УДК 517.9

Математическое моделирование процессов переноса в плоских каналах

© В. В. Лукашев [1], В. Н. Попов [2], А. А. Юшканов [3]

Аннотация. В рамках кинетического подхода в изотермическом приближении построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение задачи о течении разреженного газа в плоском канале с бесконечными стенками, обусловленного градиентом давления, параллельного стенкам канала (течении Пуазейля). В качестве основного уравнения используется БГК-модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия – модель зеркально-диффузного отражения. С учетом построенной функции распределения вычислен поток массы в направлении градиента давления, приходящийся на единицу ширины канала. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными численными методами.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения, модели граничных условий, коэффициенты аккомодации

1. Введение

Теоретические исследования взаимодействия газа с обтекаемыми поверхностями являются исключительно сложными особенно для реальных поверхностей [1]. В силу этого по-прежнему актуальными остаются модели граничных условий, которые используют такие интегральные характеристики взаимодействия молекул газа с поверхностями, как коэффициенты аккомодации. Одной из таких моделей граничных условий является зеркально-диффузное граничное условие Максвелла [2]

$$f^+(\mathbf{r}'_s,\mathbf{v}) = (1-q)\, f^-(\mathbf{r}'_s,\mathbf{v}-2\mathbf{n_0}(\mathbf{n_0}\mathbf{v})) + q\, f_s(\mathbf{r}'_s,\mathbf{v}). \tag{1.1}$$

Здесь $f^+(\mathbf{r}'_s,\mathbf{v})$ – функция распределения молекул, падающих на стенку, $f^-(\mathbf{r}'_s,\mathbf{v})$ – отраженных от стенки зеркально, а $f_s(\mathbf{r}'_s,\mathbf{v})$ – отраженных от стенки диффузно, $\mathbf{r}'_s$ – координаты точек поверхности, $\mathbf{v}$ – скорости движения центров масс молекул газа, q – вероятность того, что молекула, летящая к стенке отразится диффузно, $1-q$ – вероятность того, что молекула, летящая к стенке отразится зеркально.

Аналитическое решение задачи о течении Пуазейля (течении газа в плоском канале с бесконечными параллельными стенками при наличии параллельного стенкам градиента давления) в случае полной аккомодации тангенциального инпульса молекул газа стенками канала получено в [3]. Целью представленной работы является получение решения задачи о течении Пуазейля с учетом коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа. При этом в качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса используется БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия на стенках канала – условие (1.1).

[1]Аспирант кафедры математики, Северный (Арктический) федеральный университет, г. Архангельск; rarugg@yandex.ru.

[2]Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет, г. Архангельск; v.popov@agtu.ru.

[3]Профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет, г. Москва; yushkanov@inbox.ru.

2. Постановка задачи. Построение функции распределения молекул газа

Рассмотрим течение разреженного газа в плоском канале, толщиной D', стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm d'$ прямоугольной декартовой системы координат ($d' = D'/2$). Предположим, что течение газа обусловлено наличием постоянного градиента давления. Направим ось Oz' вдоль градиента давления. Будем считать, что относительный перепад давления на длине свободного пробега молекул газа малым. Тогда рассматриваемая задача допускает линеаризацию. Учитывая, что в задачах скольжения функция распределения пропорциональна касательной к обтекаемой поверхности компоненте массовой скорости газа, функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(z)\beta^{3/2}\pi^{-3/2}\,\exp(-C^2)\,\left[1 + C_z G_n\, Z(x, C_x)\right]. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор; $\mathbf{C} = \sqrt{\beta}\,\mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа; $\beta = m/2k_BT$; m – масса молекулы газа; k_B – постоянная Больцмана; T – температура газа; $G_n = (1/p)dp/dz$ – безразмерный градиент давления в направлении оси Oz'; p – давление газа; $Z(x, C_x)$ – линейная поправка к локально-равновесной функции распределения; $x = x'/l_g$ и $z = z'/l_g$ – безразмерные координаты; $l_g = \eta_g\,\beta^{-1/2}/p$.

