УДК 519.6

Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости

© **Н. Д. Кузьмичев**[1]

Аннотация. Получены формулы для коэффициентов ряда Фурье функции разложимой в ряд Тейлора выраженные через производные, а также ряды для первой и второй производных функции, составленные из коэффициентов ряда Фурье. С помощью вышеотмеченных выражений определены формулы численного дифференцирования и экспериментального восстановления производных. Даны оценки точности восстановления производных.
Ключевые слова: модуляционный Фурье-анализ, ряд Тейлора-Фурье, численное дифференцирование, экспериментальное восстановление производных, точность восстановления.

1. Введение

В экспериментальной физике (в оптике, сверхпроводимости и т.д.) широко применяется метод модуляционного Фурье-анализа [1-3]. Данный метод используется в тех случаях, когда непосредственное измерение физической характеристики по каким либо причинам затрудненно. Например, исследуемая нелинейная часть зависимости замаскирована значительной ее линейной частью, или определяется динамическая зависимость. В вышеотмеченном методе определяется физическая характеристика материала или ее производная с помощью изучения отклика этого материала на модулированное внешнее воздействие, например гармоник сигнала отклика. Хорошо известно, что при малых амплитудах модуляции (модуляционная методика) зависимость амплитуды первой гармоники сигнала отклика от величины статического воздействия с точностью до постоянного множителя является практически первой производной исследуемой зависимости (см. например [1]). В случае произвольных амплитуд модуляции это не так. Необходимо учитывать амплитуды высших гармоник сигнала отклика, как показано в работах [2, 3].

В настоящей работе мы приводим обоснование формул полученных в указанных работах, формулы численного дифференцирования и оценки точности восстановления производных.

2. Ряд Тейлора-Фурье

Пусть функция (исследуемая зависимость) $f(x)$ разложима в ряд Тейлора в точке x_0, т.е. $f(x) \in C^{\infty}((x_0 - R, x_0 + R))$ и остаточный член в формуле Тейлора для $f(x)$ стремиться к нулю. Здесь R – радиус сходимости указанного ряда. Введем обозначение $x - x_0 = z$. Допустим, величина z является функцией параметра τ. Так например, в экспериментальной физике широко используется гармонический модуляционный анализ [1-3], и z от времени меняется по гармоническому закону, например: $z(\tau) = h \cdot \cos(\omega\tau)$. Физически это означает, что x_0 – есть величина статического воздействия, а величина

[1]Заведующий кафедрой общенаучных дисциплин, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kuzmichevnd@yandex.ru.

h – является амплитудой модуляции данного воздействия с циклической частотой ω. Вследствие чего функция f будет зависеть от τ (времени) периодически. В окрестности x_0 функции $f(x)$ соответствует ряд Тейлора [4, 5]:

$$f(x_0 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(x_0). \tag{2.1}$$

Здесь $f^{(n)}(x_0)$ - производная порядка n в точке x_0 и $|z| < R$. Так как $z(\tau)$ меняется по гармоническому закону, то ряд (2.1) преобразуется в ряд Фурье [2, 3]:

$$f(x_0 + h \cdot \cos t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \cdot \cos^n t}{n!} f^{(n)}(x_0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \cos(mt), \tag{2.2}$$

где $t = \omega\tau$ и

$$A_m = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+m)!} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+m} f^{(2n+m)}(x_0). \tag{2.3}$$

Справедливость формулы (2.3) действительно вытекает из результата вычисления коэффициентов A_m ряда Фурье (2.2). Коэффициенты A_m определим по формуле (в силу удобства возьмем пределы интегрирования 0 и 2π):

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \cdot \cos^n t}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot \cos(mt) dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot \int\limits_0^{2\pi} \cos^n t \cdot \cos(mt) dt.$$

Вычислим интеграл

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^n t \cdot \cos(mt) dt \tag{2.4}$$

Интеграл (2.4) отличен от нуля, тогда когда $n = 2k + m$ и равен:

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^{2k+m}(t) \cdot \cos(mt) dt = \frac{\pi}{2^{2k+m-1}} \cdot \frac{(2k+m)!}{k!\,(k+m)!}, \tag{2.5}$$

где m, k = 0, 1, 2,... .

