УДК 517.938

Интервалы вращения счетных топологических марковских цепей с двумя классами состояний

© М. И. Малкин[1]

Аннотация. Рассматриваются конечные и счетные топологические марковские цепи, у которых пространство состояний разбито на два класса; такие марковские цепи возникают при символическом описании систем типа геометрической модели Лоренца. Для марковских цепей с указанным разбиением пространства состояний множество вращения вводится как множество индивидуальных статистических средних частот посещения одного из выделенных классов состояний. Доказано, что в случае транзитивности множество вращения топологической марковской цепи представляет собой замкнутый интервал, причем в случае топологического перемешивания интервал вращения нетривиален. Доказано также, что для конечных топологических марковских цепей концы интервала вращения — рациональные числа, которые достигаются как числа вращения периодических точек.

Ключевые слова: Топологические марковские цепи, гиперболические системы, множества вращения

1. Введение

Топологические марковские цепи (ТМЦ) играют роль символичских моделей для различных классов динамических систем с гиперболической структурой, включая неравномерно гиперболические и частично гиперболические системы, когда фазовое пространство системы допускает марковское разбиение (возможно, счётное). К таким классам систем относятся системы, удовлетворяющие акиоме А С.Смейла, гиперболические бильярды, геометрические модели аттрактора Лоренца, одномерные кусочно-монотонные отображения с положительной топологической энтропией и др. (см. [1], [3],[4], [7], [2], [6]). В частности, Ф. Хофбауэр доказал (см. [5]), что для кусочно-монотонного, кусочно-непрерывного отображения f интервала I с положительной топологической энтропией можно построить конечную или счётную ТМЦ $(\Omega_P, \sigma))$ с матрицей переходов P, такую, что $f : I \to I$ топологически сопряжено с отображением сдвига $\sigma : \Omega_P \to \Omega_P$ (точнее говоря, сопряженность имеет место для всех точек, кроме, возможно, так называемого «малого множества», т.е. такого множества, которое не содержит периодических точек и обладающего тем свойством, что любая сосредоточенная на нём инвариантная мера имеет нулевую энтропию Колмогорова-Синая). Тем самым, изучение топологических и эргодических свойств одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией можно свести к рассмотрению счётных топологических марковских цепей.

В данной статье рассматриваются конечные и счетные топологические марковские цепи, у которых пространство состояний разбито на два фиксированных подмножества. Такие марковские цепи естественно возникают при моделировании систем типа системы Лоренца или её одномерной модели в виде кусочно-монотонного отображения с двумя интервалами монотонности. Для топологических марковских цепей с фиксированным разбиением пространства состояний множество вращения вводится как множество индивидуальных статистических средних частот посещения одного из выделенных классов состояний. В следующем параграфе мы показываем (см. теорему 1), что множество вращения топологической марковской цепи представляет собой замкнутый интервал, причем в

[1]Доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород; malkin@unn.ru

случае топологического перемешивания интервал вращения нетривиален. Далее будет показано (см. теорему 2), что для конечных транзитивных ТМЦ концы интервала вращения представляют собой рациональные числа, являющиеся числами вращения периодических точек. В теореме 2 установлено также, что при определении интервала вращения можно ограничиться орбитами, для которых статистическая частота существует и без перехода к верхнему пределу. Данные результаты отражают характерную природу множества вращения хаотических систем — оно представляет собой интервал, величина которого соответствует степени хаотичности системы (нетривиальность интервала вращения уже указывает на сильные хаотические свойства: положительность топологической энтропии, наличие периодических точек всех периодов за исключением, возможно, конечного числа). Известно, что подобные результаты имеют место и для других классов систем: эндоморфизмов окружности степени 1 и лоренцевских отображений игтервала (см. [9], [8]).

2. Интервалы вращения транзитивных топологических марковских цепей

Введем понятие множества вращения топологической марковской цепи (ТМЦ), у которой пространство состояний разбито на два подмножества.

Пусть (L, P, σ) — односторонняя ТМЦ с конечным или счетным пространством состояний L и матрицей переходов P (ее элементами которой являются нули или единицы). Фазовjt пространство ТМЦ (L, P, σ) есть

$$\Omega_P := \{\underline{x} = (x_i)_{i=0}^{\infty} : \ p_{x_i,x_{i+1}} = 1\},$$

$\sigma : \Omega_P \to \Omega_P$ — отображение одностороннего сдвига.

