморфизм Данжуа с числом вращения ρ, ℓ – прямая $y = \rho x \subset \mathbb{R}^2$, $Q_r \subset \ell$ – открытый интервал радиуса $r > 0$ с центром в начале координат. Пусть $\overline{\ell}$ и $\overline{Q}_r$ обозначают их проекции на $\mathbb{T}^2$. Так как для любых компонент $\delta, \delta' \subset S^1 \setminus \mathcal{C}_\rho$ существует n такое, что $d_\rho^n(\delta) = \delta'$, то $\Delta \equiv \mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{D}_\rho$ – открытый топологический диск. Рассмотрим последовательности $0 < r_0 < r_1 < \cdots < r_n < \cdots, r_n \to \infty$, и $\Delta_n = \Delta \cap p^{-1}(\overline{Q}_{r_n})$ (p – отображение сдутия). Тогда Δ_n – открытый топологический диск, $\Delta_n \subset \Delta_{n+1}$ и $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \Delta_n = \Delta$. Таким образом, $\mathcal{D}_\rho = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} (\mathbb{T}^2 \setminus \Delta_n)$ является пересечением вложенных компактных множеств, так что $\mathcal{D}_\rho$ гомеоморфно обратному пределу $\varprojlim i_n$, где $i_n : \mathbb{T}^2 \setminus \Delta_n \to \mathbb{T}^2 \setminus \Delta_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots,$ – вложения.

3. S^1-расширения квазипериодических потоков

Для S^1-расширений квазипериодических потоков существует классификация, похожая на классификации Пуанкаре потоков на двумерном торе. Она основана на топологических свойствах минимальных множеств таких потоков.

Пусть $\mathcal{A} \neq \mathbb{T}^{m+1}$ – минимальное множество потока f^t, $\mathcal{A}_\varphi = p^{-1}(\varphi)$ – слой над точкой φ. Так как множество $\mathcal{A}_\varphi$ замкнуто, то $S^1 \setminus \mathcal{A}_\varphi = \cup_{k=1}^N B_k$, где $1 \le N \le +\infty$, B_k – открытая дуга окружности S^1 (дополнительная дуга). Пусть α_k, β_k – концевые точки дуги B_k. Имеет место очевидное утверждение.

Л е м м а 3.1. *Траектории точек (φ, α_k), $(\varphi, \beta_k) \in \{\varphi\} \times S^1$ послойно проксимальны.*

Определим отображение $u : \mathbb{T}^m \to 2^{\mathbb{T}^{m+1}}$ формулой[8] $u(\varphi) = \mathcal{A}_\varphi$. Это отображение полунепрерывно сверху, множество точек его непрерывности является множеством 2-ой категории в $\mathbb{T}^m$.

Теорема 3.1. *Если $\mathcal{A} \neq \mathbb{T}^{m+1}$ – минимальное множество регулярного потока, порождаемого* (1.1), *то оно является почти автоморфным расширением квазипериодического потока на торе $\mathbb{T}^m$.*

Доказательство. Покажем сначала, что существует, по-крайней мере, одна точка φ_0 такая, что $\operatorname{card} \mathcal{A}_{\varphi_0} = 1$. Допустим противное. Определим функции

$$u^+(\varphi) = \sup_\theta \{(\varphi, \theta) \in \mathcal{A}_\varphi\}, \quad u^-(\varphi) = \inf_\theta \{(\varphi, \theta) \in \mathcal{A}_\varphi\}.$$

Эти функции полунепрерывны сверху и снизу, соответственно, и удовлетворяют условию инвариантности $u^\pm(\varphi_t) = \widetilde{F}^t_\varphi(u^\pm(\varphi))$, $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, $u^-(\varphi) < u^+(\varphi)$ для любого $\varphi \in \mathbb{T}^m$. Пусть U_-, U_+ – точечные множества соответствующие графикам функций $u^-(\varphi)$, $u^+(\varphi)$. Тогда множества $\overline{U}_-, \overline{U}_+$ компактны, инвариантны и $\overline{U}_- \cap \overline{U}_+ = \varnothing$, что противоречит минимальности $\mathcal{A}$. Следовательно, существует точка φ_0 такая, что $u^+(\varphi_0) = u^-(\varphi_0)$.

