УДК 517.988.67

Стационарные бифуркационные задачи со спектром Шмидта в линеаризации в условиях групповой симметрии

© Б. В. Логинов[1], И. В. Коноплева[2], Л. В. Миронова[3]

Аннотация. С целью приложений в теории электромагнитных колебаний доказаны G-инвариантная теорема о неявных операторах и теорема о редукции по числу уравнений вариационных уравнений разветвления и уравнений разветвления в корневых подпространствах для бифуркационных задач со спектром Шмидта в линеаризации. Всюду ниже использована терминология и обозначения работ [1]-[4].

Ключевые слова: стационарные бифуркационные задачи, спектр Э. Шмидта, групповая симметрия, G-инвариантная теорема о неявных операторах, уравнение разветвления в корневых подпространствах вариационного типа.

1. Введение

В цикле работ начала XX века по линейным и нелинейным интегральным уравнениям [5] Э. Шмидт ввел собственные числа λ_k оператора $B : H \to H$, учитывая их кратности, и собственные элементы $\{u_k\}_1^\infty, \{v_k\}_1^\infty$, удовлетворяющие соотношениям $Bu_k = \lambda_k v_k, B^* v_k = \lambda_k u_k$. Это позволило обобщить теорию Гильберта–Шмидта на несимметричные вполне непрерывные операторы в абстрактном сепарабельном гильбертовом пространстве H [6]–[8]. Некоторые физические приложения спектральных задач Шмидта отмечены в [9]–[10], в [11] дано развитие метода ложных возмущений к спектральным задачам Э.Шмидта, а в [12] доказана фредгольмовость задачи о собственных электромагнитных колебаниях резонаторов без потерь [13], являющейся спектральной задачей Э.Шмидта.

Отмеченные возможные приложения ставят задачу о ветвлении и устойчивости разветвляющихся решений бифуркационных задач, в линеаризации которых содержатся обобщенные спектральные задачи по Э.Шмидту. Целью данной работы является распространение наших результатов [14]–[16] на стационарные бифуркационные задачи со спектром Шмидта в линеаризации в условиях групповой симметрии. Это теоремы о наследовании групповой симметрии соответствующими уравнениями разветвления (УР) и уравнениями разветвления в корневых подпространствах (УРК) со следствиями : **1.** G-инвариантной теоремой о неявных операторах; **2.** теоремой о редукции вариационных УР и УРК для неинвариантных ядер (подпространств нулей) операторов. Авторы предполагают применить полученные результаты к указанным выше задачам теории электромагнитных колебаний при наличии групповой симметрии.

Работа поддержана проектом ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России"ГК П1122 и АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы"2.1.1/11180 Министерства образования и науки РФ.

[1]Профессор Ульяновского государственного технического университета, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru.
[2]Доцент Ульяновского государственного технического университета, г. Ульяновск; i.konopleva@ulstu.ru.
[3]Ассистент Ульяновского высшего авиационного училища гражданской авиации, г. Ульяновск; i.konopleva@ulstu.ru.

2. Стационарные задачи теории ветвления

Случай неинвариантного ядра линеаризованного оператора возникает в задачах о несимметричных локализованных волновых структурах в стратифицированной жидкости [17]–[18], где доказано, что в вариационном случае с инвариантным относительно некомпактных групп симметрий функционалом уравнение разветвления Ляпунова-Шмидта действием группы может быть редуцировано к системе меньшей размерности. Теоремы о наследовании УР и УРК групповой симметрии общей задачи стационарного ветвления в условиях ее групповой симметрии

$$F(x,\varepsilon)=0, \quad F(x_0,0)=0, \quad K_gF(x,\varepsilon)=F(L_gx,\varepsilon) \tag{2.1}$$

(E_1 и E_2-банаховы пространства, $L_g(K_g)$ – представления группы G в $E_1(E_2)$) доказаны в [14]–[15] для невариационных нелинейных уравнений. Они позволили доказать теоремы о редукции вариационных УР и УРК, движущихся по орбите точки ветвления x_0 под действием наследуемой группы симметрии, а также G-инвариантную теорему о неявных операторах [16].

Далее предполагается, что нелинейное уравнение (2.1) в окрестности точки ветвления $(x_0,0)$ допускает линеаризацию

$$\begin{aligned} B_{x_0}(x-x_0)=B_{x_0}(\varepsilon)(x-x_0)+C_{x_0}(\varepsilon)+\rho(x_0,x-x_0,\varepsilon)\equiv \\ \equiv B_{x_0}(\varepsilon)(x-x_0)+R(x_0,x-x_0,\varepsilon), \quad \rho(x_0,0,\varepsilon)\equiv 0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

где B_{x_0} - фредгольмов оператор с плотной в E_1 областью определения $D_{B_{x_0}}\subset D_{B_{x_0}(\varepsilon)}, N(B_{x_0})=\mathrm{span}\{\varphi_i\}_1^n, \ \varphi_i=\varphi_i(x_0)$ - подпространство нулей оператора B_{x_0}, $N^*(B_{x_0})=\mathrm{span}\{\psi_i\}_1^n,\psi_i=\psi_i(x_0)$ - подпространство дефектных функционалов, $\{\gamma_i\}_1^n,\gamma_i=\gamma_i(x_0)\in E_1^*,\{z_i\}_1^n,z_i=z_i(x_0)$ - соответствующие биортогональные системы $\langle\varphi_i,\gamma_j\rangle=\delta_{ij},\langle z_i,\psi_j\rangle=\delta_{ij};B_{x_0}(\varepsilon)$ достаточно гладкий по ε линейный оператор; нелинейный оператор ρ непрерывно дифференцируем по переменным $x_0,x-x_0$ и непрерывен по ε.

Определение 2.1. [19]–[21]. *Элементы $\varphi_k^{(s)},s=\overline{1,p_k},k=\overline{1,n}$ образуют полный канонический обобщенный жорданов набор (ОЖН $\equiv B(\varepsilon)-$ ЖН) оператор-функции $B-B(\varepsilon):E_1\to E_2$, если*

$$\begin{aligned} &B\varphi_k^{(s)}=\sum_{j=1}^{s-1}B_j\varphi_k^{(s-j)}, \quad B(\varepsilon)=B_1\varepsilon+B_2\varepsilon^2+\dots, \ \langle\varphi_k^{(s)},\gamma_l\rangle=0, \ s=\overline{2,p_k}, \\ &D_p=\det\sum_{j=1}^{p_k}\langle B_j\varphi_k^{(p_k+1-j)},\psi_l^{(1)}\rangle\neq 0, \ \ \varphi_k=\varphi_k^{(1)}, \quad \psi_l=\psi_l^{(1)}, \ k,l=\overline{1,n}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Этот набор биканонический, если ОЖН сопряженной оператор-функции $B^*-B^*(\varepsilon)$ и элементов $\{\psi_l\}_1^n$ также канонический, и три-канонический, если кроме того

$$\begin{gathered} \langle\varphi_i^{(j)},\gamma_k^{(l)}\rangle=\delta_{ik}\delta_{jl}, \ \ \gamma_k^{(l)}=\sum_{s=1}^{p_k+1-l}B_s^*\psi_k^{(p_k+2-l-s)}, \ \ \langle z_i^{(j)},\psi_k^{(l)}\rangle=\delta_{ik}\delta_{jl}, \\ z_i^{(j)}=\sum_{s=1}^{p_k+1-j}B_s\varphi_i^{(p_i+2-j-s)}, \quad \varphi_i^{(s)}=\varphi_i^{(s)}(x_0), \\ \Phi=\Phi(x_0)=(\varphi_1^{(1)},\dots,\varphi_1^{(p_1)},\dots,\varphi_n^{(1)},\dots,\varphi_n^{(p_n)}), \end{gathered} \tag{2.4}$$

векторы $\gamma=\gamma(x_0),\Psi=\Psi(x_0)$ и $Z=Z(x_0)$ определяются аналогично. Для линейной оператор-функции $B-\varepsilon B_1$ ОЖН всегда может быть выбран три-каноническим. $K=p_1+...+p_k$ - корневое число.

Л е м м а 2.1. *Если для фредгольмовой оператор-функции $B_{x_0} - B_{x_0}(\varepsilon)$ существует полный три-канонический ОЖН, то определены проекторы*

$$\mathbf{P}_{x_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\gamma_i^{(j)}(x_0)\rangle\varphi_i^{(j)}(x_0) = \langle\cdot,\gamma\rangle\Phi : E_1 \to E_1^K = K(B_{x_0}, B_{x_0}(\varepsilon)) = span\{\varphi_i^{(j)}(x_0)\},$$
$$\mathbf{Q}_{x_0} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}(x_0)\rangle z_i^{(j)}(x_0) = \langle\cdot,\Psi\rangle Z : E_2 \to E_{2,K} = span\{z_i^{(j)}(x_0)\}, \tag{2.5}$$

порождающие разложения E_1 и E_2 в прямые суммы, отвечающие точке x_0

$$E_1 = E_1^K(x_0) \dot{+} E_1^{\infty-K}(x_0), \quad E_2 = E_{2,K}(x_0) \dot{+} E_{2,\infty-K}(x_0). \tag{2.6}$$

Оператор $B_0 = B_{x_0}$ сплетается проекторами $\mathbf{P}_{x_0}$ и $\mathbf{Q}_{x_0}$:

$$B_{x_0}\mathbf{P}u = \mathbf{Q}B_{x_0}u \text{ на } D_{B_{x_0}},\ B_{x_0}\Phi = \mathfrak{A}_0 Z,\ B_{x_0}^*\Psi = \mathfrak{A}_0\gamma,\ \mathfrak{A}_0 = diag(A_1,\ldots,A_n), \tag{2.7}$$

где $A_i - (p_i \times p_i)$ - матрицы с единицами вдоль побочной поддиагонали и нулями вне ее и $B_0 : D_{B_0}\bigcap E_1^{\infty-K}(x_0) \to E_{2,\infty-K}(x_0)$ является изоморфизмом.