Предполагается, что пространство состояний L представлено в виде объединения непересекающихся подмножеств L_1 и L_2. Тогда $\Omega_P = B(\mathrm{L}_1) \cup B(\mathrm{L}_2)$, где $B(L_i)$ — цилиндрическое множество вида $B(L_i) = \{\underline{x} = \{x_n\}_{n=0}^{\infty} : x_0 \in L_i\}$, $i = 1, 2$. Будем считать, что для ТМЦ (L, P, σ) разбиение $L = L_1 \cup L_2$ фиксировано. Обозначим χ_{L_2} индикатор множества $L_2 \subset L$. Для произвольной точки $\underline{x} = \{x_n\}_0^{\infty} \in \Omega_P$ число вращения $\rho(\underline{x})$ определяется следующим образом:

$$\rho(\underline{x}) = \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \chi_{L_2}(x_n) \tag{2.1}$$

Таким образом, $\rho(\underline{x})$ есть верхний предел среднего числа попаданий орбиты точки $\underline{x}$ в цилиндрическое множетво $B(L_2)$ за время от нуля до $k-1$. Множество вращения $\rho(\sigma|\Omega_P)$ ТМЦ (L, P, σ) относительно разбиения $L_1 \cup L_2$ определяется как замыкание множества значений $\rho(\underline{x})$ для периодических точек $\underline{x}$:

$$\rho(\sigma|\Omega_P) = clos\{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in Per(\sigma|\Omega_P)\} \tag{2.2}$$

Пусть (L, P, σ) и (L', P', σ) — две топологически сопряженные ТМЦ, $L = L_1 \cup L_2$, $L' = L'_1 \cup L'_2$ — разбиения пространств состояний, и $h : \Omega_P \to \Omega_{P'}$ — гомеоморфизм, осуществляющий сопряженность, причем $h(B(L_1)) = B(L'_1)$, $h(B(L_2)) = B(L'_2)$. Тогда из определения множества вращения следует, что $\rho(\sigma|\Omega_P) = \rho(\sigma|\Omega_{P'})$.

Напомним некоторые определения. Непрерывное отображение $\varphi : X \to X$ называется *топологически транзитивным*, если для любой пары V, V' открытых подмножеств X найдется n такое, что $V \cap \varphi^{-n}V' \neq \emptyset$. Непрерывное отображение $\varphi : X \to X$ называется *топологически перемешивающим*, если для любой пары V, V' открытых подмножеств X

найдется n_0 такое, что при всех $n \geq n_0$ выполнено $V \cap \varphi^{-n}V' \neq \emptyset$. Заметим, что для конечных и счетных ТМЦ топологическая транзитивность $\sigma|\Omega_P$ равносильна неразложимости, а топологическое перемешивание равносильно неразложимости и апериодичности матрицы переходов.

Теорема 2.1. *Если $\sigma|\Omega_P$ топологически транзитивно, то $\rho(\sigma|\Omega_P)$ представляет собой замкнутый интервал (возможно, тривиальный). Если $\sigma|\Omega_P$ топологически перемешивает, то $\rho(\sigma|\Omega_P)$ — нетривиальный интервал.*

Доказательство. Из неразложимости ТМЦ (L, P, σ) следует, что $Per(\sigma|\Omega_P) \neq \emptyset$. Пусть $\rho_1 = inf\rho(\sigma|\Omega_P) \neq \sup\rho(\sigma|\Omega_P) = \rho_2$. Очевидно, что $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq 1$. Для любого $\varepsilon > 0$ можно найти периодические точки $\underline{x}$ и $\underline{y}$, такие что $\rho(\underline{x}) - \rho_1 < \varepsilon, \rho_2 - \rho(\underline{y}) < \varepsilon$. Пусть $\underline{x}$ и $\underline{y}$ имеют периоды q_1 и q_2 соответственно и $\rho(\underline{x}) = \frac{p_1}{q_1}$, $\rho(\underline{y}) = \frac{p_2}{q_2}$. Обозначим через b_1 и b_2 блоки $(x_0, ..., x_{q_1-1})$ и $(y_0, ..., y_{q_2-1})$ соответственно. Пусть $c = (z_0, ..., z_q)$- непустой блок (т.е. $(z_i, z_{i+1}) \in P$ для $i = 0, ..., q-1$); будем называть c периодическим блоком, если $(z_q, z_0) \in P$.