Слои $\mathcal{A}_\varphi$ содержатся в некотором компактном интервале I. Рассмотрим отображение $u : \mathbb{T}^m \to 2^I : u(\varphi) = \mathcal{A}_\varphi$. Как отмечалось выше, множество точек непрерывности является множеством 2-ой категории. Пусть φ_0 – точка непрерывности u. Если $u(\varphi_0)$ содержит более одной точки, то существует окрестность $B(\varphi_0) \subset \mathbb{T}^m$ и $\delta > 0$ такие, что из соотношения $\varphi \in B(\varphi_0)$ следует $\operatorname{diam} u(\varphi) \geq \delta > 0$. Найдем $t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{R}_+$ такие, что $\mathbb{T}^m = B(\varphi_0) \bigcup B(\varphi_{t_1}) \bigcup \ldots \bigcup B(\varphi_{t_r})$. Из инвариантности $\mathcal{A}$ получаем существование числа $\delta' > 0$ такого, что

$$\operatorname{diam} u(\varphi) \geq \delta' > 0$$

для любого $\varphi \in \mathbb{T}^m$. Полученное противоречие показывает, что $\operatorname{card} \mathcal{A}_\varphi = 1$ для любой точки непрерывности u.
Доказательство закончено.

Следствие 3.1. *Типичный слой $\mathcal{A}_\varphi$ – замкнутое множество одного из следующих трех типов: $\mathcal{A}_\varphi$ – конечное множество точек S^1, $\mathcal{A}_\varphi = S^1$, $\mathcal{A}_\varphi = \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ – канторово множество.*

Аналог классификации А. Пуанкаре для S^1-расширений квазипериодических потоков содержится в следующем утверждении (Т. Джагер, Я. Старк, [15][9]).

Теорема 3.2. *Пусть поток f^t с вектором вращения (ω, ρ) регулярен, тогда*

(1) *если вектор вращения нерезонансный, то поток f^t полусопряжен линейному потоку $R^t_{(\omega,\rho)}$, причем единственное минимальное множество $\mathcal{A}$ – минимальное множество почти автоморфного расширения потока $R^t_{(\omega,\rho)}$.*

(2) *если вектор вращения резонансный, то любое минимальное множество потока является почти автоморфным расширением потока φ_t.*

Если поток f^t нерегулярен, то он транзитивен и имеет единственное минимальное множество.

[8] Если X – метрическое пространство с метрикой d, то 2^X – пространство всех компактных подмножеств X с метрикой Хаусдорфа d_H на 2^X, которая определяется так: если A, B компактные подмножества X, то $d_H(A,B) = \max\{\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B}(A,b)\}$.

[9] В работе Т. Джагера и Я. Старка рассматривался не поток, а гомеоморфизм, являющийся расширением иррационального поворота окружности. Перенос этого результата на потоки проделан в [16], [17].

Пусть F^t обозначает поднятие потока f^t на накрытие $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}$. Преобразование координат (не гомотопное тождественному) $(\varphi, \theta) \to (\varphi, \langle k\,|\varphi\rangle + n\theta + u(\varphi))$ преобразует любое компактное инвариантное множество потока f^t в гомотопное нулевому сечению инвариантное множество потока на косом произведении с базой, являющейся n-листным накрытием тора $\mathbb{T}^m$. Это позволяет свести изучение структуры инвариантных множеств потока f^t к изучению структуры инвариантных компактных множеств потока F^t.