Запишем в выбранной системе координат БГК модель кинетического уравнения Больцмана

$$v_x\frac{\partial f}{\partial x'} + v_z\frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g}(f_{eq} - f). \tag{2.2}$$

Подставляя (2.1) в (2.2) и линеаризуя $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$, приходим к уравнению для нахождения $Z(x, \mu)$ ($\mu = C_x$)

$$\mu\frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) + 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-\tau^2)\,Z(x, \tau)\,d\tau. \tag{2.3}$$

Общее решение (2.3) приведено в [4]

$$Z(x, \mu) = x^2 - 2x\mu + 2\mu^2 + A_0 + A_1(x - \mu) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp(-\frac{x}{\eta})\,F(\eta, \mu)a(\eta)\,d\eta, \tag{2.4}$$

где A_0, A_1 и $a(\eta)$ – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению,

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\eta\,\mathrm{P}\frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2)\lambda(\eta)\,\delta(\eta - \mu), \tag{2.5}$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,z\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp(-\mu^2)}{\mu - z}\,d\mu, \tag{2.6}$$

$\mathrm{P}(1/z)$ – распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Рассмотрим теперь вопрос о граничных условиях, которым должно удовлетворять решение (2.4) на стенках канала. С учетом используемой модели зеркально-диффузного отражения граничные условия на верхней и нижней стенках канала записываются в виде [4]

$$Z(d,\mu) = (1-q)Z(d,-\mu), \qquad \mu < 0. \tag{2.7}$$

$$Z(-d,\mu) = (1-q)Z(-d,-\mu), \qquad \mu > 0. \tag{2.8}$$

Подставляя (2.4) в (2.7) и (2.8), приходим к интегральным уравнениям

$$d^2 - 2\mu d + 2\mu^2 + A_0 + A_1(d-\mu) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{d}{\eta}\right) F(\eta,\mu)a(\eta)\,d\eta = (1-q)[d^2 + 2\mu d + 2\mu^2 +$$

$$+ A_0 + A_1(d+\mu)] + (1-q)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{d}{\eta}\right) F(\eta,-\mu)a(\eta)\,d\eta \qquad \mu < 0, \tag{2.9}$$

$$d^2 + 2\mu d + 2\mu^2 + A_0 - A_1(d+\mu) + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{d}{\eta}\right) F(\eta,\mu)a(\eta)\,d\eta = (1-q)[d^2 - 2\mu d + 2\mu^2 +$$

$$+ A_0 - A_1(d-\mu)] + (1-q)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{d}{\eta}\right) F(\eta,-\mu)a(\eta)\,d\eta \qquad \mu > 0. \tag{2.10}$$

Обозначим

$$b(\eta,x) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta). \tag{2.11}$$

Тогда с учетом (2.5) уравнения (2.9) и (2.10) запишем в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta\, b(\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta + \exp(\mu^2)b(\mu,d)\lambda(\mu) - (1-q)\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta\, b(\eta,d)}{\eta+\mu}\,d\eta +$$

$$+ \exp(\mu^2)b(-\mu,d)\lambda(-\mu)\Big) = (-d^2 - 2\mu^2 - A_0 - A_1 d)q + (A_1 + 2d)(2-q)\mu, \qquad \mu < 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta\, b(\eta,-d)}{\eta-\mu}\,d\eta + \exp(\mu^2)b(\mu,-d)\lambda(\mu) - (1-q)\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta\, b(\eta,-d)}{\eta+\mu}\,d\eta +$$

$$+ \exp(\mu^2)b(-\mu,-d)\lambda(-\mu)\Big) = (-d^2 - 2\mu^2 - A_0 + A_1 d)q + (A_1 - 2d)(2-q)\mu, \qquad \mu > 0.$$

