УДК 517.9

Динамика системы управления, содержащей ансамбль осцилляторов, связанных через обратную связь

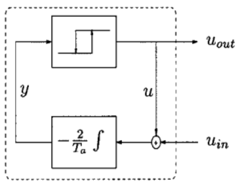
© **А. С. Кузнецова**[1]

Аннотация. Рассматривается система осцилляторов, связанных через гистерезисную нелинейность. Исследуется динамика системы и вопросы устойчивости движений. Использованы аналитический и численный подходы.

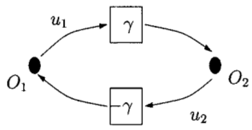
Ключевые слова: Колебательная система, осцилляторы связанные через гистерезисную нелинейность, синхронизация.

1. Введение

В данной статье рассматривается модель системы связанных осцилляторов, которая была алгоритмически описана в работе [7]. Такие системы встречаются в экологии, химии и медицине, например, при разработке устройств введения лекарств [4, 3, 5]. Система связанных осцилляторов представляет собой динамическую систему. Возникает вопрос, какие из известных нам типов движений могут возникнуть в этих системах. Модель системы изображена на рис. 1.1,1.2:



Р и с у н о к **1.1**



Р и с у н о к **1.2**

Каждый осциллятор представляет собой систему с одним переменным входом $u_{in}(t)$ и одним переменным выходом $u_{out}(t)$. Значения функций $u_{in}(t)$ и $u_{out}(t)$ являются скалярами. Внутри осциллятор состоит из системы-интегратора с обратной связью, которая осуществляется через реле. Осциллятор O_1 работает следующим образом. На вход интегратора подается сумма внешнего сигнала $u_{in}(t)$ и сигнала обратной связи $u(t)$. Эта сумма интегрируется с коэффициентом $-\frac{2}{T_a}$, в результате получается сигнал $y(t)$, который поступает на вход в реле. Реле переходит из включенного состояния (на выходе 1) в выключенное (на выходе -1), если сигнал на входе $y(t)$ достигает -1 сверху и переходит из выключенного состояния во включенное, если сигнал на входе достигает 1 снизу [6, 2].

[1]Аспирантка кафедры высшей математики, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; an.s.kuznetsova@gmail.com.

В статье [1] была получена математическая модель данной системы:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{2}{T_1}(-\gamma u_2(y(t)) + u_1(x(t))), \\ \dot{y}(t) = -\frac{2}{T_2}(\gamma u_1(x(t)) + u_2(y(t))), \end{cases} \tag{1.1}$$

где $\gamma, T_1, T_2 \in R^1_+$ - параметры, $u_{10}, u_{20} \in \{1, 0\}$ - начальные условия для реле, $x_0, y_0 \in R^1$ - начальные условия для системы,

$$u_1(x(t)) = \left[\begin{array}{l} -1,\ if\ (x(t) < 1 \wedge u(t-0) = -1) \vee (x(t) = -1), \\ \ \ 1,\ if\ (x(t) > -1 \wedge u(t-0) = 1) \vee (x(t) = 1), \\ u_{10},\ if\ x(\tau) \in (-1, 1) \quad \forall \tau \in [t_0, t], \end{array} \right.$$

$$u_2(y(t)) = \left[\begin{array}{l} -1,\ if\ (y(t) < 1 \wedge u(t-0) = -1) \vee (y(t) = -1), \\ \ \ 1,\ if\ (y(t) > -1 \wedge u(t-0) = 1) \vee (y(t) = 1), \\ u_{20},\ if\ y(\tau) \in (-1, 1) \quad \forall \tau \in [t_0, t]. \end{array} \right.$$

Не уменьшая общности будем полагать, что $T_2 > T_1$. Была установлена следующая теорема [1]:

Теорема 1.1. *Система двух осцилляторов, показанная на рисунке 1, синхронизируется, причем осциллятор O_2 опережает O_1, тогда и только тогда, когда $\gamma > \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}$. Данное синхронное состояние является устойчивым.*

Определение 1.1. *Процесс установления и поддержания режима колебаний двух и более связанных осцилляторов, при котором периоды этих осцилляторов совпадают называется синхронизацией* [7].