Для периодического блока c и натурального числа n обозначим через c^n непустой периодический блок, получающися n-кратным повторением c, а в случае $n = \infty$ определим периодическую точку $c^\infty \in Per(\sigma|\Omega_P)$, получающуюся бесконечным повторением c. Для произвольного конечного блока c обозначим через $\widehat{c}$ блок, получающийся из c удалением последнего символа.

Поскольку (L, P, σ) — неразложимая ТМЦ, то найдется непустой блок c_1 (соответственно, c_2), начинающийся символом x_0 (соответственно, y_0) и кончающийся символом y_0 (соответственно, x_0). Пусть $c_1 = (x_0, v_1, ..., v_t, y_0)$, $c_2 = (y_0, w_1, ..., w_s, x_0)$, тогда $\widehat{c_1} = (x_0, v_1, ..., v_t)$, $\widehat{c_2} = (y_0, w_1, ..., w_s)$. Для произвольных $m, n \in \mathbf{N}$ построим периодическую точку $\underline{z} = (b_1^n, \widehat{c_1}, b_2^m, \widehat{c_2})^\infty$.Тогда

$$\rho(\underline{z}) = \frac{np_1 + mp_2 + t_1 + s_1 + \chi_{L_2}(x_0) + \chi_{L_2}(y_0)}{nq_1 + mq_2 + t + s + 2},$$

где

$$t_1 = \sum_{i=1}^{t} \chi_{L_2}(v_i), s_1 = \sum_{i=1}^{s} \chi_{L_2}(w_i).$$

Устремляя $n \to \infty$, $m \to \infty$ так, что $\frac{n}{m} \to \lambda$, где $0 \leq \lambda \leq \infty$, получим, что $\rho(\underline{z})$ стремится к $\frac{\lambda p_1 + p_2}{\lambda q_1 + q_2}$. В силу произвольности λ, получаем, что значения $\rho(\underline{z})$, когда $m, n \in N$, плотны в интервале $[\rho(\underline{x}), \rho(\underline{y})]$. Поскольку $\rho(\underline{x}), \rho(\underline{y})$ можно выбрать сколь угодно близкими к ρ_1, ρ_2, то отсюда следует первое утверждение теоремы.

Пусть теперь $\sigma|\Omega_P$ топологически перемешивает. Докажем, что $\rho(\sigma|\Omega_P)$ не может быть тривиальным. Действительно, в противном случае $\rho(\sigma|\Omega_P) = \{\frac{p}{q}\}$ для некоторых несократимых $p \in Z^+, q \in \mathbf{N}$. Тогда период любой точки $\underline{x} \in Per(\sigma|\Omega_P)$ делится на q. С другой стороны, для любого символа $i \in L$ в силу перемешивания найдутся $n \in \mathbf{N}$ и непустые блоки c_1, c_2 длины n и $n+1$ соответственно, начинающиеся и кончающиеся в i. Тогда точки $(\widehat{c_1})^\infty, (\widehat{c_2})^\infty$ периодические и их периоды равны n и $n+1$ соответственно. Отсюда следует, что НОД периодов периодических точек равен единице. Таким образом, $\rho(\sigma|\Omega_P)$ есть либо $\{0\}$, либо $\{1\}$. Пусть для определенности $\rho(\sigma|\Omega_P) = 0$, тогда все символы любой периодической точки должны принадлежать L_1, но это противоречит неразложимости ТМЦ (т.к. $L_2 \neq \emptyset$).

Доказательство закончено.

3. Периодические точки, представляющие концы интервала вращения

В этом параграфе мы показываем, что для конечных транзитивных ТМЦ концы интеовала вращения представляют собой рациональные числа, являющиеся числами вращения периодических точек. Кроме того, будет показано, что множество вращения представляет собой набор чисел вращения тех точек, для которых статистическое среднее существует (т.е. тех точек, для которых верхний и нижний пределы при подсчете частоты посещения выделенного класса совпадают).