С л е д с т в и е 2.1. *Для линейной по ε оператор-функции $B_0 - \varepsilon B_1$ три-канонический ОЖН существует и свойства (2.7) дополнены следующими*

$$B_1\mathbf{P} = \mathbf{Q}B_1 \quad \text{на} \quad D_{B_1},\ \ B_1\Phi = \mathfrak{A}_1 Z,\ \ B_1^*\Psi = \mathfrak{A}_1\gamma \tag{2.8}$$

где $\mathfrak{A}_1 = diag(A^1,\ldots,A^n)$ – клеточно-диагональная матрица, $A^i - (p_i \times p_i)$ - матрицы с единицами вдоль побочной диагонали и нулями вне ее. Таким образом, операторы B_0 и B_1 действуют в инвариантных парах подпространств $E_1^K, E_{2,K}$ и $E_1^{\infty-K}, E_{2,\infty-K}$, отвечающих точке x_0, и $B_0 : D_{B_0}\bigcap E_1^{\infty-K} \to E_{2,\infty-K}, B_1 : E_1^K \to E_{2,K}$ являются изоморфизмами.

Т е о р е м а 2.1. [15]. *При существовании полного три-канонического ОЖН задача определения малых решений уравнения (2.2) в окрестности точки x_0 эквивалентна разысканию малых решений УРК А. Ляпунова (2.9) и Э. Шмидта (2.10).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (2.6) полагая $x = u+v,\ v = v(x_0,\xi) = \sum \xi_{ik}\varphi_i^{(k)}(x_0) = \xi\cdot\Phi \in E_1^K(x_0),\ u = u(x_0) \in E_1^{\infty-K}(x_0)$, запишем уравнение (2.2) в проекциях

$$(I - \mathbf{Q}_{x_0})B_{x_0}u = (I - \mathbf{Q}_{x_0})B_{x_0}(\varepsilon)(u+v) + (I - \mathbf{Q}_{x_0})R(x_0, v(x_0,\xi) + u(x_0), \varepsilon),$$
$$\mathbf{Q}_{x_0}B_{x_0}v = \mathbf{Q}_{x_0}B_{x_0}(\varepsilon)(u+v) + \mathbf{Q}_{x_0}R(x_0, v(x_0,\xi) + u(x_0), \varepsilon).$$

По теореме о неявных операторах и лемме 2.1 из первого уравнения однозначно определяется $u = u(x_0) = u(x_0, v(x_0,\xi), \varepsilon)$. Его подстановка во второе уравнение дает УРК А. Ляпунова

$$\begin{aligned} &f(x_0, v(x_0,\xi), \varepsilon) = f(x_0, v(x_0,\xi) + u(x_0, v(x_0,\xi), \varepsilon)) \equiv \\ &\equiv \mathfrak{A}_0\xi - \langle B_{x_0}(\varepsilon)(v(x_0,\xi) + u(x_0, v(x_0,\xi), \varepsilon)) + \\ &+ R(x_0, v(x_0,\xi) + u(x_0, v(x_0,\xi), \varepsilon), \varepsilon), \Psi(x_0)\rangle = 0 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Введение регуляризатора Э. Шмидта [1] $\Gamma_{x_0} = \Gamma_0 = \widehat{B}_{x_0}^{-1}$, $\widehat{B}_{x_0} = B_{x_0} + \sum_{i=1}^{n}\langle\cdot,\gamma_j^{(1)}(x_0)\rangle z_j^{(1)}(x_0)$ и формулы преобразования элементов ОЖЦ оператором Γ_0 дают УРК Э.Шмидта

$$\begin{gathered} t_{s1}(x_0, v(x_0,\xi), \varepsilon) \equiv -\sum_{j=1}^{n}\xi_{j1}\langle (I - B_{x_0}(\varepsilon)\Gamma_0)^{-1}B_{x_0}(\varepsilon)\varphi_j^{(1)}(x_0), \psi_s^{(1)}(x_0)\rangle - \\ -\langle (I - B_{x_0}(\varepsilon)\Gamma_0)^{-1}R(x_0, w(x_0, v(x_0,\xi), \varepsilon) + u(x_0, v(x_0,\xi), \varepsilon), \varepsilon), \psi_s^{(1)}(x_0)\rangle = 0, \\ t_{s\sigma}(x_0, v(x_0,\xi), \varepsilon) \equiv \xi_{s\sigma} - \sum_{j=1}^{n}\xi_{j1}\langle (I - B_{x_0}(\varepsilon)\Gamma_0)^{-1}B_{x_0}(\varepsilon)\varphi_j^{(1)}(x_0), \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0)\rangle - \\ -\langle (I - B_{x_0}(\varepsilon)\Gamma_0)^{-1}R(x_0, w(x_0, v(x_0,\xi) + u(x_0, v(x_0,\xi), \varepsilon), \varepsilon), \varepsilon), \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0)\rangle = 0, \\ \sigma = 2,\ldots,p_s. \end{gathered} \tag{2.10}$$

Следствие 2.1. *Пусть* $B_{x_0}(\varepsilon)=\varepsilon B_1$. *Тогда УРК Э. Шмидта принимает вид*

$$t_{s1}(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon)\equiv$$
$$-\frac{\varepsilon^{p_s}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}-\langle(I-\varepsilon B_1\Gamma_0)^{-1}R(x_0,w(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon)+v(x_0,\xi),\varepsilon),\psi_s^{(1)}(x_0)\rangle=0,$$
$$t_{s\sigma}(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon)\equiv$$
$$\xi_{s\sigma}-\frac{\varepsilon^{\sigma-1}}{1-\varepsilon^{p_s}}\xi_{s1}-\langle(I-\varepsilon B_1\Gamma_0)^{-1}R(x_0,w(x_0,v(x_0,\xi),\varepsilon)+v(x_0,\xi),\varepsilon),\psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0)\rangle=0,$$
$$\sigma=\overline{2,p_s}.$$

Далее предполагается, что оператор F допускает группу G, т.е. существуют ее представления L_g в E_1 и K_g в E_2, сплетающие оператор F

$$K_gF(x,\varepsilon)=F(L_gx,\varepsilon) \tag{2.11}$$

При этом точка ветвления $(x_0,0)$ движется по траектории L_gx_0 элемента x_0 и для линеаризации (2.2) уравнения (2.1) справедливы соотношения [14]

$$\begin{gathered} K_gB_{x_0}=B_{L_gx_0}L_g \quad \text{и} \quad K_gB_{x_0}(\varepsilon)=B_{L_gx_0}(\varepsilon)L_g,\\ K_gR(x_0,x-x_0,\varepsilon)=F(L_gx,\varepsilon)-F(L_gx_0,\varepsilon)-\\ -(B_{L_gx_0}-B_{L_gx_0}(\varepsilon))L_g(x-x_0)=R(L_gx_0,L_g(x-x_0),\varepsilon),\\ \varphi_i(L_gx_0)=L_g\varphi_i(x_0),\gamma_j(L_g)=L_g^{*-1}\gamma_i(x_0),\ i,j=\overline{1,n}, \end{gathered} \tag{2.12}$$

показывающие, что фредгольмов оператор B_{x_0} обладает симметрией только относительно стационарной подгруппы точки x_0. Для областей значений операторов B_{x_0} и $B_{x_0}(\varepsilon)$ выполнены соотношения $R(B_{x_0})=R(K_gB_{x_0}L_g^{-1})=K_gR(B_{x_0})$. Тогда для ядра сопряженного оператора $B^*_{x_0}$ имеем

$$\begin{aligned} &N^*(B_{x_0})=\mathrm{span}\{\psi_1(x_0),\dots,\psi_n(x_0)\}\Longrightarrow\\ &N^*(B_{L_gx_0})=\mathrm{span}\{K_g^{*-1}\psi_1(x_0),\dots,K_g^{*-1}\psi_n(x_0)\},\ z_j(L_gx_0)=K_gz_j(x_0),j=\overline{1,n} \end{aligned} \tag{2.13}$$

и можно доказать, что элементы упорядоченых по возрастанию длин цепочек ОЖН преобразуются по формулам

$$\varphi_k^{(s)}(L_gx_0)=L_g\varphi_k^{(s)}(x_0);\psi_k^{(s)}(L_gx_0)=K_g^{*-1}\psi_k^{(s)}(x_0);z_k^{(s)}(L_gx_0)=K_gz_k^{(s)}(x_0). \tag{2.14}$$

В то же время обобщенные жордановы наборы в точках орбиты удовлетворяют условиям биортогональности (2.4). Из (2.12)–(2.14) следует утверждение

Лемма 2.2. *При существовании три-канонического ОЖН проекторы* (2.5) *удовлетворяют свойствам сплетения*

$$\begin{gathered} \mathbf{P}_{L_gx_0}=L_g\mathbf{P}_{x_0}L_g^{-1}\ \textit{или}\ L_g\mathbf{P}_{x_0}=\mathbf{P}_{L_gx_0}L_g,\\ \mathbf{Q}_{L_gx_0}=K_g\mathbf{Q}_{x_0}K_g^{-1}\ \textit{или}\ K_g\mathbf{Q}_{x_0}=\mathbf{Q}_{K_gx_0}K_g \end{gathered} \tag{2.15}$$

и порождают разложения (2.6) *пространств* E_1 *и* E_2 *в прямые суммы. Базисы в подпространствах нулей* $N(B_{x_0})$ *и дефектных функционалов* $N^*(B_{x_0})$ *и соответствующих корневых подпространств* $E_1^K(x_0)$ *и* $E_{2,K}(x_0)$ *могут быть выбраны так, чтобы выполнялись соотношения*

$$\begin{aligned} &E_1=E_1^K(L_gx_0)\dot{+}E_1^{\infty-K}(L_gx_0),\ E_1^K(L_gx_0)=L_gE_1^K(x_0),\\ &E_1^{\infty-K}(L_gx_0)=L_gE_1^{\infty-K}(x_0),\ E_2=E_{2,K}(L_gx_0)\dot{+}E_{2,\infty-K}(L_gx_0),\\ &E_{2,K}(L_gx_0)=K_gE_{2,K}(x_0),\ E_{2,\infty-K}(L_gx_0)=K_gE_{2,\infty-K}(x_0). \end{aligned} \tag{2.16}$$