2. Постановка задачи

Поставим своей задачей изучить динамику системы (3.1) при $\gamma < \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}$. Для этого рассмотрим систему (3.1) и покажем, что при параметрах, удовлетворяющих неравенству $\gamma < \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}$, любое решение (3.1) ограничено. Заметим, что при $T_2 > T_1 > 0$ всегда $\gamma < 1$.

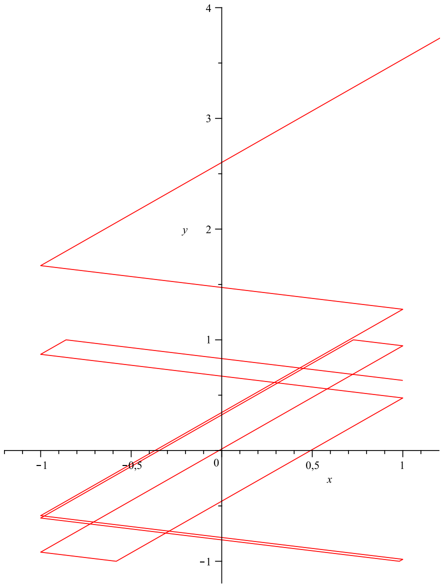
Теорема 2.1. *При любых начальных условиях решение $(x(t), y(t))$ системы (3.1) попадает в множество $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ плоскости Oxy и остается там все время своего существования.*

Доказательство. Рассмотрим правую часть (3.1). При всех допустимых управлениях фазовые траектории данной системы представляют собой ломаные прямые. Рассмотрим решение данной системы, начинающееся в точке (x_0, y_0) с начальным управлением $(1, 1)^T$ (для остальных значений управлений доказательство аналогично). В этом случае изображающая точка $(x(t), y(t))$ будет идти вдоль прямой

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-2+2\gamma}{T_1} \\ \\ \frac{-2-2\gamma}{T_2} \end{pmatrix} t$$

Так как $\frac{-2+2\gamma}{T_1} < 0, \frac{-2-2\gamma}{T_2} < 0$, следовательно существует момент t_1, при котором одна из координат (x или y) достигнет -1. Пусть это будет x для определенности. Следовательно, в момент t_1 управление переключится в режим $(-1, 1)^T$. Данному управлению соответствует движение вдоль прямой с направляющим вектором $\frac{2+2\gamma}{T_1} > 0, \frac{-2+2\gamma}{T_2} < 0$, следовательно, при любом значении u_1, ($u_1 = 1$ или $u_1 = -1$) значение $y(t)$ будет

убывать. Таким образом существует момент $\hat{t}$, при котором $y(\hat{t}) = -1$. Таким образом изображающая точка $(x(t), y(t))$ попадает в множество A.
Покажем, что она остается там при возрастании t. Действительно, пусть в момент $(\tilde{t})$ решение попадает в множество A, и пусть $u(\tilde{t}) = (1,1)^T$ (остальные три состояния управления рассматриваются аналогично). При таком управлении решение может выйти за границы области A только, если пересечет прямую $y = 1$ или $x = 1$. Но точка $(x(t), y(t))$ движется вдоль прямой с направляющим вектором $(\frac{-2+2\gamma}{T_1} < 0, \frac{-2-2\gamma}{T_2} < 0)$. Таким образом в фазовом пространстве все время, пока будет работать управление $(1,1)^T$ будет $x < 1$ и $y < 1$.



Р и с у н о к **2.1**

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Система трех осцилляторов

Рассмотрим движение системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{2}{T_1}(u_1(x(t)) + \gamma u_3(z(t))), \\ \dot{y}(t) = -\frac{2}{T_2}(u_2(y(t)) + \gamma u_1(x(t))), \\ \dot{z}(t) = -\frac{2}{T_3}(u_3(z(t)) + \gamma u_2(y(t))), \end{cases} \tag{3.1}$$