Или

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta\, B(\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta + \exp(\mu^2)B(\mu,d)\lambda(\mu) =$$

$$= (-d^2 - 2\mu^2 - A_0 - A_1 d)q + (A_1 + 2d)(2-q)\mu, \qquad \mu < 0, \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta\, B(\eta,-d)}{\eta-\mu}\,d\eta + \exp(\mu^2)B(\mu,-d)\lambda(\mu) =$$

$$= (-d^2 - 2\mu^2 - A_0 + A_1 d)q + (A_1 - 2d)(2-q)\mu, \qquad \mu > 0. \tag{2.13}$$

Здесь

$$B(\mu,d)=b(\mu,d)-(1-q)b(-\mu,d). \tag{2.14}$$

Заменим в (2.12) μ на $-\mu$ и представим входящий в него интеграл в виде суммы двух. С учетом сказанного перепишем (2.12)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\eta\,B(\eta,d)}{\eta+\mu}\,d\eta+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,B(\eta,d)}{\eta+\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)B(-\mu,d)\lambda(-\mu)=$$
$$=(-d^2-2\mu^2-A_0-A_1d)q-(A_1+2d)(2-q)\mu,,\qquad \mu>0. \tag{2.15}$$

Первый интеграл в (2.15) является сингулярным, а второй – регулярным. Заменим в первом интеграле переменную интегрирования η на $-\tau$. Тогда (2.12) примет вид

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,B(-\eta,d)}{\eta-\mu}\,d\eta+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\tau\,B(\tau,d)}{\tau+\mu}\,d\tau+\exp(\mu^2)B(-\mu,d)\lambda(\mu)=$$
$$=(-d^2-2\mu^2-A_0-A_1d)q-(A_1+2d)(2-q)\mu,\qquad \mu>0. \tag{2.16}$$

При записи (2.16) учли, что на действительной оси $\lambda(\mu)$ является четной функцией. Аналогичным образом преобразуем (2.13)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\tau\,B(-\tau,-d)}{\tau+\mu}\,d\tau+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,B(\eta,-d)}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)B(\mu,-d)\lambda(\mu)=$$
$$=(-d^2-2\mu^2-A_0+A_1d)q+(A_1-2d)(2-q)\mu,\qquad \mu>0. \tag{2.17}$$

Складывая, далее, (2.16) и (2.17) и принимая во внимание (2.11), приходим к уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,[B(-\eta,d)+B(\eta,-d)]\,d\eta}{\eta-\mu}+\exp(\mu^2)[B(-\mu,d)+B(\mu,-d)]\,\exp(d/\mu)\lambda(\mu)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\tau\,[B(-\tau,-d)+B(\tau,d)]\,d\tau}{\tau+\mu}=-2[d^2+2\mu^2+A_0]q-4d(2-q)\mu,\qquad \mu>0. \tag{2.18}$$

Аналогично, вычитая (2.16) из (2.17), получаем

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta[B(\eta,-d)-B(-\eta,d)]\,d\eta}{\eta-\mu}+\exp(\mu^2)[B(\mu,-d)-B(-\mu,d)]\,\exp(d/\mu)\lambda(\mu)-$$
$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\tau\,[B(-\tau,-d)-B(\tau,d)]\,d\tau}{\tau+\mu}=2A_1[qd+\mu(2-q)],\qquad \mu>0. \tag{2.19}$$

Нетрудно видеть, что (2.19) обращается в тождество при выполнении условий $B(-\eta,-d)=B(\eta,d)$ (а значит и $B(-\eta,d)=B(\eta,-d)$) и $A_1=0$. Тогда (2.18) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\frac{\eta\,B(\eta,-d)}{\eta-\mu}\,d\eta+\exp(\mu^2)B(\mu,-d)\lambda(\mu)=f(\mu),\qquad \mu>0, \tag{2.20}$$

$$f(\mu) = (-d^2 - 2\mu^2 - A_0)q + 2d(2-q)\mu - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, B(\tau, d)}{\tau + \mu}\, d\tau. \tag{2.21}$$