Теорема 3.1. *Пусть* (L, P, σ) *-неразложимая конечная ТМЦ. Тогда концы интервала вращения* $\rho(\sigma|\Omega_P)$ *— рациональные числа. Интервал вращения может быть представлен в виде:*

$$\rho(\sigma|\Omega_P) = \{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in \Omega_P\} = \{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in \Lambda\},$$

где Λ *— подмножество, состоящее из таких точек* Ω_P *, для которых существует предел в* (2.1).

Доказательство. Для конечного непустого блока $c = (x_0, ..., x_{q-1})$ определим число вращения

$$\rho(c) = \frac{\sum_{i=o}^{q-1} \chi_{L_2}(x_i)}{q}.$$

Очевидно, число вращения периодической точки $\underline{x} = (x_n)_0^\infty$ периода q равно $\rho(c)$, где $c = (x_0, ..., x_{q-1})$. Поэтому $\inf \rho(\sigma|\Omega_P) = \inf \rho(c)$, где нижняя грань берется по периодическим блокам c. Если предположить, что эта нижняя грань не достигается, то для любого N найдется периодический блок c длины большей N такой, что $\rho(c) < \rho(d)$ для любого периодического блока d, длина которого меньше длины блока c. Пусть N$=card\ L$ и блок $c = (x_0, ..., x_{q-1})$, $q >$N, обладает указанным свойством. Среди символов блока c есть хотя бы два совпадающих, т.к. $q > N$. Пусть $x_i = x_j, 0 \le i < j \le q-1$. Обозначим $d = (x_i, ..., x_{j-1})$ и $c' = (x_0, ..., x_{i-1}, x_j, ..., x_{q-1})$. В силу свойств блока c имеем: $\rho(c) < \rho(d) = \frac{p_1}{j-i}$, $\rho(c) < \rho(c') = \frac{p_2}{q-j+i}$ для некоторых $p_1, p_2 \in \mathbf{N}$. С другой стороны, число $\rho(c) = \frac{p_1+p_2}{(j-i)+(q-j+i)}$ должно принадлежать интервалу $[\rho(d), \rho(c')]$. Полученное противоречие показывает, что $\inf \rho(c)$ достигается на некотором периодическом блоке c. Тогда для периодической точки $\underline{x} = c^\infty$ имеем $\rho(\underline{x}) = \inf \rho(\sigma|\Omega_P)$. Аналогично находится периодическая точка $\underline{y}$, для которой $\rho(\underline{y}) = \sup \rho(\sigma|\Omega_P)$.

Покажем теперь, что для произвольного γ из интервала вращения можно найти точку $\underline{x} \in \Omega_P$ такую, что предел

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=0}^{k-1} \chi_{L_2}(x_n)$$

существует и равен γ. Действительно, из доказательства предыдущей теооремы следует, что для произвольного $i_0 \in L$ значения $\rho(c)$, когда c пробегает периодические блоки с началом в i_0, плотны в интервале вращения (в обозначениях теоремы 12 в качестве c_1 можно взять блок, содержащий символ i_0 и затем сдвинуть в i_0 начало периодического блока $b_1^n \widehat{c}_1 b_2^m \widehat{c}_2$). Таким образом, найдется последовательность c_n периодических блоков периода q_n с началом в точке i_0, такая что $\rho(c_n) = \frac{p_n}{q_n} \to \gamma$ при $n \to \infty$. Далее, возьмем последовательность натуральных чисел l_n такую, что $\frac{l_n}{q_{n+1}} \to \infty$ при $n \to \infty$ и рассмотрим точку $\underline{x} \in \Omega_P$ вида $\underline{x} = c_1^{l_1} c_2^{l_2} c_3^{l_3} \dots$.

Покажем, что $\rho(\underline{x}) = \gamma$. Действительно, любое $k \in \mathbf{N}$ однозначно представляется в виде $k = \sum_{i=1}^{m} l_i q_i + j q_{m+1} + s$, где $0 \le j < l_{m+1}, 0 \le s < q_{m+1}$. Тогда

$$\frac{\sum_{i=1}^{m} l_i p_i + j p_{m+1}}{\sum_{i=1}^{m} l_i q_i + (j+1) q_{m+1}} \le \frac{\sum_{n=0}^{k-1} \chi_{L_2}(x_n)}{k} \le \frac{\sum_{i=1}^{m} l_i p_i + (j+1) p_{m+1}}{\sum_{i=1}^{m} l_i q_i + j q_{m+1}} \tag{3.1}$$

Очевидно, что $m \to \infty$ при $k \to \infty$. Поэтому, учитывая стремление $\frac{p_m}{q_m} \to \gamma$, получим, что правая и левая части последнего двойного неравенства сходятся к γ при $k \to \infty$ (эта сходимость доказывается непосредственно с использованием теоремы Штольца).