Вычисление интеграла (2.4) произведем путем замены $\cos x$ выражением $(e^{ix} + e^{-ix})/2$:

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^n t \cdot \cos(mt) dt = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int\limits_0^{2\pi} e^{i(n-k)t} e^{-ikt} \left(e^{imt} + e^{-imt}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \int\limits_0^{2\pi} \left(e^{i(n-m-2k)t}\right) dt.$$

Здесь $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент, а i – мнимая единица. Интеграл отличен от нуля при условии когда, $n + m - 2k = 0$ и $n - m - 2k = 0$. Т.е. в сумме останется по одному члену при $k = (n-m)/2$ и $k' = (n+m)/2$. Учитывая четность величин $(n-m)$ и $(n+m)$ при целых k имеем: $n = 2k + m$ и $k' = k + m$. В результате получим:

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^n t \cdot \cos(mt) dt = \int\limits_0^{2\pi} \cos^{2k+m} t \cdot \cos(mt) dt = \frac{\pi}{2^{2k+m-1}} \cdot \frac{(2k+m)!}{k!\,(k+m)!}.$$

Проверим справедливость (2.5) при любых m и $k=0$:

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^m t \cdot \cos mt dt = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^m \left(\frac{e^{imt}+e^{-imt}}{2}\right) dt =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \left[\int\limits_0^{2\pi} e^{(2m-2k)it} dt + \int\limits_0^{2\pi} e^{-2kit} dt \right] = \frac{\pi}{2^{m-1}}.$$

При $m=0$ вычисления дают (2.5):

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^{2k} t dt = \int\limits_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}\right)^{2k} dt = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{m=0}^{k} C_{2k}^m \int\limits_0^{2\pi} e^{2(m-k)it} dt = \frac{\pi}{2^{2k-1}} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2}.$$

Пример 2.1. *Пусть $f(x) = cosx$, при $x = h \cdot cost$ будем иметь хорошо известный ряд Фурье: $cos(h \cdot cost) = J_0(h) + 2\sum\limits_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(h) cos(2mt)$, где $J_{2m}(h)$ – функция Бесселя первого рода порядка $2m$.*

Таким образом, мы для функции $f(x)$ при $x = h \cdot cost$ имеем ряд Тейлора (2.1) и ряд Фурье (2.2). Коэффициенты ряда Фурье (2.3) являются функциями величин статического воздействия x_0 и амплитуды модуляции h.

Вышеприведенные доводы можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2.1. *Если функция $f(x)$ для всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ разложима в ряд Тейлора, то при $x = x_0 + h\cos t$, где $h \le R$, функция $f(x_0 + h\cos t)$ разлагается в ряд Фурье вида $\frac{A_0}{2} + \sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m \cos mt$, где $A_m = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+m)!} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+m} \cdot f^{(2n+m)}(x_0)$, а величина $f^{(2n+m)}(x_0)$ является производной порядка $2n+m$ в точке x_0.*

Замечательным свойством выражения (2.3) есть то, что первым членом ряда коэффициента Фурье A_m порядка m является $m-$ая производная $f^{(m)}(x)$. То есть, в высшие гармоники вклад дают высшие производные.

Т.о. мы получили формулы для коэффициентов Фурье (амплитуд гармоник) выраженные через производные функции. Естественно возникает обратная задача – выразить функцию и ее производные через коэффициенты Фурье. Практическое значение имеют первая и вторая производные.

3. Связь производных с коэффициентами Фурье функции

Вычислим производную по параметру t от $f(x)$, где $x = x_0 + h \cdot \cos t$:

$$\frac{df}{dx}\frac{dx}{dt} = h\sin t \left(\frac{df}{dx}\right)_{x=x_0+h\cos t} = \sum_{m=1}^{\infty} mA_m \sin mt. \tag{3.1}$$

Положим в (3.1) $t = \pi/2$ и в результате получим ряд для производной f:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)_{x_0} = f^{(1)}(x_0) = \frac{1}{h}\sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1}(2m-1) A_{2m-1}(x_0, h). \tag{3.2}$$