Теорема 2.2. [15]. *При существовании три-канонического ОЖН УРК А. Ляпунова (2.9) и Э. Шмидта (2.10) наследуют групповую симметрию уравнения (2.2)*

$$f(L_g x_0, L_g v(x_0,\xi),\varepsilon) = f(L_g x_0, v(L_g x_0,\xi),\varepsilon) = K_g f(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon) \tag{2.17}$$

$$t(L_g x_0, L_g v(x_0,\xi),\varepsilon) = t(L_g x_0, v(L_g x_0,\xi),\varepsilon) = L_g t(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon) \tag{2.18}$$

Замечание 2.1. *При доказательстве теоремы о наследовании симметрии УРК Э. Шмидта предполагаем* [2] *выполненным условие* ***I****: подпространство* $E_1^{\infty-n}(x_0)$ *инвариантно относительно представления* L_g, *а подпространство* $E_{2,n}(x_0)$ *инвариантно относительно операторов* K_g *в прямых суммах* $E_1 = E_1^n(x_0) \dot{+} E_1^{\infty-n}(x_0), E_2 = E_{2,n}(x_0) \dot{+} E_{2,\infty-n}(x_0)$. *Тогда* $\Gamma(x_0)K_g = L_g\Gamma(x_0)$ *и представления* K_g *и* L_g *эквивалентны.*

При наличии непрерывной групповой симметрии нелинейных уравнений в банаховых пространствах группа Ли $G_l = G_l(a)$, $a = (a_1,\ldots,a_l)$ – ее существенные параметры, предполагается l-мерным дифференцируемым многообразием, удовлетворяющим условиям [17]–[18]: Пусть $\mathbf{c_1}$) представление $a \mapsto L_{g(a)}x_0$, действующее из окрестности единичного элемента $G_l(a)$ в пространство E_1 принадлежит классу C^1, так что $Xx_0 \in E_1$ для всех производящих операторов $Xx = \lim\limits_{t\to 0} t^{-1}\left[L_{g(a(t))}x - x\right]$ в касательном к $L_{g(a)}$ многообразии $T^l_{g(a)}$; $\mathbf{c_2}$) стационарная подгруппа элемента $x_0 \in E_1$ определяет представление $L(G_s)$ локальной группы Ли $G_s \subset G_l$, $s < l$, с s-мерной подалгеброй $T^s_{g(a)}$ производящих операторов. Это означает, что для стационарной бифуркации элементы $X_k x_0, X_k \in T^l_{g(a)}$ образуют в подпространстве нулей линеаризованного оператора $\kappa = (l-s)$-мерное подпространство и базисы в нем и в алгебре $T^l_{g(a)}$ можно упорядочить так, что $X_k x_0 = \varphi_k, 1 \le k \le \kappa, X_j x_0 = 0$ для $j \ge \kappa + 1$.

Теорема 2.3. [16]. *Пусть задаче стационарного ветвления (2.1) с симметрией непрерывной группы отвечает полный три-канонический ОЖН оператор-функции* $B_{x_0} - B_{x_0}(\varepsilon)$, *причем в условии* $\mathbf{c_2}$) $\kappa = n$ *и* $G_s, s < l$, *является нормальным делителем* G_l *с соответствующим идеалом* $T^s_{g(a)}$ *производящих операторов. Тогда при сделанных предположениях о гладкости действия непрерывной группы* G_l *существует непрерывная функция* $v(x_0,\xi,\varepsilon) = v(x_0,\xi) + u(x_0, v(x_0,\xi),\varepsilon) : T^n_{g(a)}x_0 \times (-\delta,\delta) \to E_1$, *инвариантная относительно фактор-группы* $G_\kappa = G_n = G_l/G_s$ *на* $T^n_{g(a)}x_0$, *такая, что*

$$F(x_0 + v(x_0,\xi,\varepsilon)) = 0 \quad \textit{при} \quad v(x_0,\xi) \in T^n_{g(a)}x_0, \quad |\varepsilon| < \delta \tag{2.19}$$

Доказательство. На основании свойств сплетения (2.15), (2.16) проекторов $\mathbf{P}_{x_0}$ и $\mathbf{Q}_{x_0}$ существует линейный изоморфизм $B_0 = B_{x_0} : D_{B_0} \cap E_1^{\infty-K}(x_0) \to E_{2,\infty-K}$, сплетаемый проекторами $\mathbf{P}_{x_0}$ и $\mathbf{Q}_{x_0}$, т. е. $B_0\mathbf{P}_{x_0}x = \mathbf{Q}_{x_0}B_0 x$, $x \in D_{B_0}$ и $B_{L_g x_0}\mathbf{P}_{L_g x_0}x = \mathbf{Q}_{L_g x_0}B_{L_g x_0}x$, $x \in L_g D_{B_{x_0}}$. Якобиан УРК (2.9) и (2.10) по $\xi_{js}, s = \overline{1,p_j}, j = \overline{1,n}$ отличен от нуля при $\varepsilon \ne 0$ и теорема о наследовании УРК групповой симметрии дает нам G-инвариантность уравнения (2.19).

Доказательство закончено.

Следствие 2.1. *Теорема 2.3 справедлива для полупростых точек ветвления, т.е. при отсутствии обобщенных жордановых цепочек. При этом в теореме и ее доказательстве речь идет об УР.*

Определение 2.2. *УРК (2.9) (соотв. (2.10)) является уравнением потенциального типа, если в окрестности точки $(x_0;0)$ для вектора $\mathbf{f}(y,v(y,\xi),\varepsilon) = (f_{11},\dots,f_{1p_1},\dots,f_{n1},\dots,f_{np_n})$ выполняется равенство*

$$\mathbf{f}(y,v(y,\xi),\varepsilon) = d\cdot grad_y U(y,\xi,\varepsilon), \tag{2.20}$$

где d обратимый оператор. Тогда функционал $U(y,\xi,\varepsilon)$ – потенциал УРК (2.9) (соотв. (2.10)), а оператор $\mathbf{f}$ (соотв. $\mathbf{t}$) – псевдоградиент функционала U.

Далее в п. 2 предполагается условие

$\mathbf{c_3}$) плотные вложения $E_1\subset E_2\subset H$ в гильбертово пространство H с оценками $\|u\|_H\le\alpha_2\|u\|_{E_2}\le\alpha_1\|u\|_{E_1}$, причем отображение $X: E_1\to H$ ограничено в $L(E_1,H)$ топологии.

Теорема 2.4. *Пусть в предположениях $\mathbf{c_1}$)–$\mathbf{c_3}$) УРК (2.9) (соотв. (2.10)) – потенциального типа. Потенциал инвариантен относительно представления $L_{g(a)}$ тогда и только тогда, когда*

$$L_g^*d^{-1}K_g = d^{-1}\quad (L_g^*d^{-1} = d^{-1}L_g) \tag{2.21}$$

Следствие 2.1. [22], [4]. *Пусть точке ветвления $(x_0;0)$ отвечает инвариантное ядро G-инвариантного уравнения (2.1) и соответствующее УРК А. Ляпунова(2.9) (Э. Шмидта (2.10)) является уравнением потенциального типа с некоторой обратимой матрицей d. Потенциал $U(\xi,\varepsilon)$ является инвариантом представления $\mathcal{A}_{g(a)}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A}'_{g(a)}d^{-1}\mathcal{B}_{g(a)} = d^{-1}$ для УРК А.М. Ляпунова и $\mathcal{A}'_{g(a)}d^{-1}\mathcal{A}_{g(a)} = d^{-1}$ для Э. Шмидта. Здесь $\mathcal{A}_{g(a)}$ и $\mathcal{B}_{g(a)}$ соответственно блочно-диагональные матрицы действия представлений $L_{g(a)}$ и $K_{g(a)}$ в инвариантных подпространствах E_1^K $E_{2,K}$ и, тем самым, в K-мерных пространствах коэффициентов разложения произвольных элементов E_1^K $E_{2,K}$ по соответствующим базисам.*

Лемма 2.3. *Псевдоградиент $\mathbf{f}$ (соотв. $\mathbf{t}$) инвариантного функционала является (L_g,K_g) – (соотв. (L_g,L_g)-) эквивариантом в смысле (2.11). Для всех $X\in T^l_{g(a)}$ в некоторой окрестности точки бифуркации $(x_0;0)$ справедливо косимметрическое тождество*

$$\begin{gathered}\langle d^{-1}\mathbf{f}(y,v(y,\xi),\varepsilon), X(y+v(y,\xi)+u(y,v(y,\xi),\varepsilon)\rangle_H = 0,\\ (\langle d^{-1}\mathbf{t}(y,v(y,\xi),\varepsilon), X(y+v(y,\xi)+u(y,v(y,\xi),\varepsilon)\rangle_H = 0)\end{gathered} \tag{2.22}$$

Следствие 2.2. *Для случая инвариантного ядра УРК потенциального типа (2.9) и (2.10) удовлетворяют соответственно косимметрическому тождеству,*

$$\langle d^{-1}f(\xi,\varepsilon), X_j\xi\rangle_{\Xi^K} = 0 \text{ и } \langle d^{-1}t(\xi,\varepsilon), X_j\xi\rangle_{\Xi^K} = 0 \tag{2.23}$$

где $X_j,\overline{1,l}$ – инфинитезимальные операторы представления $\mathcal{A}_g$ в K-мерном пространстве коэффициентов $\xi = (\xi_{11},\dots,\xi_{1p_1},\dots,\xi_{n1},\dots,\xi_{np_n})$ разложения произвольного элемента $\Phi\in K(B_{x_0},B_{x_0}(\varepsilon))$ по базису $(\varphi_1^{(1)},\dots,\varphi_1^{(p_1)},\dots,\varphi_n^{(1)},\dots,\varphi_n^{(p_n)})$.