где $\gamma, T_1, T_2, T_3 \in R^1_+$ - параметры, $u_{10}, u_{20}, u_{30} \in \{-1, 1\}$ – начальные условия для реле, $x_0, y_0, z_0 \in R^1$ – начальные условия для системы, а

$$u_i(\alpha(t)) = \left[\begin{array}{l} -1, \ if \ (\alpha(t) < 1 \wedge u(t-0) = -1) \vee (\alpha(t) = -1), \\ \ \ 1, \ if \ (\alpha(t) > -1 \wedge u(t-0) = 1) \vee (\alpha(t) = 1), \\ u_{i0}, \ if \ \alpha(\tau) \in (-1, 1) \quad \forall \tau \in [t_0, t]. \end{array} \right.$$

В работе [1] была установлена теорема:

Т е о р е м а 3.1. *При $1 < \gamma < 3$ существует единственное состояние синхронизации, которое описывается уравнением (3.2).*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{l} (-1)^{k+1}\begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \\ z_0 \end{pmatrix} + (t-(k-1)(t_1+t_2))\begin{pmatrix} \frac{2-2\gamma}{T_1} \\ \frac{2\gamma-2}{T_2} \\ \frac{-2\gamma-2}{T_3} \end{pmatrix} \\ t\in[(k-1)(t_1+t_2+t_3), \quad (k-1)(t_1+t_2+t_3)+t_1], \\ \\ (-1)^{k+1}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -1 \end{pmatrix} + (t-k(t_1+t_2)+t_2)\begin{pmatrix} \frac{2+2\gamma}{T_1} \\ \frac{2\gamma-2}{T_2} \\ \frac{2-2\gamma}{T_3} \end{pmatrix} \\ t\in[(k-1)(t_1+t_2+t_3)+t_1, \quad (k-1)(t_1+t_2+t_3)+t_1+t_2], \\ \\ (-1)^{k+1}\begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + (t-k(t_1+t_2)+t_2)\begin{pmatrix} \frac{2\gamma-2}{T_1} \\ \frac{-2\gamma-2}{T_2} \\ \frac{-2\gamma+2}{T_3} \end{pmatrix} \\ t\in[(k-1)(t_1+t_2+t_3)+t_1+t_2, \quad k(t_1+t_2+t_3)], \end{array}\right. \tag{3.2}$$

Теорема 3.2. *При $1<\gamma<3$ у системы (3.1) существует единственное состояние синхронизации, которое является асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Рассмотрим отображение Пуанкаре для движений данной динамической системы на плоскости $y=1$. Для этого выберем начальную точку $(x_k,1,z_k)$. В статье [4] была установлена последовательность переключений для любого решения системы (3.1), которая соблюдается по крайней мере со второго переключения: $\dots\to(-1,1,1)\to(-1,1,-1)\to(1,1,-1)\to(1,-1,-1)\to(1,-1,1)\to(-1,-1,1)\to\dots$. Проходя все шесть переключений фазовая кривая вновь попадает на поверхность $y=1$. Таким образом можно записать уравнения для последовательности переключений:

$$\begin{pmatrix} x_k \\ 1 \\ z_k \end{pmatrix} + (t_1-t_4)\begin{pmatrix} -\frac{2\gamma-2}{T_1} \\ -\frac{2-2\gamma}{T_2} \\ -\frac{2+2\gamma}{T_3} \end{pmatrix} + (t_2-t_5)\begin{pmatrix} -\frac{-2\gamma-2}{T_1} \\ -\frac{2-2\gamma}{T_2} \\ -\frac{-2+2\gamma}{T_3} \end{pmatrix} + (t_3-t_6)\begin{pmatrix} \frac{2\gamma-2}{T_1} \\ \frac{-2-2\gamma}{T_2} \\ \frac{2-2\gamma}{T_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ 1 \\ z_{k+1} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Учитывая, что переключения происходят, когда одна из координат достигает значения 1 или -1, можно записать дополнительные соотношения:

$$z_k+t_1(-\frac{2+2\gamma}{T_3})=-1, x_{k+1}=-1+t_6\frac{(2-2\gamma)}{T_1}$$

$$-1+t_4(\frac{2-2\gamma}{T_2})+t_5(\frac{2-2\gamma}{T_2})+t_5(\frac{2+2\gamma}{T_2})=1, 1+t_1(\frac{2-2\gamma}{T_2})+t_2(\frac{2-2\gamma}{T_2})+t_3(\frac{2+2\gamma}{T_2})=-1$$