Решение (2.20) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\eta\, B(\eta, -d)}{\eta - z}\, d\eta, \tag{2.22}$$

для которой

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i\mu B(\mu, -d), \qquad 0 < \mu < +\infty, \tag{2.23}$$

$$N^+(\mu) + N^-(\mu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\eta\, B(\eta, -d)}{\eta - \mu}\, d\eta, \tag{2.24}$$

Здесь $N^+(\mu)$ и $N^-(\mu)$ – краевые значения функции $N(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза, совпадающего с действительной положительной полупрямой. Аналогичные соотношения для $\lambda(z)$, определяемой равенством (2.6), имеют вид

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i\mu \exp(-\mu^2), \qquad -\infty < \mu < +\infty, \tag{2.25}$$

$$\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu). \tag{2.26}$$

Здесь разрез совпадает со всей действительной числовой прямой. С учетом (2.23)-(2.26) сведем интегральное уравнение (2.20) к краевой задаче Римана на действительной положительной полуоси

$$N^+(\mu)\, \lambda^+(\mu) - N^-(\mu)\, \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i\mu f(\mu) \exp(-\mu^2), \qquad \mu > 0, \tag{2.27}$$

Особенность краевой задачи (2.27) состоит в том, что функции $N(z)$ и $\lambda(z)$ имеют различные разрезы. Чтобы устранить эту особенность воспользуемся решением однородной краевой задачи

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \qquad \mu > 0, \tag{2.28}$$

которое имеет вид [4]

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp\left[\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{[\theta(\tau) - \pi]\, d\tau}{\tau - z}\right], \qquad \theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau \exp(-\tau^2)}.$$

С учетом решения однородной краевой задачи (2.28) перепишем (2.27)

$$N^+(\mu)\, X^+(\mu) - N^-(\mu)\, X^-(\mu) = \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} 2\sqrt{\pi} i\mu f(\mu) \exp(-\mu^2), \qquad \mu > 0. \tag{2.29}$$

Линии скачков функций $N(z)$ и $X(z)$ совпадают с контуром краевого условия. Следовательно, получили краевую задачу Римана – задачу определения аналитической функции по заданному скачку. Учитывая поведение входящих в (2.29) функций, по формулам Сохоцкого получаем ее общее решение

$$N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) \frac{d\eta}{\eta - z} \tag{2.30}$$

Рассмотрим поведение построенного решения, задаваемого выражением (2.30) в окрестности бесконечно удаленной точки. Учитывая, что при $|z| \to +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\, \eta f(\eta)\, \exp(-\eta^2)\, \frac{d\eta}{\eta - z} = -\frac{1}{z}\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\, \eta f(\eta)\, \exp(-\eta^2)\, d\eta + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

находим

$$N(z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\, \eta f(\eta)\, \exp(-\eta^2)\, d\eta + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \qquad |z| \to +\infty.$$

Так как функция $N(z)$ согласно (2.22) задана интегралом типа Коши то в окрестности бесконечно удаленной точки $N(z) = O(1/z)$. Отсюда приходим к условию разрешимости краевой задачи (2.29)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\, \eta f(\eta)\, \exp(-\eta^2)\, d\eta = 0. \tag{2.31}$$

С учетом (2.11), (2.21) перепишем (2.31) в виде

$$q(d^2 + A_0) - 2qQ_2 - 2d(2-q)Q_1 - \\ - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\, \eta\, \exp(-\eta^2)\, d\eta\, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, B(\tau, d)}{\tau + \eta}\, d\tau = 0. \tag{2.32}$$

Здесь Q_n – интегралы Лойалки [4]

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\, \eta^{n+1}\, \exp(-\eta^2)\, d\eta,$$

в частности, $Q_1 = -1.01619$, $Q_2 = -1.26632$. Изменяя в последнем интеграле порядок интегрирования и учитывая (2.11) и интегральное представление функции $X(-\tau)$

$$X(-\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\, \frac{\eta\, \exp(-\eta^2)\, d\eta}{\eta + \tau},$$