Следуя [17], [18], [14], [15], получаем достаточное условие редукции УРК потенциального типа в условиях групповой симметрии нелинейного уравнения (2.1).

Теорема 2.5. *Пусть выполнены условия $\mathbf{c_1}$)–$\mathbf{c_3}$), УРК (2.9) (соотв. (2.10)) – потенциального типа, его потенциал принадлежит классу C^2 в некоторой окрестности точки ветвления $(x_0;0)$ и является инвариантом представления L_g группы $G_l(a)$, s-размерность стационарной подгруппы элемента x_0, причем $\kappa = l-s>0$. Тогда*

1. *если* $\kappa = n$, *то для всех* $(\xi(\varepsilon), \varepsilon)$ *или* $(v(x_0, \xi(\varepsilon), \varepsilon))$ *из некоторой окрестности нуля в* $\mathbb{R}^{K+1}$ *УРК* (2.9) *(соотв.* (2.10)*) выполнено тождественно, т.е. возникает ситуация* G *-инвариантной теоремы 2.3 о неявных операторах;*

2. *если* $\kappa < n$ *и* $n \geq 2$, *то имеет место частичная редукция УРК: в принятом в условии* $\mathbf{c_2}$) *соглашении о нумерации базисных элементов в* E_1^K *первые* $K_\kappa = p_1 + \ldots + p_\kappa$ *уравнений являются линейными комбинациями остальных* $p_{\kappa+1} + \ldots + p_n$.

Доказательство. В принятой нумерации (2.20) элементов E_1^K согласно косимметрическому тождеству (2.23) в некоторой окрестности нуля в $\mathbb{R}^{k+1}$ имеем

$$0 = \langle d\mathbf{f}(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon), X_k[x_0 + v(x_0, \xi) + u(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon)]\rangle_H =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{s=1}^{p_s} \{f_{js}(x_0, v(x_0, \xi), \varepsilon)[\langle dz_j^{(s)}, \varphi_k^{(1)}\rangle_H + \langle dz_j^{(s)}, X_k(v(x_0, \xi) + u(x_0, v(x_0, \xi, \varepsilon)\rangle_H]$$

где $k = \overline{1, \kappa}$, причем ранг $K \times K_\kappa$ – матрицы системы уравнений равен K_κ, а матрицы $\left[\langle dz_j^{(s)}, \varphi_k^{(1)}\rangle_H\right]$ $\left(\left[\langle d\varphi_j^{(\sigma)}, \varphi_k^{(1)}\rangle_H\right]\right)$ равен κ в соответствии с видом УРК (2.9) (соотв. (2.10)). Доказательство закончено.

Следствие 2.1. *Пусть точке ветвления* $(x_0, 0)$ G *-инвариантного относительно непрерывной группы с условиями* $\mathbf{c_1}$) - $\mathbf{c_3}$) *уравнения* (2.1) *отвечает инвариантное ядро и линеаризация* $B_{x_0} - B_{x_0}(\varepsilon)$ *имеет три-канонический ОЖН. Тогда редукция УРК А. Ляпунова или Э. Шмидта осуществляется по полным жордановым цепочкам с помощью полной системы функционально-независимых инвариантов действия группы* G.

Замечание 2.2. 1^0. *Утверждение следствия согласуется с результатами работы* [22] *в случае ОЖН линейной по* ε *линеаризации* $B - \varepsilon B_1$, *для которой ОЖН всегда может быть выбран три-каноническим.* 2^0. *Для УР с симметриями* $SO(2), O(2), SH(2), H(2)$ *инвариантная редукция выполнена в* [23].

3. Стационарные бифуркационные задачи со спектром Шмидта в линеаризации

В банаховых пространствах E_1 и E_2 в предположении $\mathbf{c_3}$) рассматривается система уравнений

$$\begin{aligned}
&F_1(x, y, \lambda) = 0, \quad F_2(x, y, \lambda) = 0, \quad F_k(x_0, y_0, \lambda) \equiv 0, \quad k = 1, 2; \quad \lambda = \lambda_0 + \varepsilon;\\
&F_1{}'_x(x_0, y_0, \lambda) = B_0 + B(\varepsilon), -F_1{}'_y(x_0, y_0, \lambda) = A_0 + A(\varepsilon),\\
&-F_2{}'_x(x_0, y_0, \lambda) = A_0^* + A^*(\varepsilon), \quad F_2{}'_y(x_0, y_0, \lambda) = B_0^* + B^*(\varepsilon),
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где A_0 и B_0 плотно заданные $(\overline{D}_A = E_1, D_A = D_{A(\varepsilon)} \supset D_{A_0}, \overline{D}_B = E_1, D_B = D_{B(\varepsilon)} \supset D_{B_0})$ замкнутые линейные операторы. Мы не оговариваем в каждом случае условие подчиненности плотно заданных фредгольмовых операторов, принятые например в [15]. Предполагается также, что операторы A_0 и B_0 не имеют общих нулей, чтобы не вводить сложную технику «незаканчивающихся» ОЖЦ [24].

В указанных условиях система (3.1) допускает локальную запись

$$\begin{array}{l} B_0X - \lambda_0 A_0 Y = A(\varepsilon)Y - B(\varepsilon)X + R_1(x_0, y_0, X, Y, \varepsilon), \\ B_0^* Y - \lambda_0 A_0^* X = A^*(\varepsilon)X - B^*(\varepsilon)Y + R_2(x_0, y_0, X, Y, \varepsilon), \\ X = x - x_0,\ Y = y - y_0, \end{array} \tag{3.2}$$

где $R_j(x_0, y_0, 0, 0, \varepsilon) \equiv 0, j = 1, 2, {R_j}'_X(x_0, y_0, 0, 0, \varepsilon) \equiv 0, {R_j}'_Y(x_0, y_0, 0, 0, \varepsilon) \equiv 0$. Пусть n-кратное собственное значение Шмидта λ_0 является фредгольмовой точкой спектра матричного оператора $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} -\lambda_0 A_0^* & B_0^* \\ B_0 & -\lambda_0 A_0 \end{pmatrix}$ в прямой сумме $\mathcal{H}$ гильбертовых пространств H, $\Phi_k^{(1)} = (u_k^{(1)}, v_k^{(1)})^T$ и $\Psi_k^{(1)} = (\widetilde{u}_k^{(1)}, \widetilde{v}_k^{(1)})^T, k = 1, ..., n,$ – собственные элементы прямой и сопряженной

$$(\mathbf{B}^* - \lambda_0 \mathbf{A}^*)\Psi_k^{(1)} = \begin{pmatrix} -\lambda_0 A_0 & B_0^* \\ B_0 & -\lambda_0 A_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{u}_k^{(1)} \\ \widetilde{v}_k^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

задач. Полагая $\mathbf{A}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A^*(\varepsilon) & -B^*(\varepsilon) \\ -B(\varepsilon) & A(\varepsilon) \end{pmatrix}$, запишем систему (3.1) в виде

$$\begin{array}{l} (\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \mathbf{A}(\varepsilon) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_2(x_0, y_0, X, Y, \varepsilon) \\ R_1(x_0, y_0, X, Y, \varepsilon) \end{pmatrix} = \\ \qquad = \mathbf{A}(\varepsilon) \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mathbf{R}(x_0, y_0, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \varepsilon) \end{array} \tag{3.3}$$

Здесь предполагается, что векторный нелинейный оператор может быть представлен в виде достаточно гладкого по $(X, Y)^T$ оператора $\mathbf{R}$.

Определение 3.1. [19]–[21]. *Элементы $\Phi_k^{(s)} = (u_k^{(s)}, v_k^{(s)})^T, s = \overline{1, p_k}, k = \overline{1, n}$ образуют полный канонический обобщенный жорданов набор (ОЖН$\equiv \mathbf{A}(\varepsilon)$-ЖН), если*

$$\begin{array}{l} (\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A})\Phi_k^{(s)} = \sum\limits_{j=1}^{s-1} \mathbf{A}_j \Phi_k^{(s-1)}, \mathbf{A}(\varepsilon) = \mathbf{A}_1 \varepsilon + \mathbf{A}_2 \varepsilon^2 + \ldots, \langle \Phi_k^{(s)}, \Gamma_l^{(1)} \rangle_{\mathcal{H}} = 0, s = \overline{2, p_k}; \\ D_p = \det \left[\sum\limits_{j=1}^{p_k} \langle \mathbf{A}_j \Phi_k^{(p_k+1-j)}, \Psi_l^{(1)} \rangle_{\mathcal{H}} \right] \neq 0, \Psi_l^{(1)} = (\widetilde{u}_l^{(1)}, \widetilde{v}_l^{(1)})^T,\ k, l = \overline{1, n} \end{array} \tag{3.4}$$

Этот набор биканонический, если ОЖН сопряженной оператор-функции $(\mathbf{B}^* - \lambda_0 \mathbf{A}^*) - \mathbf{A}^*(\varepsilon)$, отвечающий элементам $\{\Psi_l^{(1)}\}_1^n$ также канонический, и три-канонический, если кроме того

$$\begin{array}{l} \langle \Phi_i^{(j)}, \Gamma_k^{(l)} \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{ik}\delta_{jl}, \Gamma_k^{(l)} = \sum\limits_{s=1}^{p_k+1-l} \mathbf{A}_s^* \Psi_k^{(p_k+2-l-s)};\ \langle Z_i^{(j)}, \Psi_k^{(l)} \rangle_{\mathcal{H}} = \delta_{ik}\delta_{jl}, \\ Z_i^{(j)} = \sum\limits_{s=1}^{p_k+1-j} \mathbf{A}_s \Phi_i^{(p_k+2-j-s)}, \Phi = \Phi(x_0, y_0) = (\Phi_1^{(1)}, \ldots, \Phi_1^{(p_1)}, \ldots, \Phi_n^{(1)}, \ldots, \Phi_n^{(p_n)}) \end{array} \tag{3.5}$$