Определим теперь *показатель Ляпунова* траектории системы (1.1) равенством

$$\lambda(\varphi, \theta) \,=\, \limsup_{t\to\infty} t^{-1} \int\limits_0^t v'_\theta(\varphi + \omega s, f^s_\varphi(\theta))ds.$$

Спектром показателей Ляпунова инвариантного множества $\mathcal{A}$ называется объединение $\Lambda(\mathcal{A}) = \bigcup\limits_{(\varphi,\theta)\in\mathcal{A}} \lambda(\varphi, \theta)$. Если выполняется неравенство

$$\sup_{\lambda\in\Lambda(\mathcal{A})} \{\lambda\} \,=\, \alpha \,<\, 0 \qquad \left(\inf_{\lambda\in\Lambda(\mathcal{A})} \{\lambda\} \,=\, \alpha \,>\, 0\right), \tag{3.1}$$

то инвариантное множество $\mathcal{A}$ называется *гиперболическим.*

Покажем, что в качестве гиперболических инвариантных множеств потока f^t могут быть только инвариантные торы.

Т е о р е м а 3.3. *Если $\mathcal{A}$ – компактное гиперболическое инвариантное множество потока F^t, то $\mathcal{A}$ – m-мерный тор.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий теоремы следует, что $\rho = 0$. Покажем, что система (1.1) имеет решение $\theta = u(\varphi)$, где $u(\varphi)$ – функция на торе $\mathbb{T}^m$.

Определим функции

$$u_+(\varphi) \,=\, \sup_\theta\{(\varphi, \theta) \in \mathcal{A}_\varphi\}, \qquad u_-(\varphi) \,=\, \inf_\theta\{(\varphi, \theta) \in \mathcal{A}_\varphi\}.$$

Эти функции полунепрерывны сверху и снизу, соответственно, и удовлетворяют условию инвариантности $u_\pm(\varphi_t) = F^t_\varphi(u_\pm(\varphi))$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число, покажем, что существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $|\theta - u_-(\varphi)| < \delta$ следует неравенство

$$|F^t_\varphi(\theta) - u_-(\varphi_t)| \,<\, \varepsilon$$

для любого $t \in \mathbb{R}$. Пусть $\xi(t) = F^t_\varphi(\theta) - u_-(\varphi_t)$. Функция $\xi(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\xi} \,=\, v'_\theta(\varphi_t, u_-(\varphi_t))\xi + r(t, \varphi_t, u_-(\varphi_t), \xi), \tag{3.2}$$

где $r(t, \varphi_t, u_-(\varphi_t), \xi) = O(|\xi|^2)$. Так как нулевое решение линейного уравнения

$$\dot{\xi} \,=\, v'_\theta(\varphi_t, u_-(\varphi_t))\xi$$

экспоненциально асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), то нулевое решение нелинейного уравнения также асимптотически устойчиво. Отсюда следует существование требуемого $\delta(\varepsilon)$.

Пусть $(\varphi, \theta) \in \mathcal{A}$ и $\tilde{\varphi}$ – точка непрерывности $u_-(\varphi)$. Пусть $t_k \to \infty$ – последовательность такая, что $\tilde{\varphi} = \lim\limits_{k\to\infty} \varphi_{-t_k}$. Рассмотрим последовательности $\{(\varphi_{-t_k}, F^{-t_k}_\varphi(\theta))\}$ и $\{(\varphi_{-t_k}, F^{-t_k}_\varphi(u_-(\varphi))\}$, тогда существует подпоследовательность $t_j \to +\infty$ такая, что

$$\lim_{j\to\infty}\{(\varphi_{-t_j}, F^{-t_j}_\varphi(\theta)) \,=\, \lim_{j\to\infty}\{(\varphi_{-t_j}, F^{-t_j}_\varphi(u_-(\varphi))) \,=\, (\tilde{\varphi}, u_-(\tilde{\varphi})),$$

так как $\mathcal{A}_{\tilde{\varphi}} = \{u_-(\tilde{\varphi})\}$. Отсюда следует, что можно найти такое $s \in \mathbb{R}_-$, что $|F_\varphi^{-s}(\theta) - F_\varphi^{-s}(u_-(\varphi))| < \delta$. Сделав сдвиг по траекториям потока на время s, получаем $|\theta - u_-(\varphi)| < \varepsilon$. Следовательно, в силу произвольности ε, $\mathcal{A}_\varphi = \{u_-(\varphi)\}$, так что $u_-(\varphi)$ непрерывна в точке φ.