из (2.32) находим

$$A_0 = -d^2 + 2Q_2 - 2dQ_1 + q^{-1}\Big[4dQ_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \tau\, X(-\tau)\, B(\tau, d)\, d\tau\Big]. \tag{2.33}$$

Коэффициенты $B(\eta, -q)$ найдем из условия (2.23), предварительно преобразовав (2.30). Учитывая, что

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)}\, \frac{\eta\, \exp(-\eta^2)\, d\eta}{\eta - z},$$

перепишем (2.30) в виде

$$N(z) = -q(d^2 + A_0) - 2d(2-q)z - 2qz^2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, B(\tau,d)}{\tau+z}\, d\tau +$$

$$+ \frac{2}{X(z)} \left[qz + (2-q)d - qQ_1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, B(\tau,d) X(-\tau)\, d\tau}{\tau+z} \right] \qquad (2.34)$$

из (2.34) после преобразований получаем

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = \frac{2\sqrt{\pi}\, i\, \mu\, \exp(-\mu^2) X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} \Bigg[q\mu + (2-q)d - qQ_1 +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, B(\tau,d) X(-\tau)\, d\tau}{\tau+\mu}], \qquad \mu > 0.$$

Отсюда, принимая во внимание (2.11) и (2.23), находим

$$B(\mu,-d) = -\frac{\exp(-\mu^2) X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} \Bigg[q\mu + (2-q)d - qQ_1 +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau\, X(-\tau) B(\tau,d)\, d\tau}{\tau+\mu} \Bigg], \qquad \mu > 0. \qquad (2.35)$$

Учитывая, что $B(\eta,-d) = B(-\eta,d)$ и (2.11) и (2.14), находим $a(-\mu) = a(\mu)$,

$$B(\mu,d) = \left[\exp\left(-\frac{d}{\mu}\right) - (1-q)\exp\left(\frac{d}{\mu}\right) \right] a(\mu),$$

$$B(\mu,-d) = \left[\exp\left(\frac{d}{\mu}\right) - (1-q)\exp\left(-\frac{d}{\mu}\right) \right] a(\mu).$$

Тогда для нахождения $a(\mu)$ с учетом (2.35) приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$a(\mu) = \frac{X(-\mu)\, \exp(-\mu^2 - d/\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2 \left[1 - (1-q)\, \exp(-2d/\mu)\right]} \Bigg[q(Q_1 - \mu + d) - 2d -$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\tau \left[\exp(-d/\tau) - (1-q)\exp(d/\tau)\right] X(-\tau) a(\tau)\, d\tau}{\tau+\mu} \Bigg], \qquad \mu > 0. \qquad (2.36)$$

Решение (2.36) ищем в виде ряда по степеням λ

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu), \qquad \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}. \qquad (2.37)$$

Подставляя (2.37) в (2.36) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, находим

$$a_0(\tau) = h(\tau)[q(Q_1 - \tau + d) - 2d],$$

$$a_1(\tau) = h(\tau) \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta)\,[q(Q_1-\eta+d)-2d]\,d\eta}{\eta+\tau},$$

$$a_2(\tau) = h(\tau) \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta)\,d\eta}{\eta+\tau} \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\mu)\,[q(Q_1-\mu+d)-2d]\,d\mu}{\mu+\eta},$$

$$h(\tau) = \frac{X(-\tau)\,\exp(-\tau^2-d/\tau)}{|\lambda^+(\tau)|^2\,[1-(1-q)\,\exp(-2d/\tau)]},$$

$$g(\tau) = \frac{\tau X^2(-\tau)\,\exp(-\tau^2)\,[\exp(-2d/\tau)-(1-q)]}{|\lambda^+(\tau)|^2\,[1-(1-q)\,\exp(-2d/\tau)]}.$$