$\Phi_i^{(j)} = \Phi_i^{(j)}(x_0, y_0)$, *векторы* $\Gamma = \Gamma(x_0, y_0), \Psi = \Psi(x_0, y_0)$ *и* $Z = Z(x_0, y_0)$ *определяются аналогично. Для линейной оператор-функции* $(\mathbf{B} - \lambda_0 \mathbf{A}) - \varepsilon \mathbf{A}_1$ *ОЖН всегда быть выбран три-каноническим,* $K = p_1 + ... + p_n$ *– корневое число.*

Л е м м а 3.1. *Если для фредгольмовой оператор-функции* $(\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A})-\mathbf{A}(\varepsilon)$ *существует полный три-канонический ОЖН, то определены проекторы*

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}=\mathbf{P}(x_0,y_0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\Gamma_i^{(j)}\rangle_{\mathcal{H}}\Phi_i^{(j)}=\langle\cdot,\Gamma\rangle_{\mathcal{H}}\Phi:\mathcal{H}\to\mathcal{H}^K=\\
=K(\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A};\mathbf{A}(\varepsilon))=span\{\Phi_i^{(j)}(x_0,y_0)\},\\
\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(x_0,y_0)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\Psi_i^{(j)}\rangle_{\mathcal{H}}Z_i^{(j)}=\langle\cdot,\Psi\rangle_{\mathcal{H}}Z:\mathcal{H}\to\mathcal{H}_K=span\{Z_i^{(j)}(x_0,y_0)\}
\end{aligned}\tag{3.6}$$

порождающие разложения $\mathcal{H}$ *в прямые суммы, отвечающие точке* (x_0,y_0)

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}^K\dot{+}\mathcal{H}^{\infty-K},\ \mathcal{H}=\mathcal{H}_K\dot{+}\mathcal{H}_{\infty-K}.\tag{3.7}$$

Оператор $\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A}$ *сплетается проекторами* $\mathbf{P}=\mathbf{P}(x_0,y_0)$ *и* $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(x_0,y_0)$ $(\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A})\mathbf{P}=\mathbf{Q}(\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A})$ *на* $D_{\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A}}$, $(\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A})\Phi=\mathfrak{A}_0Z,\mathbf{B}^*-\lambda_0\mathbf{A}^*)\Psi=\mathfrak{A}_0\Gamma$, $\mathfrak{A}_0=diag(B_1,\ldots,B_n),B_i-(p_i\times p_i)$ *–матрица с единицами на подпобочной диагонали и нулями на остальных местах. Оператор* $(\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A}):D_{\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A}}\cap\mathcal{H}^{\infty-K}(x_0,y_0)\to\mathcal{H}_{\infty-K}(x_0,y_0)$ *является изоморфизмом.*

С л е д с т в и е 3.2. *Для линейной по* ε *оператор-функции* $(\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A})-\varepsilon\mathbf{A}_1$ *три-канонический ОЖН существует и свойства сплетения могут быть дополнены следующими* $\mathbf{A}_1\mathbf{P}=\mathbf{Q}\mathbf{A}_1$ *на* $D_{\mathbf{A}_1}$, $\mathbf{A}_1\Phi=\mathfrak{A}_1\Phi,\mathbf{A}_1^*\Psi=\mathfrak{A}_1\Gamma$ *, где* $\mathfrak{A}_1=diag(B^1,\ldots,B^n)$ *- клеточно-диагональная матрица,* $B^i-(p_i\times p_i)$ *-матрицы с единицами вдоль побочной диагонали и нулями в остальных местах. Таким образом, операторы* $\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}_1$ *действуют в инвариантных парах подпространств* $\mathcal{H}^K,\mathcal{H}_K$ *и* $\mathcal{H}^{\infty-K},\mathcal{H}_{\infty-K}$ *, отвечающих точке бифуркации* (x_0,y_0) *и* $(\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A}):D_{\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A}}\cap\mathcal{H}^{\infty-K}\to\mathcal{H}_{\infty-K},\mathbf{A}_1:\mathcal{H}^K\to\mathcal{H}_K$ *являются изоморфизмами.*

Т е о р е м а 3.1. *Пусть точке бифуркации* $(x_0,y_0,0)$ *отвечает полный три-канонический ОЖН оператор-функции* $(\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A})-\mathbf{A}(\varepsilon)$*. Задача определения малых решений системы* (3.1) *в окрестности точки* $(x_0,y_0,0)$ *эквивалентна разысканию малых решений уравнений разветвления в корневых подпространствах А. Ляпунова*

$$\begin{aligned}
&f(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon)=f(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi)+\mathbf{u}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon))\equiv\\
&\equiv\mathfrak{A}_0\xi-\langle\mathbf{A}(\varepsilon)(\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi)+\mathbf{u}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon))+\\
&+\mathbf{R}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi)+\mathbf{u}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon),\Psi(x_0,y_0)\rangle_{\mathcal{H}}=0
\end{aligned}\tag{3.8}$$

и Э.Шмидта

$$\begin{aligned}
&\mathbf{t}_{s1}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon)\equiv-\sum_{j=1}^{n}\xi_{j1}\langle(\mathbf{I}-\mathbf{A}(\varepsilon)\mathbf{\Gamma_0})^{-1}\mathbf{A}(\varepsilon)\Phi_j^{(1)}(x_0,y_0),\Psi_s^{(1)}(x_0,y_0)\rangle_{\mathcal{H}}-\\
&-\langle(\mathbf{I}-\mathbf{A}(\varepsilon)\mathbf{\Gamma_0})^{-1}\mathbf{R}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi)+\mathbf{w}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi)\varepsilon),\varepsilon)),\Psi_s^{(1)}(x_0)\rangle_{\mathcal{H}}=0\\
&\mathbf{t}_{s\sigma}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon)\equiv\xi_{s\sigma}-\\
&-\sum_{j=1}^{n}\xi_{j1}\langle(\mathbf{I}-\mathbf{A}(\varepsilon)\mathbf{\Gamma_0})^{-1}\mathbf{A}(\varepsilon)\Phi_j^{(1)}(x_0,y_0),\Psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0,y_0)\rangle_{\mathcal{H}}-\\
&-\langle(\mathbf{I}-\mathbf{A}(\varepsilon)\mathbf{\Gamma_0})^{-1}\mathbf{R}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi)+\mathbf{w}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi)\varepsilon),\varepsilon)),\Psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0)\rangle_{\mathcal{H}}=0.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как и в п. 2 [15], [16] для доказательства первой части теоремы полагаем $x=u+v,v=v(x_0,y_0,\xi)=\sum\limits_{i,k}\xi_{ik}\Phi_i^{(k)}(x_0,y_0)=\xi\cdot\Phi\in\mathcal{H}^K(x_0,y_0),u=$

$u(x_0,y_0)\in\mathcal{H}^{\infty-K}(x_0,y_0)$ и записываем систему (3.1) в проекциях. Вторая часть доказывается введением регуляризатора Шмидта [1] $\mathbf{\Gamma}_0=\mathbf{\Gamma}_0(x_0,y_0)=(\widetilde{\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A}})^{-1}, (\widetilde{\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A}})=\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A}+\sum\limits_{i=1}^{n}\langle\cdot,\Gamma_j^{(1)}(x_0,y_0)\rangle_{\mathcal{H}}Z_j^{(1)}(x_0,y_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Групповая симметрия системы (3.1) означает сплетение представлениями K_g в следующем виде

$$K_gF_1(x,y,\lambda)=F_1(L_gx,L_gy,\lambda),\qquad K_gF_2(x,y,\lambda)=F_2(L_gx,L_gy,\lambda)\tag{3.10}$$

Далее действуем по схеме п. 2 [15], [16]. Из равенств (3.10) и условия $F_k(x_0,y_0,\lambda)\equiv 0$ следует

$$\begin{aligned}&K_g\{F'_{k_x}(x_0,y_0,\lambda_0+\varepsilon)(x-x_0)+F'_{k_y}(x_0,y_0,\lambda_0+\varepsilon)(y-y_0)+\\&+R_k(x_0,y_0,x-x_0,y-y_0,\lambda_0+\varepsilon)\}=F'_{k_{L_gx}}(L_gx_0,L_gy_0,\lambda_0+\varepsilon)L_g(x-x_0)+\\&+F'_{k_{L_gy}}(L_gx_0,L_gy_0,\lambda_0+\varepsilon)L_g(y-y_0)+R_k(L_gx_0,L_gy_0,L_g(x-x_0),L_g(y-y_0),\lambda_0+\varepsilon),\\&k=1,2,\end{aligned}$$