Доказательство закончено.

Отличительное свойство нетривиальных минимальных множеств описывается в следующем утверждении (для регулярных систем доказательство имеется в [25], утверждение 3.11, для нерегулярных – в [17], теорема 8.5).

Теорема 3.4. *Если минимальное множество не является тором, то оно связное, но не локально связное множество.*

Задача о существовании и числе гиперболических инвариантных торов для системы (1.1) является открытой проблемой. По этой причине мы сузим класс изучаемых систем.

4. Проективные потоки, индуцируемые двумерными линейными расширениями

Важным примером S^1-расширений являются проективные потоки, индуцированные двумерными линейными расширениями квазипериодических потоков на торе. Будем считать, что линейное расширение задано системой дифференциальных уравнений

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{x} = \begin{pmatrix} a(\varphi) & b(\varphi) - c(\varphi) \\ b(\varphi) + c(\varphi) & -a(\varphi) \end{pmatrix} x, \qquad x \in \mathbb{R}^2. \tag{4.1}$$

Проективный поток, индуцированный этим линейным расширением, порождается векторным полем на $\mathbb{T}^m \times S^1$:

$$\dot{\varphi} = \omega, \qquad \dot{\theta} = v(\varphi, \theta) = 2c(\varphi) + 2b(\varphi)\cos\theta - 2a(\varphi)\sin\theta. \tag{4.2}$$

Цепно-рекуррентное множество $\mathcal{R}$ такого проективного потока имеет не более двух связных компонент (Дж. Селгрейд, [18]), которые являются инвариантными подрасслоениями $\mathbb{T}^m \times S^1$ и образуют наилучшее разложение Морса[10]. Разложению Морса соответствует разложение в инвариантную сумму Уитни пространства $\mathbb{T}^m \times \mathbb{R}^2$. В данном случае это разложение либо тривиально, либо сумма одномерных расслоений $W^s \oplus W^u$.

Спектр показателй Ляпунова Λ, соответствующий разложению Морса (и называемый спектром Ляпунова-Морса), определяется также формулой (3.1). Заметим, что спектр Ляпунова-Морса проективного потока (т.е. систем в вариациях для траекторий потока) с

[10]Пусть $\omega(x)$, $\alpha(x)$ – множества предельных точек при $t \to \pm\infty$ траектории потока f^t на компактном пространстве X, начинающейся в точке $x \in X$. *Разложение Морса* для потока g^t – конечный набор $\{M_1, \dots, M_k\}$ непустых, дизъюнктных, изолированных инвариантных множеств, удовлетворяющих условиям:

1. $\alpha(x), \omega(x) \subset \bigcup_{k=1}^r M_k$ для любого $x \in X$;
2. если $M_{k_0}, M_{k_1}, \dots, M_{k_m}$ – различные множества из указанного и точки $x_1, \dots, x_m \in X \setminus \bigcup_{i=1}^m M_i$ таковы, что $\alpha(x_i) \subset M_{k_{i-1}}, \omega(x_i) \subset M_{k_i}$, то $M_{k_0} \neq M_{k_m}$.

Элементы разложения Морса называются *множествами Морса*. Разложение Морса $\{M_1, \dots, M_k\}$ *лучше* $\{M_1', \dots, M_n'\}$, если для дюбого $1 \le j \le k$ существует $1 \le l \le n$ такое, что $M_j \subseteq M_l'$. Если существует наилучшее разложение Морса, то каждый его элемент является максимальным цепно-рекуррентным множеством (связной компонентой цепно-рекуррентного множества).