$$-1+t_2(\frac{2-2\gamma}{T_3})+t_3(\frac{2-2\gamma}{T_3})+t_4(\frac{2+2\gamma}{T_3})=1, 1+t_3(\frac{2-2\gamma}{T_1})+t_4(\frac{2-2\gamma}{T_1})+t_5(\frac{2+2\gamma}{T_1})=-1$$

Таким образом, после исключения $t_i, i=1..6$ получаем:

$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma}\right)^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2T_3\gamma}{T_1(1+\gamma)} \\ 0 & \frac{\gamma-1}{1+\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\left[\frac{2T_3\gamma}{(1+\gamma)T_1}+\frac{2(1+\gamma^2)}{(1-\gamma)^2}+\frac{2T_2(1+\gamma)}{T_1(\gamma-1)}\right] \\ \frac{2}{1+\gamma}-2\frac{T_1\gamma}{T_3(1-\gamma)}+2\frac{T_2}{T_3} \end{pmatrix}$$

Так как матрица при $(x_{k+1}, z_{k+1})^T$ неособая, следовательно, у нее существует обратная, и уравнение можно переписать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^2 & -\frac{2T_3\gamma(1-\gamma)^2}{T_1(1+\gamma)^3} \\ 0 & \frac{-\gamma+1}{1+\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2T_3\gamma}{(1+\gamma)T_1} - \frac{2(1+\gamma^2)}{(1-\gamma)^2} - \frac{2T_2(1+\gamma)}{T_1(\gamma-1)} \\ \frac{2}{1+\gamma} - 2\frac{T_1\gamma}{T_3(1-\gamma)} + 2\frac{T_2}{T_3} \end{pmatrix}$$

Собственные числа матрицы при (x_k, z_k) по модулю меньше 1, поэтому последовательность сходится. Следовательно решение асимптотически устойчиво.
Доказательство закончено.

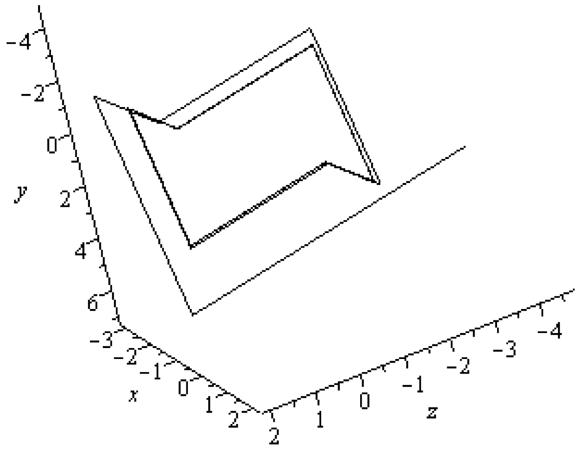


Рисунок **3.1**

Пример 3.1. *График решения системы 3.1 с начальными значениями* $x_0 = 1.5, y_0 = 4, z = -4, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = -1$, *значениями параметров* $\gamma = 1.5, T_1 = 3, T_2 = 7, T_3 = 9$ *в фазовом пространстве* Oxy.

4. Пространство параметров

Исследуем пространство параметров γ, T_1, T_2 системы 1.1. Было показано [1], что при $\gamma > \frac{T_2-T_1}{T_2+T_1}$ система имеет единственное асимптотически устойчивое периодическое решение, которое устойчиво при любых начальных данных x_0, y_0, u_{10}, u_{20}. В теореме 2.1. показано, что при $0 < \gamma < \frac{T_2-T_1}{T_2+T_1}$ любое решение системы 1.1 ограничено в фазовом пространстве областью $A = [-1, 1][-1, 1]$. Методом компьютерного моделирования было получено, что при $0 < \gamma < \frac{T_2-T_1}{T_2+T_1}$ могут существовать периодические решения:

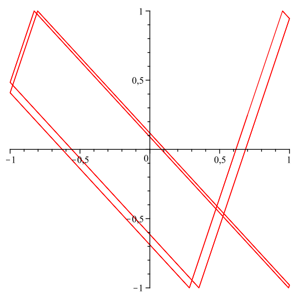


Рисунок **4.1**

Пример 4.1. *График решения системы 3.1 с начальными значениями* $x_0 = 0.8, y_0 = 0.5, u_1 = 1, u_2 = 1$, *значениями параметров* $\gamma = 0.5, T_1 = \sqrt{3} + 1, T_2 = 9$.