откуда

$$\begin{gathered}K_gF'_{k_x}(x_0,y_0,\lambda_0+\varepsilon)(x-x_0)=F'_{k_{L_gx}}(L_gx_0,L_gy_0,\lambda_0+\varepsilon)L_g(x-x_0),\\K_gF'_{k_y}(x_0,y_0,\lambda_0+\varepsilon)(y-y_0)=F'_{k_{L_gy}}(L_gx_0,L_gy_0,\lambda_0+\varepsilon)L_g(y-y_0),\\K_gR_k(x_0,y_0,x-x_0,y-y_0,\lambda_0+\varepsilon)=R_k(L_gx_0,L_gy_0,L_g(x-x_0),L_g(y-y_0),\lambda_0+\varepsilon),\\k=1,2\end{gathered}\tag{3.11}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}K_g[\mathbf{B}(x_0,y_0)-\lambda_0\mathbf{A}(x_0,y_0)]=\begin{pmatrix}-\lambda_0K_gA_0^* & K_gB_0^*\\ K_gB_0 & -\lambda_0K_gA_0\end{pmatrix}=\\=\begin{pmatrix}-\lambda_0K_gA_0^*(x_0,y_0) & K_gB_0^*(x_0,y_0)\\ K_gB_0(x_0,y_0) & -\lambda_0K_gA_0(x_0,y_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda_0A_0^*(L_gx_0,L_gy_0)L_g & B_0^*(L_gx_0,L_gy_0)L_g\\ B_0(L_gx_0,L_gy_0)L_g & -\lambda_0A_0(L_gx_0,L_gy_0)L_g\end{pmatrix}=\\=[\mathbf{B}(L_gx_0,L_gy_0)-\lambda_0\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0)]L_g\end{gathered}\tag{3.12}$$

Аналогично

$$\begin{aligned}&K_g\mathbf{A}(\varepsilon)=K_g\mathbf{A}(x_0,y_0,\varepsilon)=\\&=\begin{pmatrix}K_gA^*(\varepsilon) & -K_gB^*(\varepsilon)\\ -K_gB(\varepsilon) & K_gA(\varepsilon)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K_gA^*(x_0,y_0,\varepsilon) & -K_gB^*(x_0,y_0,\varepsilon)\\ -K_gB(x_0,y_0,\varepsilon) & K_gA(x_0,y_0,\varepsilon)\end{pmatrix}=\\&=\begin{pmatrix}A^*(L_gx_0,L_gy_0,\varepsilon)L_g & -B^*(L_gx_0,L_gy_0,\varepsilon)L_g\\ -B(L_gx_0,L_gy_0,\varepsilon)L_g & A_0(L_gx_0,L_gy_0,\varepsilon)L_g\end{pmatrix}=[\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0,\varepsilon)]L_g,\end{aligned}\tag{3.13}$$

$$\begin{gathered}K_g\mathbf{R}(x_0,y_0,x-x_0,y-y_0.\varepsilon)=\\=\begin{pmatrix}F_2(L_gx,L_gy,\lambda_0+\varepsilon)-F'_{2_x}(L_gx,L_gy,\lambda_0+\varepsilon)L_g(x-x_0)-F'_{2_y}(L_gx,L_gy,\lambda_0+\varepsilon)L_g(y-y_0)\\ F_1(L_gx,L_gy,\lambda_0+\varepsilon)-F'_{1_x}(L_gx,L_gy,\lambda_0+\varepsilon)L_g(x-x_0)-F'_{1_y}(L_gx,L_gy,\lambda_0+\varepsilon)L_g(y-y_0)\end{pmatrix}=\\=\mathbf{R}(L_gx_0,L_gy_0,L_g(x-x_0),L_g(y-y_0).\varepsilon),\end{gathered}$$

откуда получаем

$$\begin{aligned}&\Phi_i(L_gx_0,L_gy_0)=L_g\Phi_i(x_0,y_0)=(L_gu_k^{(1)}(x_0,y_0),L_gv_k^{(1)}(x_0,y_0))^T,\\&\Gamma_g(L_gx_0,L_gy_0)=L^{*-1}_g\Gamma_j,\quad \Gamma_j=\Gamma_j(x_0,y_0),\quad i,j=1,...,n\end{aligned}\tag{3.14}$$

и для областей значений операторов $F'_{k_x}(x_0,y_0,\lambda_0), F'_{k_y}(x_0,y_0,\lambda_0)$ выполнены соотношения $R(F'_{k_x}(L_gx_0,L_gy_0,\lambda_0))=R(K_gF'_{k_x}(x_0,y_0,\lambda_0)L_g^{-1})=K_gR(F'_{k_x}(x_0,y_0,\lambda_0))$,

$R(F'_{k_y}(L_gx_0, L_gy_0, \lambda_0)) = R(K_gF'_{k_y}(x_0, y_0, \lambda_0)L_g^{-1}) = K_gR(F'_{k_y}(x_0, y_0, \lambda_0))$. Тогда для ядра сопряженного оператора имеем

$$\begin{aligned}
&N^*(\mathbf{B} - \lambda_0\mathbf{A}) = \mathrm{span}\{\Psi_k^{(1)}\}_1^n = \mathrm{span}\{\widetilde{u}_k^{(1)}(x_0, y_0), \widetilde{u}_k^{(1)}(x_0, y_0)\}_1^n = \mathrm{span}\{\widetilde{u}_k^{(1)}, \widetilde{u}_k^{(1)}\}_1^n \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow N^*(\mathbf{B}(L_gx_0, L_gy_0) - \lambda_0\mathbf{A}(L_gx_0, L_gy_0)) = \mathrm{span}\{K^{*-1}_g\Psi_1^{(1)}, ...K^{*-1}_g\Psi_n^{(1)}\},
\end{aligned} \tag{3.15}$$

и подобно [2] §1.3 [3], [4], [15],[19]–[21] доказывается, что элементы упорядоченных по возрастанию длин цепочек ОЖН оператор-функции $(\mathbf{B} - \lambda_0\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\varepsilon)$ и биортогональных им систем преобразуются по формулам

$$\begin{aligned}
&\Phi_k^{(s)}(L_gx_0, L_gy_0) = L_g\Phi_k^{(s)}(x_0, y_0) = (L_gu_k^{(s)}(x_0, y_0), L_gv_k^{(s)}(x_0, y_0))^T, \\
&\Psi_k^{(s)}(L_gx_0, L_gy_0) = K^{*-1}_g\Psi_k^{(s)}(x_0, y_0) = (K^{*-1}_gu_k^{(s)}(x_0, y_0), K^{*-1}_gv_k^{(s)}(x_0, y_0))^T, \\
&\Gamma_k^{(s)}(L_gx_0, L_gy_0) = L^{*-1}_g\Gamma_k^{(s)}(x_0, y_0) = (L^{*-1}_gu_k^{(s)}(x_0, y_0), L^{*-1}_gv_k^{(s)}(x_0, y_0))^T, \\
&Z_k^{(s)}(L_gx_0, L_gy_0) = K_gZ_k^{(s)}(x_0, y_0).
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Поэтому ОЖН в точках орбиты (L_gx_0, L_gy_0) также удовлетворяют условиям биортогональности (3.5) и справедливо утверждение

Лемма 3.2. *В условиях групповой симметрии и существования три-канонических ОЖН проекционные операторы* (3.6) *оператор-функции* $(\mathbf{B} - \lambda_0\mathbf{A}) - \mathbf{A}(\varepsilon)$ *удовлетворяют свойствам сплетения*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(L_gx_0, L_gy_0) = L_g\mathbf{P}(x_0, y_0)L_g^{-1} \quad \text{или} \quad L_g\mathbf{P}(x_0, y_0) = \mathbf{P}(L_gx_0, L_gy_0)L_g \\
&\mathbf{Q}(L_gx_0, L_gy_0) = K_g\mathbf{Q}(x_0, y_0)K_g^{-1} \quad \text{или} \quad K_g\mathbf{Q}(x_0, y_0) = \mathbf{Q}(K_gx_0, K_gy_0)K_g
\end{aligned} \tag{3.17}$$

и порождают разложения пространства $\mathcal{H}$ *в прямые суммы, отвечающие точкам бифуркации* $(x_0, y_0, 0)$ *и* $(L_gx_0, L_gy_0, 0)$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H} = \mathcal{H}^K \dot{+} \mathcal{H}^{\infty-K} = \mathcal{H}^K(x_0, y_0) \dot{+} \mathcal{H}^{\infty-K}(x_0, y_0), \ \mathcal{H} = \mathcal{H}_K \dot{+} \mathcal{H}_{\infty-K} = \mathcal{H}_K(x_0, y_0) \dot{+} \mathcal{H}_{\infty-K}(x_0, y_0), \\
&\mathcal{H} = \mathcal{H}^K(L_gx_0, L_gy_0) \dot{+} \mathcal{H}^{\infty-K}(L_gx_0, L_gy_0), \ \mathcal{H} = \mathcal{H}_K(L_gx_0, L_gy_0) \dot{+} \mathcal{H}_{\infty-K}(L_gx_0, L_gy_0).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

При этом базисы в подпространствах нулей $N(\mathbf{B} - \lambda_0\mathbf{A})$ *и дефектных функционалов* $N^*(\mathbf{B} - \lambda_0\mathbf{A})$ *и в соответствующих корневых подпространствах могут быть выбраны так, чтобы выполнялись соотношения*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{H}^K(L_gx_0, L_gy_0) = L_g\mathcal{H}^K(x_0, y_0), \mathcal{H}^{\infty-K}(L_gx_0, L_gy_0) = L_g\mathcal{H}^{\infty-K}(x_0, y_0), \\
&\mathcal{H}_K(L_gx_0, L_gy_0) = L_g\mathcal{H}_K(x_0, y_0), \mathcal{H}_{\infty-K}(L_gx_0, L_gy_0) = L_g\mathcal{H}_{\infty-K}(x_0, y_0),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Доказательство следует из формул (3.11)–(3.18).