точностью до постоянного множителя совпадает со спектром линейного расширения, что позволяет разделить пространство проективных потоков на четыре класса. Итак, поток f^t, порождаемый системой (4.1) называется

1. *гиперболическим*, если $\Lambda = \{-\alpha, \alpha\}$, где $\alpha > 0$;
2. *эллиптическим*, если $\Lambda = \{0\}$ и поток f^t послойно дистальный;
3. *параболическим*, если $\Lambda = \{0\}$ и есть пары проксимальных траекторий;
4. *неравномерно гиперболическим*, если $\Lambda = [-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$.

Теория Селгрейда дает также оценку кардинального числа σ множества минимальных множеств проективного потока, порождаемого (4.2): $\sigma = 1, 2, \infty$ ([18], следствие 5.4).

Следующее утверждение уточняет теорему 3.2. для проективных потоков.

Теорема 4.1. *Проективный поток, индуцированный двумерным линейным расширением, не может иметь минимальных множеств Данжуа.*

Доказательство. Сначала покажем, что можно ограничиться случаем нерегулярного потока. Пусть $\mathcal{A}$ – единственное минимальное множество регулярного потока. Тогда вектор вращения потока нерезонансный и он полусопряжен линейному $h_{\varphi_t} \circ f^t_\varphi = R^t_{(\omega,\rho)} \circ h_\varphi$. Так как поток проективный, то полусопряженность h_φ порождается отображением Мёбиуса $A : \mathbb{T}^m \to \mathrm{PSL}(2, \mathbb{R})$ [11]. Поэтому единственная инвариантная мера эквивалентна мере Лебега на $\mathbb{T}^{m+1}$, откуда следует, что проективный поток минимален. Таким образом, можно считать, что поток нерегулярен и транзитивен.

Пусть $\mathcal{A}$ – единственное минимальное множество, R – множество, определяемое следующими условиями: отображение $\varphi \to \mathcal{A}_\varphi$ непрерывно при $\varphi \in R$, слой $\{\varphi\} \times S^1$ содержит множество 2-ой категории такое, что траектории, начинающиеся в этом множестве, транзитивны. Очевидно, множество R является множеством 2-ой категории. Пусть $\varphi_0 \in R$ такая точка, что $\mathcal{A}_{\varphi_0} = \mathcal{C}$, (a, b) – дополнительный интервал $\mathcal{A}_{\varphi_0}$. Пусть M – произвольное преобразование из группы $\mathrm{SL}\,(2, \mathbb{R})$ такое, что точки a и b являются неподвижными точками M. Так как $\varphi_0 \in R$, существует $\theta_0 \in (a, b)$ такую, что траектория точки (φ_0, θ_0) – транзитивна.

Рассмотрим точку $(\varphi_0, M(\theta_0))$. Существует последовательность $\{t_k\}$, $t_k \to \infty$, такая, что $f^{t_k}_{\varphi_0}(\theta_0)$ стремится к $(\varphi_0, M(\theta_0))$ при $t_k \to \infty$. Тогда $f^{t_k}_{\varphi_0}(\mathcal{A}_{\varphi_0})$ сходится к $\mathcal{A}_{\varphi_0}$. Отсюда следует, что $f^{t_k}_{\varphi_0}(a)$ сходится к a, $f^{t_k}_{\varphi_0}(b)$ сходится к b. Поэтому $f^{t_k}_{\varphi_0}$ сходится к M и $M(\mathcal{A}_{\varphi_0}) = \mathcal{A}_{\varphi_0}$. С другой стороны, $\mathrm{SL}\,(2, \mathbb{R})$ действует транзитивно на упорядоченных тройках $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, откуда следует, что интервал $[b, a]$ целиком должен содержаться в $\mathcal{A}_{\varphi_0}$. Получили противоречие.

Доказательство закончено.