С учетом (2.37) в ряд по степеням λ будет разложен и коэффициент A_0, определяемый соотношением (2.33)

$$A_0 = -d^2 + 2Q_2 - 2dQ_1 + q^{-1}\Big[4dQ_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_k\Big],$$

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} g(\tau)[q(Q_1-\tau+d)-2d]\,d\tau,$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} g(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta)\,[q(Q_1-\eta+d)-2d]\,d\eta}{\eta+\tau},$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} g(\tau)\,d\tau \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta)\,d\eta}{\eta+\tau} \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\mu)\,[q(Q_1-\mu+d)-2d]\,d\mu}{\mu+\eta}.$$

Таким образом, неизвестные параметры A_0, A_1 и функция $a(\eta)$, входящие в (2.4) найдены и функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

3. Вычисление макропараметров газа в канале

С учетом построенной функции распределения вычислим скорость газа в канале $q'_z(x')$ и величину потока массы J'_M в направлении оси Oz', приходящуюся на единицу ширины канала. Исходя из статистического смысла функции распределения и учитывая (2.1), находим

$$u'_z(x') = \frac{1}{n} \int v_z f(\mathbf{r}', \mathbf{v})\,d^3\mathbf{v} = \left(\frac{2k_BT}{m}\right)^{1/2} U_z(x)\,\frac{1}{p}\,\frac{dp}{dz}.$$

Здесь

$$U_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2)\,C_z^2 Z(x, C_x)\,d^3\mathbf{C} \tag{3.1}$$

есть безразмерная массовая скорость газа. Подставляя (2.4) в (3.1), после интегрирования получаем

$$U_z(x) = \frac{1}{2}\Big[x^2 + 1 - d^2 + 2Q_2 - 2dQ_1 + q^{-1}\Big[4dQ_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_k\Big] + 2\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k J_k(x)\Big], \tag{3.2}$$

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \gamma(x,\tau)[q(Q_1 - \tau + d) - 2d]\, d\tau,$$

$$J_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \gamma(x,\tau)\, d\tau \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta)\,[q(Q_1 - \eta + d) - 2d]\, d\eta}{\eta + \tau},$$

$$J_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \gamma(x,\tau)\, d\tau \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta)\, d\eta}{\eta + \tau} \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\mu)\,[q(Q_1 - \mu + d) - 2d]\, d\mu}{\mu + \eta},$$

$$\gamma(x,\tau) = \frac{X(-\tau)\, \exp(-\tau^2 - d/\tau)\, \mathrm{ch}(x/\tau)}{|\lambda^+(\tau)|^2\,[1 - (1-q)\, \exp(-2d/\tau)]}.$$

Величину потока массы J'_M в направлении оси Oz', приходящуюся на единицу ширины канала, вычислим согласно [5] и [6]

$$J_M = -\frac{2}{D^2} \int\limits_{-D/2}^{D/2} U(x)\, dx, \qquad D = 2d. \tag{3.3}$$

Подставляя (3.2) в (3.3) и выполняя интегрирование, получаем

$$J_M = \frac{D}{6} - (2q^{-1} - 1)Q_1 - \frac{1}{D}\left[2Q_2 + 1 + q^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_k\right] - \frac{2}{D^2}\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_k, \tag{3.4}$$

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \zeta(\tau)[q(Q_1 - \tau + d) - 2d]\, d\tau,$$

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \zeta(\tau)\, d\tau \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta)\,[q(Q_1 - \eta + d) - 2d]\, d\eta}{\eta + \tau},$$

$$K_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \zeta(\tau)\, d\tau \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\eta)\, d\eta}{\eta + \tau} \int\limits_0^{+\infty} \frac{g(\mu)\,[q(Q_1 - \mu + d) - 2d]\, d\mu}{\mu + \eta},$$

$$\zeta(\tau) = \frac{\tau X(-\tau)\, \exp(-\tau^2)\,[1 - \exp(-2d/\tau)]}{|\lambda^+(\tau)|^2\,[1 - (1-q)\, \exp(-2d/\tau)]}.$$

Значения J_M согласно (3.4) вычислены в пакете прикладных программ Mathematica 7. Полученные результаты, а также аналогичные результаты полученные в [5]–[7] на основе численных методов с использованием БГК и S моделей кинетического уравнения Больцмана, линеаризованного уравнения Больцмана с оператором столкновений для молекул-жестких сфер (LBE) и модели уравнения Больцмана с комбинированным ядром (CES) приведены в таблице 1.