Теорема 3.2. *В условиях существования три-канонического ОЖН оператор-функции* $(\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A})-\mathbf{A}(\varepsilon)$ *УРК А. Ляпунова*(3.8) *и Э.Шмидта* (3.9) *наследуют групповую симметрию* (3.10) *системы* (3.1)

$$f(L_gx_0, L_gy_0, L_g\mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) = f(L_gx_0, L_gy_0, \mathbf{v}(L_gx_0, L_gy_0, \xi), \varepsilon) = K_gf(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon), \tag{3.20}$$

$$t(L_gx_0, L_gy_0, L_g\mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon) = t(L_gx_0, L_gy_0, \mathbf{v}(L_gx_0, L_gy_0, \xi), \varepsilon) = L_gt(x_0, y_0, \mathbf{v}(x_0, y_0, \xi), \varepsilon). \tag{3.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно (3.7), (3.19) запишем систему (3.1) в точке бифуркации $(L_gx_0, L_gy_0, 0)$ в проекциях на корневые подпространства

$$\begin{gathered}(I-\mathbf{Q}(L_gx_0,L_gy_0))[\mathbf{B}(L_gx_0,L_gy_0)-\lambda_0\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0)]\widetilde{\mathbf{u}}=\\=(I-\mathbf{Q}(L_gx_0,L_gy_0)\{\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0,\varepsilon)[\widetilde{\mathbf{u}}+\mathbf{v}(L_gx_0,L_gy_0,\xi)]+\\+\mathbf{R}(L_gx_0,L_gy_o,\widetilde{\mathbf{u}}+\mathbf{v}(L_gx_0,L_gy_0,\xi)),\varepsilon)\},\\0=\mathbf{Q}(L_gx_0,L_gy_0)\{[\mathbf{B}(L_gx_0,L_gy_0)-\lambda_0\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0)]\widetilde{\mathbf{u}}-\\-\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0,\varepsilon)(\widetilde{\mathbf{u}}+\mathbf{v}(L_gx_0,L_gy_0,\xi))-\mathbf{R}(L_gx_0,L_gy_o,\widetilde{\mathbf{u}}+\mathbf{v}(L_gx_0,L_gy_0,\xi)),\varepsilon)\}\end{gathered}\tag{3.22}$$

Для сужения $[\widehat{\mathbf{B}(x_0,y_0)-\lambda_0}\mathbf{A}(x_0,y_0)]=(I-\mathbf{Q}(x_0,y_0))(\mathbf{B}(x_0,y_0)-\lambda_0\mathbf{A}(x_0,y_0))(I-\mathbf{P}(x_0,y_0))$ оператора $\mathbf{B}(x_0,y_0)-\lambda_0\mathbf{A}(x_0,y_0)$ на подпространство $\mathcal{H}^{\infty-K}(x_0,y_0)$ выполнено следующее соотношение симметрии

$$\begin{gathered}K_g[\widehat{\mathbf{B}(x_0,y_0)-\lambda_0}\mathbf{A}(x_0,y_0)]\overset{(3.2),(3.17)}{=}\\=(I-\mathbf{Q}(L_gx_0,L_gy_0))[\mathbf{B}(L_gx_0,L_gy_0)-\lambda_0\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0)](I-\mathbf{P}(L_gx_0,L_gy_0))L_g=\\=[\widehat{\mathbf{B}(L_gx_0,L_gy_0)-\lambda_0}\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0)]L_g\end{gathered}\tag{3.23}$$

Применяя K_g^{-1} к первому уравнению системы (3.22), получаем

$$\begin{gathered}K_g^{-1}[\widehat{\mathbf{B}(L_gx_0,L_gy_0)-\lambda_0}\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0)]\widetilde{\mathbf{u}}\overset{(3.23)}{=}\\\overset{(3.23)}{=}[\widehat{\mathbf{B}(x_0,y_0)-\lambda_0}\mathbf{A}(x_0,y_0)]L_g^{-1}\widetilde{\mathbf{u}},\\K_g^{-1}(I-\mathbf{Q}(L_gx_0,L_gy_0))\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0,\varepsilon)[\widetilde{\mathbf{u}}+\mathbf{v}(L_gx_0,L_gy_0,\xi)]+\\+K_g^{-1}(I-\mathbf{Q}(L_gx_0,L_gy_0))\mathbf{R}(L_gx_0,L_gy_0,\widetilde{\mathbf{u}}+\mathbf{v}(L_gx_0,L_gy_0,\xi))\overset{(3.13)}{=}\\\overset{(3.13)}{=}(I-\mathbf{Q}(L_gx_0,L_gy_0))L_g^{-1}\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0,\varepsilon)[\widehat{\mathbf{u}}+\mathbf{v}(L_gx_0,L_gy_0,\xi)]+\\+(I-\mathbf{Q}(x_0,y_0))L_g^{-1}\mathbf{R}(L_gx_0,L_gy_0,\widetilde{\mathbf{u}}+\mathbf{v}(L_gx_0,L_gy_0\widetilde{\mathbf{u}}\Longrightarrow\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}[\widehat{\mathbf{B}(L_gx_0,L_gy_0)-\lambda_0}\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0)]L_g^{-1}\widetilde{\mathbf{u}}=\\=(I-\mathbf{Q}(x_0,y_0))\mathbf{A}(x_0,y_0,\varepsilon)[L_g^{-1}\widetilde{\mathbf{u}}+\mathbf{v}(L_gx_0,L_gy_0,\xi)]+\\+(I-\mathbf{Q}(x_0,y_0))\mathbf{R}(x_0,y_0,L_g^{-1}\widetilde{\mathbf{u}}+\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon).\end{gathered}\tag{3.24}$$

В силу теоремы о неявных операторах находим единственное решение (3.24) в виде $L_g^{-1}\widetilde{\mathbf{u}}=\mathbf{u}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi,)\varepsilon)$, откуда следует, что $\widetilde{\mathbf{u}}=L_g\mathbf{u}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi,)\varepsilon)$. Подстановка найденного решения во второе уравнение системы (3.22) дает УРК А.Ляпунова (3.8) в точке бифуркации $(L_gx_0, L_gy_0, 0)$ и его групповую симметрию (3.20)

$$\begin{aligned}&f(L_gx_0,L_gy_0,L_g\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon)\equiv\\&\equiv\mathbf{Q}(L_gx_0,L_gy_0)[\mathbf{B}(L_gx_0,L_gy_0)-\lambda_0\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0)]L_g\mathbf{u}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi,)\varepsilon)-\\&-\mathbf{Q}(L_gx_0,L_gy_0)\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0,\varepsilon)[L_g\mathbf{u}+\mathbf{v}(L_gx_0,L_gy_0,\xi)]-\\&-\mathbf{Q}(L_gx_0,L_gy_0)\mathbf{R}(L_gx_0,L_gy_0,L_g\mathbf{u}+\mathbf{v}(L_gx_0,L_gy_0,\xi),\varepsilon)=\\&=K_g\mathbf{Q}(x_0,y_0)(\mathbf{B}(x_0,y_0)-\lambda_0\mathbf{A}(x_0,y_0))-K_g\mathbf{Q}(x_0,y_0)(\mathbf{A}(x_0,y_0,\varepsilon)(\mathbf{u}+\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi))-\\&-K_g\mathbf{R}(x_0,y_0,\mathbf{u}+\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon)=K_gf(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon)\end{aligned}$$

Для доказательства наследования симметрии УРК Э.Шмидта запишем уравнение (3.1) в точке ветвления $(L_gx_0, L_gy_0, 0)$ в виде системы и применяя регуляризатор Шмидта, получим

$$\begin{gathered}[\widetilde{\mathbf{B}(L_gx_0,L_gy_0)-\lambda_0}\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0)]L_g(x-x_0,y-y_0)^T=\\=\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0,\varepsilon)L_g(x-x_0,y-y_0)^T+\mathbf{R}(L_gx_0,L_gy_0,L_g(x-x_0,y-y_0)^T,\varepsilon)+\\+\sum_{i=1}^{n}\xi_{i1}Z_i^{(1)}(L_gx_0,L_gy_0),\quad\xi_{jk}=\langle L_g(x-x_0,y-y_0)^T,\Gamma_j^{(k)}(L_gx_0,L_gy_0)^T\rangle_{\mathcal{H}},\\j=1,...n,\ k=1,...p_j.\end{gathered}$$

Полагая $L_g(x-x_0,y-y_0)^T = \widetilde{\mathbf{w}} + L_g\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi) = \widetilde{\mathbf{w}} + \mathbf{v}(L_gx_0,L_gy_0,\xi)$ в силу групповой симметрии операторов $[\mathbf{B}(x_0,y_0)-\lambda_0\mathbf{A}(x_0,y_0)] = [\mathbf{B}(x_0,y_0) - \lambda_0\mathbf{A}(x_0,y_0)] + \sum\limits_{i=1}^{n}\langle\cdot,\Gamma_k(x_0,y_0)\rangle Z_k(x_0,y_0), \mathbf{A}(x_0,y_0,\varepsilon)$ и $\mathbf{R}(x_0,y_0,x-x_0,y-y_0,\varepsilon)$ (соответственно равенствам (3.12)– (3.13)) находим $\widetilde{\mathbf{w}} = L_g(x-x_0,y-y_0)^T$ из первого уравнения $[\mathbf{B}(L_gx_0,L_gy_0)-\lambda_0\mathbf{A}(L_gx_0,L_gy_0)]\widetilde{\mathbf{w}} = K_g[\mathbf{B}(x_0,y_0)-\lambda_0\mathbf{A}(x_0,y_0)]L_g^{-1}\widetilde{\mathbf{w}} = K_g\mathbf{A}(x_0,y_0,\varepsilon)[L_g^{-1}\widetilde{\mathbf{w}} + \mathbf{v}(x_0,y_0,\xi)] + K_g\mathbf{R}(x_0,y_0,L_g^{-1}\widetilde{\mathbf{w}} + \mathbf{v}(x_0,y_0,\xi))$ в виде $L_g^{-1}\widetilde{\mathbf{w}} = \mathbf{w}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi))$ Тогда из второго уравнения системы получаем УРК Э.Шмидта в точке $(L_gx_0,L_gy_0,0)$ и его групповую симметрию (3.21)

$$t(L_gx_0,L_gy_0,L_g\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon) = \mathbf{P}(L_gx_0,L_gy_0)\widetilde{\mathbf{w}} \overset{(3.17)}{=}$$
$$\overset{(3.17)}{=} L_g\mathbf{P}(x_0,y_0)\widetilde{\mathbf{w}}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon) = L_gt(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Применяя результаты п. 2, получаем следующее утверждение