Теорема 4.2. *Гиперболический проективный поток имеет два минимальных множества, которые являются конечнолистным накрытием базы* $\mathbb{T}^m$.

Эллиптический проективный поток послойно дистален, т.е. для любых $\theta, \theta' \in S^1$, $\theta \neq \theta'$, *существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что* $|\overline{\theta}(t, \varphi, \theta) - \overline{\theta}(t, \varphi, \theta')| > \varepsilon$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$.

Кроме того, он либо минимален, либо существует $n \in \mathbb{N}$ *такое, что* $\mathbb{T}^m \times S^1$ *представляет собой слоение минимальных множеств, являющихся* n*-листным накрытием базы* $\mathbb{T}^m$.

Доказательство. Из теоремы 3.3. следует, что гиперболический проективный поток имеет экспоненциально устойчивый инвариантный тор (аттрактор). Меняя

[11] Это следствие теоремы Ф. Тилена [20]: линейное двумерное расширение строго эргодического гомеоморфизма компактного метрического пространства измеримым преобразованием Мёбиуса приводится к одной из четырех нормальных форм, соответствующих четырем выделенным классам.

знак времени, получаем существование экспоненциально неустойчивого инвариантного тора (репеллера). Оба они являются минимальными множествами потока и, следовательно, других минимальных множеств нет. Очевидно, вектор вращения потока – резонансный, т.е. $\langle k\,|\omega\rangle + n\rho = 0$ для некоторых $k \in \mathbb{Z}^m$ и $n \in \mathbb{N}$. Минимальное n, удовлетворяющее этому соотношению будет кратностью накрытия базы.

Вторая часть этого утверждения – следствие теоремы Р. Камерона [19]: дистальный проективный поток порождается линейным расширением, которое послойно линейно эквивалентно потоку

$$(\varphi,\theta)\;\mapsto\;\left(\varphi_t, \exp\begin{pmatrix} 0 & -\theta-\rho t - I(t,\varphi)\\ \theta+\rho t + I(t,\varphi) & 0\end{pmatrix} x\right), \qquad I(t,\varphi) = \int\limits_0^t [v(\varphi_s)-\rho]ds).$$

Следовательно, проективный поток эквивалентен потоку $(\varphi,\theta)\mapsto(\varphi_t,\theta+\rho t+2I(t,\varphi))$. Если он регулярен (интеграл $I(t,\varphi)$ ограничен), то поток либо минимален (вектор вращения (ω,ρ) нерезонансный), либо фазовое пространство – несчетное объединение инвариантных m-мерных торов, являющихся n-листными накрытиями базы для некоторого целого $n \geq 1$ (вектор вращения резонансный). Если поток нерегулярен, то он минимален: поток сохраняет меру Лебега на $\mathbb{T}^{m+1}$, поэтому согласно теореме Пуанкаре о возвращении существует множество точек 2-ой категории, траектории которых транзитивны. Если существует непустое множество интранзитивных траекторий, то его замыкание является компактным инвариантным собственным подмножеством $\mathbb{T}^{m+1}$, содержащим минимальное множество $\mathcal{A}$. Из предыдущей теоремы следует, что $\mathcal{A}$ – почти конечнолистное расширение потока на базе. Так как поток дистален, то из существования слоя $\mathcal{A}_\varphi$ состоящего из n точек следует, что $\mathcal{A}$ – конечнолистное накрытие базы, т.е. m-мерный тор [21], и фазовое пространство $\mathbb{T}^{m+1}$ – объединение инвариантных m-мерных торов. Следовательно, проективный поток регулярен. Полученное противоречие показывает, что интранзитивных траекторий нет, т.е. поток минимален.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Таким образом, нетривиальные почти автоморфные минимальные множества могут иметь только неравномерно гиперболические и параболические проективные потоки.