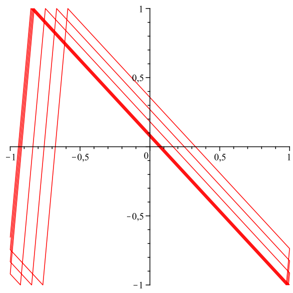


Рисунок **4.2**

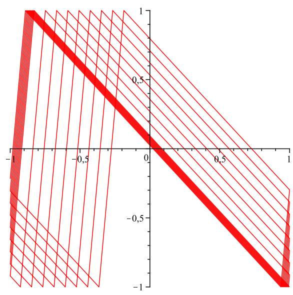


Рисунок **4.3**

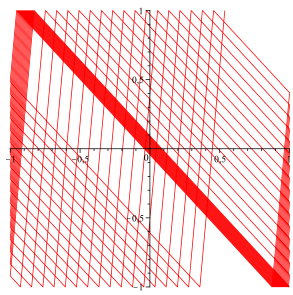


Рисунок **4.4**

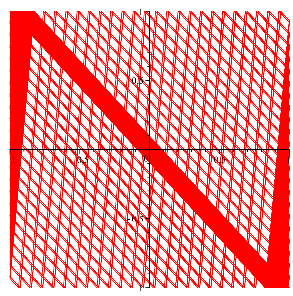


Рисунок **4.5**

Пример 4.2. *График решения системы 3.1 с начальными значениями* $x_0 = 1, y_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = -1$, *значениями параметров* $\gamma = \frac{11}{21}, T_1 = 7, T_2 = 2$. *Вышеприведенные рисунки соответствуют* $20, 50, 100, 450$.

Численно было получено, что все решения системы 3.1 не являются грубыми относительно параметров γ, T_1, T_2, динамика системы существенно зависит от начальных данных.

5. Заключение

Рассмотрена система осцилляторов, связанных через гистерезисную нелинейность. Показано, что могут существовать устойчивые и неустойчивые решения. Показано, что все решения являются ограниченными. С помощью аналогичного подхода может быть исследована динамика системы, состоящей из любого конечного числа n связанных осцилляторов типа O_1.

Список литературы

1. Кузнецова А.С. Синхронизация в осцилляторах, соединенных через обратную связь // Процессы управления и устойчивость: Труды 41-й международной конференции студентов и аспирантов. –2011. В печати.

2. Магнус К. Колебания. – М.: Мир, 1982. – 303 с.

3. Мигулин В.В. Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1978. – 391 с.

4. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. – М.: Наука, 1994. – 285 с.

5. Li B., Siegel R.A. Global analysis of a model pulsing drug delivery oscillator based on chemomechanical feedback with hysteresis // Chaos. – 2000. – № 3. – P. 682-690.

6. Macki J.W., Nistri P., Zecca P. Mathematical models for hysteresis // SIAM Review. – 1993. – № 1. – P. 94-123.

7. Varigonda S., Georgiou T.T. Dynamics of relay relaxation oscillators // Transactions on automatic control. – 2001. – № 1. –P. 65-77.

The dynamics of coupled oscillators with a feedback

© **A. S. Kuznetsova**[2]

Abstract. The dynamics of coupled relay oscillators is considered. The stability of synchrony mode was established. The boundness of motions was established. The approach is based on state-space representations.

Key Words: Coupled relay oscillators, synchronization.

[2]Postgraduate student of Higher Mathematics chair, Saint-Petersburg state university, Saint-Petersburg; an.s.kuznetsova@gmail.com.