Т е о р е м а 3.3. *Пусть в условиях групповой симметрии для системы* (3.1) *выполнены условия* $\mathbf{c_1})$ – $\mathbf{c_3})$, *причем в условии* $\mathbf{c_2})$ $\kappa = n$ *и* $G_s, s < l$, *является нормальным делителем* G_l *с соответствующим идеалом* $T^s_{g(a)}$ *производящих операторов, и оператор-функции* $(\mathbf{B}-\lambda_0\mathbf{A})-\mathbf{A}(\varepsilon)$ *во фредгольмовой точке* λ_0 *отвечает полный три-канонический ОЖН к* $N(\mathbf{B}_{x_0}-\lambda_0\mathbf{A}_0)$. *Тогда существует непрерывная функция* $\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi,\varepsilon) = \mathbf{v}(x_0,y_0,\xi)+\mathbf{u}(x_0,y_0,\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi),\varepsilon) : T^n_{g(a)}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0\end{pmatrix} \times (-\delta,\delta) \to \mathcal{H}$, *инвариантная относительно фактор-группы* $G_\kappa = G_n = G_l/G_s$ *на* $T^n_{g(a)}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0\end{pmatrix}$, *такая, что*

$$F_1(x_0,y_0,v_1(x_0,y_0,\xi,\varepsilon),v_2(x_0,y_0,\xi,\varepsilon)) = 0, \quad F_2(x_0,y_0,v_1(x_0,y_0,\xi,\varepsilon),v_2(x_0,y_0,\xi,\varepsilon)) = 0 \tag{3.25}$$

при $\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi) \in T^n_{g(a)}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0\end{pmatrix}$, $|\varepsilon| < \delta$.

С л е д с т в и е 3.1. *Теорема 3.3 справедлива для полупростых точек ветвления, т.е. при отсутствии обобщенных жордановых цепочек. При этом в теореме и ее доказательстве речь идет об УР.*

Т е о р е м а 3.4. *Пусть в предположениях* $\mathbf{c_1})$ – $\mathbf{c_3})$, *УРК А. Ляпунова (соотв. Э.Шмидта) – потенциального типа и его потенциал* $U(x,y,\xi,\varepsilon)$ *принадлежит классу* C^2 *в некоторой окрестности точки бифуркации* $(x_0,y_0;0)$ *и является инвариантом представления* L_g *группы* $G_l(a)$, s*-размерность стационарной подгруппы элемента* (x_0,y_0), *причем* $\kappa = l-s > 0$. *Тогда*

1. *если* $\kappa = n$, *то для всех* $(\xi(\varepsilon),\varepsilon)$ *или* $(\mathbf{v}(x_0,y_0,\xi(\varepsilon),\varepsilon))$ *из некоторой окрестности нуля в* $\mathbb{R}^{K+1}$ *УРК* (3.8) *(соотв.* (3.9)*) выполнено тождественно, т.е. возникает ситуация теоремы 3.3;*

2. *если* $\kappa < n$ *и* $n \geq 2$, *то имеет место частичная редукция УРК: в принятом в условии* $\mathbf{c_2})$ *соглашении о нумерации базисных элементов в* $\mathcal{H}^K$ *первые* $K_\kappa = p_1 + \ldots + p_\kappa$ *уравнений являются линейными комбинациями остальных* $p_{\kappa+1}+\ldots+p_n$.

Следствие 3.1. *Пусть точке бифуркации отвечает инвариантное ядро и линеаризация имеет три-канонический ОЖН. Тогда редукция УРК А.М.Ляпунова и Э.Шмидта осуществляется по полным жордановым цепочкам с помощью полной системы функционально-независимых инвариантов действия группы* G_l .

Рассмотренную в п. 3 абстрактную ситуацию мы предполагаем применить к задачам распространения электромагнитных волн, проходящих через однородный изотропный немагнитный слой с нелинейностью типа Керра, заполняющей шаровой слой или слой между двумя софокусными однополостными гиперболоидами. Диэлектрическая проницаемость ε внутри слоя определяется по закону Керра $\varepsilon = \varepsilon_2 + a|\overrightarrow{E}|^2$, где $a > 0$ - коэффициент нелинейности, $\varepsilon_2 > \max(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ - константы, $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_0$, ε_1 - диэлектрическая проницаемость внутреннего пространства и $\varepsilon_3 \geq \varepsilon_0$, ε_3 -диэлектрическая проницаемость внешнего пространства, ε_0 -диэлектрическая проницаемость вакуума.

Список литературы

1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. – М.: Наука, 1969.; Wolter Noordorf, Leiden. – 1974.

2. Логинов Б.В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. – Ташкент: Фан, АН УзССР, 1979.

3. Логинов Б.В. Ветвление решений нелинейных уравнений и групповая симметрия// Вестник Самарского университета. –1998. – №4(10). – С. 15-75.

4. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications, MIA, V. 550. – Kluwer Acad. Publ. Dordrecht. – 2002.

5. Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen. Teilen 1-3// Mathematische Annallen. – 1905-1908. – Bd. 63-65.

6. Гурса Э. Курс математического анализа. Т. 3, Ч. 2. – Интегральные уравнения. – М.: ОНТИ, 1935.

7. Могилевский Ш.И. О представлении вполне непрерывных операторов в абстрактном сепарабельном гильбертовом пространстве// Изв. вузов. Математика. – 1958. – №3(4). – С.183-186.

8. Пустыльник Е.И. Об одном представлении линейных вполне непрерывных операторов, действующих в пространстве Банаха//Изв. вузов. Математика. – 1960. – № 2(15). – С.149-153.

9. Логинов Б.В. О нахождении собственных чисел и фундаментальных элементов Шмидта вполне непрерывного оператора в гильбертовом пространстве//Доклады АН УзССР. Физ.-мат. науки. – 1965. – № 1. – С.5-8.

10. Логинов Б.В., Поспеев В.Е. О собственных числах и векторах возмущенного оператора//Известия АН УзССР. Физ.-мат. науки. – 1967. – № 6. – С.29-35.

11. Логинов Б.В., Макеева О.В. Метод ложных возмущений в обобщенных задачах на собственные значения//Доклады РАН. Математика. – 2008. – Т. 419, № 2. – С.1-5.

12. Логинов Б.В., Макеева О.В. Спектральная задача Э.Шмидта о собственных колебаниях резонатора без потерь//Труды Средневолжского математического общества. – 2007. – Т. 9, № 1. – С.31-38.

13. Ильинский А.С., Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. – М.: Изд-во МГУ, 1988.

14. Логинов Б.В., Коноплева И.В., Русак Ю.Б. Симметрия и потенциальность в общей задаче теории ветвления//Известия Вузов. Математика. – 2006. – № 4(527). – С.30-40.

15. Коноплева И.В., Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифукационных задачах// Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. – 2009. – Спецвыпуск. – С. 115-124.

16. Логинов Б.В., Коноплева И.В., Русак Ю.Б. Теоремы о неявных операторах в условиях групповой симметрии//Изв. Иркутского гос. ун-та. Математика. – 2011. – Т. 4, № 1. – С.31-43.

17. Макаренко Н.И. О ветвлении решений инвариантных вариационных уравнений//ДАН. Математика. – 1996. – Т. 348., № 3. – С.302-304.

18. Макаренко Н.И. Симметрия и косимметрия вариационных задач в теории волн//Труды межд. школы-семинара "Применение симметрии и косимметрии в теории бифуркаций и фазовых переходов". – Сочи: Ростов. ун-т. – 2001. – С.109-120.

19. Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления//Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Ташкент: Фан АН УзССР. 1978, – С.133-148.

20. Loginov B.V., Rousak Yu.B. Generalized Jordan structure in the problem of stability of bifurcation equations//Nonlinear Analysis. TMA. – 1991.– V. 17, №. 3. – P.219-231.

21. Loginov B.V. Branching equation in the root subspace//Nonlinear Analysis. TMA. – 1998. –V. 32, №. 3. – P.439-448.

22. Karasözen B., Konopleva I., Loginov B. Hereditary symmetry of resolving systems in nonlinear equations with Fredholm operators//Nonl. Anal. and Appl.: To V.Lakshmikantham on his 80th Birthday. (Ravi P. Agarwal, Donal O'Regan–eds.) – Kluwer Acad. Publ, Dordrecht. – 2003.– V. 2. – P.617-644.

23. Konopleva I.V., Loginov B.V., Makeev O.V., Rousak Yu.B. Symmetry of $SO(2)$ and $SH(2)$ in Poincare-Andronov-Hopf bifurcation problems with potential branching equations//Труды Средневолжского математического общества. – 2008. – Т. 10, №.11. – С. 106-112.

24. Русак Ю.Б., Логинов Б.В., Ким-Тян Л.Р. Обобщенные жордановы цепочки специального вида линейной оператор-функции спектрального параметра//Сб. научно-исслед. трудов «Прикладная математика и механика». – УлГТУ, Ульяновск. – 2009. – С. 205-217.

Stationary bifurcation problems with E. Schmidt spectrum in linearization under group symmetry conditions.

© B. V. Loginov[4]; I. V. Konopleva[5]; L. V. Mironova[6]

Abstract. With the aim of applications in electromagnetic oscillations theory G-invariant implicit operator theorem and theorem about reduction of variational type branching equations and branching equations in the root-subspaces on the number of equations are proved for bifurcational problems with E.Schmidt spectrum in the linearization. Terminilogy and designations of the works [1]-[4] are used.

Key Words: Stationary bifurcation problems, E. Schmidt spectrum, group symmetry, G-invariant implicit operator theorem, variational type branching equations and branching equations in the root-subspaces.

[4]Proffesor, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru
[5]Docent, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; i.konopleva@ulstu.ru
[6]Assistent,Ulyanovsk Higher Civil Aviation School, Ulyanovsk; i.konopleva@ulstu.ru