В классе параболических проективных потоков пример потока с почти автоморфным минимальным множеством построен Р. Джонсоном [22][12]. Позже Дж. Селл показал [23], что если проективный поток, порождаемый системой

$$\dot\varphi\,=\,\omega, \qquad \dot\theta\,=\,b(\varphi)(\cos\theta-1)-2a(\varphi)\sin\theta, \qquad \int\limits_{\mathbb{T}^m} a(\varphi)d\varphi = 0,$$

имеет два минимальных множества $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ ($\mathcal{A}_1$ – это инвариантный тор $\theta=0$), то $\mathcal{A}_2$ будет почти автоморфным тогда и только тогда, когда интеграл $\int\limits_0^t a(\varphi_s)ds$ неограничен.

В 1969 г. В.М. Миллионщиков построил пример двумерного линейного расширения квазипериодического потока на торе [24], индуцированный проективный поток которого неравномерно гиперболический. Позднее Р.Э. Виноград построил аналитический вариант системы Миллионщикова [27]. Р. Джонсон установил, что проективный поток, индуцируемый системами Миллионщикова и Винограда имеет единственное нетривиальное почти автоморфное минимальное множество [25]. Кроме того, любая инвариантная эргодическая мера проективного потока в этом случае сингулярна относительно меры Лебега на

[12]В указанной работе рассматривается проективный поток, индуцированный линейным расширением почти периодического потока на одномерном соленоиде.

$\mathbb{T}^3$, однако, мера Лебега асимптотических к $\mathcal{A}$ точек положительна [26]. Для дискретных аналогов проективных потоков (в форме отображения Мёбиуса)

$$(\varphi, z) \to \left(\varphi + \omega, \frac{a(\varphi)z + b(\varphi)}{c(\varphi)z + d(\varphi)}\right), \qquad a(\varphi)d(\varphi) - b(\varphi)c(\varphi) = 1, \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{4.3}$$

существование минимальных множеств, обладающих такими же свойствами, что и в примере В.М. Миллионщикова, доказано М. Эрманом [5].

Пример минимального проективного потока, индуцированного неравномерно гиперболическим двумерным линейным расширением, построен К. Бъерклофом [28].

5. Заключение

Изложенные результаты показывают, что странные нехаотические аттракторы появляются только в неравномерно гиперболических проективных потоках. Они рождаются в результате бифуркации слияния двух гиперболических инвариантных торов с образованием нетривиального минимального множества. Структура такого минимального множества $\mathcal{A}$ полностью определяется как структурой множества $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, так и динамикой на нем. Результаты в этом направлении будут приведены в другой публикации.

Второй автор благодарит РФФИ РАН за финансовую поддержку (грант № 11-01-12056 офи-м).

Список литературы

1. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence. // Comm. Math. Phys. – 1971. – V. 20. – P. 167–192.

2. Milnor J. On the Concept of Attractor. // Commun. Math. Phys. – 1985. – V. 99. – P. 177–195.

3. Grebogi C., Ott E. Pelikan S., Yorke J. A. Strange Attractors that are not chaotic. // Physica. – 1984. – D 13. – P. 261–268.

4. В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников Теория бифуркаций. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Итоги науки и техники. – ВИНИТИ. М. 1986.

5. Haro A., Simo C. To be or not to be a SNA: That is the question. – preprint. 2005. 13 p.

6. Аносов Д.В., Арансон С.Х., Бронштейн И.У., Гринес В.З. Гладкие динамические системы. – Итоги науки и техники. (Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы 1). ВИНИТИ. 1985. т. 1.

7. Clark A. Linear flows on κ-solenoids. // Topology and its Applications. – 1999. – V. 94. – P. 27–49.

8. Veech W.A. Almost Automorphic Functions on Groups. // Amer. J. Math. – 1965. – V. 87, n. 3. – P. 719–751.

9. Веременюк В.В. Существование числа вращения уравнения $\dot{x} = \lambda(t,x)$ с периодической по x и почти периодической по t правой частью. // Дифференциальные уравнения. – 1991. – Т. 27, № 6. – С. 1073–1076.