D	J_M					
	(3.4)	BGK [7]	S [5]	CES [5]	CES [6]	LBE [6]
$q = 0.1$						
0.1	20.628087				19.984	20.243
1.0	17.619564				17.522	17.564
10.0	18.782803				18.737	18.743
$q = 0.5$						
0.1	4.556599	4.556406	4.5801	4.3156	4.3156	4.3868
1.0	3.368235	3.368218	3.3928	3.2959	3.2959	3.3264
10.0	4.573799		4.5837	4.5285	4.5285	4.5346
$q = 1.0$						
0.1	2.032989	2.032256	2.0395	1.9259		
1.0	1.538683	1.538678	1.5536	1.4863		
10.0	2.768646		2.7799	2.7220		

Таблица 1. Зависимость J_M от D при различных значениях q.

Как следует из таблицы 1 отличие результатов, вычисленных на основе (3.4) от аналогичных, полученных численными методами в [7] в рамках БГК модели кинетического уравнения Больцмана, не превышает 0.0005% для всего диапазона приведенных значений D. Последнее подтверждает адекватность использованных в работе численных процедур, использованных при нахождении J_M.

4. Заключение

В виде ряда Неймана построено аналитическое решение БГК модели кинетического уравнения Больцмана в задаче о течении Пуазейля. Для модели зеркально-диффузного отражения молекул газа стенками канала получено аналитическое выражение для расчета потока массы газа в направлении градиента давления, приходящегося на единицу ширины канала. Проведен численный анализ полученных выражений для различных значений толщины канала и значения параметра q.

Список литературы

1. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.

2. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука. 1967. 440 с.

3. Попов В.Н., Тестова И.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о течении Пуазейля // Журнал СВМО. 2010. Т. 12. № 3. С. 111-120.

4. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений. М.: МГОУ. 2004. 286 с.

5. C.E. Siewert. Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model Linearized Boltzmann Equation // European Journal of Mechanics B/Fluids. 2002. V. 21. P. 579-597.

6. C.E. Siewert. The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 2003. V. 54. P. 273-303.

7. Barihcello L.B., Camargo M., Podrigues P., Siewert C.E. Unified solutions to classical flow problems based on the BGK model // ZAMP. 2001. V. 52. P. 517-534.

Mathematical modelling of processes of carry in flat channels

© **V. V. Lukashev [4], V. N. Popov [5], A. A. Yushkanov [6]**

Abstract. Within the kinetic approach limit, in the isothermal approximation the analytical (in the form of Neumann's series) solution of the problem on flow of the rarefied gas in the flat channel with the infinite walls, caused by a pressure gradient parallel to walls (Poiseuille Flow) it is constructed. As the basic equation the BGK model of the Boltzmann's kinetic equation is used. As a boundary condition the model of diffusion reflections is used. In view of the constructed distribution function the flow of gases mass in a direction of a gradient of the pressure, falling unit width of the channel and the structure of mass speed of gas in the channel are constructed. Comparison with the similar results received Numerical method is leads..

Key Words: flow of the gas in the channel, Poiseuille Flow, Boltzmann's kinetic equation, the model kinetic equations, exact analytical solutions.

[4]Post graduate student, Northern Arctic federal university, Arkhangelsk; rarugg@yandex.ru.
[5]Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university, Arkhangelsk; popov.vasily@pomorsu.ru.
[6]Professor of Theoretical Rhysics Chair, Moscow state regional university, Moscow; yushkanov@inbox.ru.