Таким образом, имеем $\rho(\sigma|\Omega_P) \subset \{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in \Lambda\} \subset \{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in \Omega_P\}$. Покажем, что $\{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in \Lambda\} \subset \rho(\sigma|\Omega_P)$. Пусть $\gamma = \rho(\underline{x})$ для некоторой точки $\underline{x} = (x_n)_0^\infty \in \Omega_P$ и пусть $c_n = (x_0, ..., x_{q_n - 1})$-последовательность конечных блоков точки такая, что
$q_n \to \infty, \rho(c_n) \to \gamma$. Поскольку (L, P, σ)-конечная неразложимая ТМЦ, то для любой пары $i, j \in L$ найдется блок длины не более N$=$ $card\ L$, начинающийся в i и кончающийся в j. Таким образом,для любого $n \in \mathbf{N}$ имеется непустой блок $(x_{q_n - 1}, y_1^{(n)}, ..., y_{t_n}^{(n)}, x_0)$ длины не более N, и можно определить периодический блок $d_n = (x_0, ..., x_{q_n - 1}, y_1^{(n)}, ..., y_{t_n}^{(n)})$ длины не более $q_n + N$. Легко видеть, что $\lim_{n \to \infty} \rho(d_n) = \gamma$ и поэтому $\gamma \in \rho(\sigma|\Omega_P)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Как следует из доказательства теоремы, включение $\rho(\sigma|\Omega_P) \subset \{\rho(\underline{x}) : \underline{x} \in \Lambda\}$ справедливо также и для счетных ТМЦ.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, грант 11-01-12056 офи-м, и гранта правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039.

Список литературы

1. R. Bowen. *Equlibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms*, Lecture Notes Math., **470** (1975). Springer- Verlag.

2. W. de Melo, S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.

3. L. A. Bunimovich, N. I. Chernov, Ya. G. Sinai. *Markov partitions for two-dimensional hyperbolic billiards*, Uspekhi Matem. Nauk, **45** (1990), 97-134.

4. Y. Guivarch, J. Hardy. *Theorem limites pour une classe de chaines de Marcov et applications aux classe de chaines de Marcov et applications aux diffeomorphismes d'Anosov*, Ann. Inst. H.Poincare Probab. Statist. **24** (1988), 73-98.

5. F. Hofbauer. *On intrinsic ergodicity of piecewise monotone transformations with positive entropy*, Israel J. Math. **34** (1979), 213-236,

6. M. Malkin, *On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval*, Selecta Mathematica Sovietica, **8** (1989), 131–139.

7. В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, *О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца*, Труды ММО, **44** (1982), 150-212.

8. M.-C.Li, M.Malkin. *Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps.* Int. Jour. of Bifurcation and Chaos. **13** (2003), 3353-3372.

9. М.И.Малкин. *Периодические орбиты, энтропия и множества вращения непрерывных отображений окружности.* Украинский мат. журнал. **35** (1983), 327-332.

The intervals of rotation of denumerable topological Markov chains with two classes of states

© **M.I. Malkin**[2]

Abstract. We consider finite and countable topological Markov chains whose states are partitioned into two classes; such Markov chais occur as symbolic description of systems like geometric Lorenz models. The rotation set for such a Markov chain is defined as the set of individual mean frequences of visiting the chosen class of the partition. We prove that for transitive topological Markov chain, the rotation set is a closed interval, which is nontrivial provided that the chain is topologically mixing. We also prove that for a finite transitive topological Markov chain, the endpoints of the rotation interval are rational and represent the rotation numbers of two periodic points.

Key Words: Topological Markov chain, hyperbolic systems, the set of rotation

[2]Assistant professor of differential equations and mathematical analysis, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; malkin@unn.ru