10. Herman M. Une métode pour minorer les exposants de Lyapunov et quelques examples montrant le cfractère local d'un théorme d'Arnold et de Moser sur le tore dimension 2. // Comm. Math. Helv. – 1983. – V. 58. – P. 453–502.

11. S. Aranson, E. Zhuzhoma Qualitative theory of flows on surfaces (a review). // J. Amer. Math. Sci. – 1998. – V. 90, n. 3. – P. 2051–2110.

12. Fokking R. The structure of trajectories. – Thesis. Technishe Universiteit Delft. 1991.

13. Арансон С.Х., Жужома Е.В., Малкин М.И. О взаимосвязи между гладкими и топологическими свойствами преобразований окружности (теоремы типа Данжуа). – ВИНИТИ. № 3052–84 деп. 1984.

14. Barge M., Williams R.F. Classification of Denjoy continua. // Topology and its Appl. – 2000. – V. 106, iss. 1. – P. 77–89.

15. Jäger T., J. Stark Towards a Classification for Quasiperiodically Forced Circle Homeomorphisms. // J. London Math. Soc. – 2006. – V. 73. – P. 727–744.

16. Сахаров А.Н. Минимальные множества расширений квазипериодических потоков. // Труды Средневолжского математического общества. – 2008. – Т. 10, № 1. – С. 321–329.

17. Huang W., Yi Y. Almost periodically forced circle flows. // J. Func. Anal. – 2009. – V. 257. i. 3. – P. 832–902.

18. Selgrade J. Isolated invariant sets for flows on vector bundles. // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – V. 203. – P. 359–390.

19. Cameron R. Almost periodic properties of bounded solutions of linear differential equations with almost periodic coefficients. // J. Math. Phys. – 1936. – V. 15. – P. 73–81.

20. Thieullen P. Ergodic reduction of random products of two by two matrices. // J. d'Analyse Mathématique. – 1997. – V. 73. – P. 19–64.

21. Sacker R.J., Sell G.R. Lifting properties in skew-product flows with applications to differential equations. – Mem. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 11(190).

22. Johnson R.A. A linear, almost peridic equation with an almost automorphic solution. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 82, n. 2. – P. 199–205.

23. Sell G.R. A remark on an example of R.A Johnson. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – V. 82, n. 2. – P. 206–208.

24. Миллионщиков В.М. Доказательство существования неправильных систем линейных дифференциальных уравнений с квазипериодическими коэффициентами. // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5, № 11. – С. 1979–1983.

25. Johnson R.A. On almost periodic linear differential systems of Millionščikov and Vinograd. // J. Math. Anal. Appl. – 1982. – V. 85, n. 2. – P. 452–460.

26. Novo S., Obaya R. Bidimensional linear systems with singular dynamics. // Proc. Amer. Math. Soc. – 1996. – V. 124, n. 10. – P. 3163–3172.

27. Виноград Р.Э. К проблеме Еругина. // Дифференциальные уравнения. – 1975. – Т. 11, № 4. – С. 636–638.

28. Bjerklöv K. Positive Lyapunov Exponent and Minimality for the Continuos 1-d Quasi-Periodic Schrödinger Equation with Two Basic Frequencies. // Ann. HenriPoincar/'e. – 2007. – V. 8. – P. 687–730.

Strange nonchaotic attractors in quasiperiodically forced systems

© M. L. Kolomiets[13], A. N. Sakharov[14]

Abstract. We give a review of results about topological structure for the minimal sets of dynamical systems which are the one-dimensional extensions of the quasi-periodic flows on m-dimensional torus. We show that in these systems minimal sets are or invariant tori, or the connected, but not locally connected sets. Latest can play the role of strange nonchaotic attractors.

Key Words: Attractors, minimal sets, proective flows, tological equivalence

[13]Assistant professor of department of higher mathematics, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.

[14]Assistant professor of department of higher mathematic, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ansakharov2008@yandex.ru.