П р и м е р 3.1. *Найдем производную для функции:*

$$\left(\frac{d}{dx}sinh(x)\right)\Bigg|_{x=x_0} = \frac{2cosh(x_0)}{h}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}(2m-1)I_{2m-1}(h) =$$
$$= \frac{2cosh(x_0)}{h}\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{(h/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!} - 3\frac{(h/2)^{2k+3}}{k!(k+3)!} + 5\frac{(h/2)^{2k+5}}{k!(k+5)!} - ...\right] = cosh(x_0)$$

Для функции $f(x)$ и ее второй производной следуя алгоритму вычисления формулы (3.2) получим ряды:

$$f(x_0) = \frac{A_0(x_0,h)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m A_{2m}(x_0,h), \tag{3.3}$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2}\right)_{x_0} = \frac{1}{h^2}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}(2m)^2 A_{2m}(x_0,h). \tag{3.4}$$

В итоге мы в своем арсенале имеем коэффициенты Фурье, выраженные через производные и производные, выраженные через коэффициенты Фурье. В плане приложения важны не столько ряды, сколько конечные суммы.

Формулы (3.2) – (3.4) не требуют таких жестких ограничений накладываемых на функцию $f(x)$, какие требуют формулы (2.1) – (2.3). Например, для справедливости формулы (3.2) необходимо, чтобы $f(x)$ в точке x_0 имела производную.

Ниже рассмотрим случаи численного дифференцирования и экспериментального определения первой и второй производной исследуемой зависимости.

4. Формулы численного дифференцирования

Численное дифференцирование широко используется в вычислительной математике и при моделировании процессов в естественных и технических науках. Например, при решении ряда задач на компьютере, из-за громоздкости выкладок оказывается значительно удобнее выполнять вычисление производных численным методом. Другой областью численного представления производных являются численные методы решения дифференциальных уравнений.

В настоящем разделе приводятся формулы численного представления высших производных полученных с помощью Фурье-гармоник функции.

Рассмотрим функцию $f(y)$, которую можно представить при $y = x + h \cdot cost$ рядом Фурье (2.2). Первую производную функции $f(y)$ выразим через амплитуды гармоник (коэффициенты Фурье) A_m (3.2) [6]:

$$f^{(1)}(x,h) = \frac{1}{h}(A_1 - 3A_3 + 5A_5 - ...). \tag{4.1}$$

Вторая и другие высшие производные имеют вид (3.4) [4]:

$$f^{(2)}(x,h) = \frac{1}{h^2}(4A_2 - 16A_4 + ...), \tag{4.2}$$

$$f^{(3)}(x,h) \ = \ \frac{24}{h^3}A_3 \ + \ ... \quad , \tag{4.3}$$

$$f^{(4)}(x,h) \ = \ \frac{192}{h^4}A_4 \ + \ .... \tag{4.4}$$

Коэффициенты Фурье (2.3) выразим через интегралы [4, 5]:

$$A_m\left(x,h\right) \ = \ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(x+h\cos t\right)\cos mtdt. \tag{4.5}$$

Учитывая первые члены разложения (4.1) и выражение (4.5) получим аппроксимацию первой производной с погрешностью $O(h^2)$:

$$f^{(1)}\left(x,h\right) \ = \ \frac{1}{h\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f\left(x+h\cos t\right)\cos tdt \ + \ O(h^2). \tag{4.6}$$

Действительно. Подынтегральную функцию (4.6) разложим по формуле Тейлора с точностью до $O(h^3)$ и в результате вычисления интегралов от $cos^m\ (x)(m=1,2,3,4)$ получим:

$$f^{(1)}\left(x,h\right) \ = \frac{1}{h\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left[f\left(x\right)+hf^{(1)}\left(x\right)\cos t+\frac{h^2}{2}f^{(2)}\left(x\right)\cos^2 t+\frac{h^3}{6}f^{(3)}\left(x_*\right)\cos^3 t\right]\cos tdt =$$
$$= f^{(1)}\left(x\right)+\frac{h^2}{8}f^{(3)}\left(x_*\right)=f^{(1)}\left(x\right)+\ O(h^2).$$

Здесь $x_* \in \left(x_0-h,x_0+h\right)$.

Вычисление интегралов в силу удобства выполним по формуле трапеций с шагом $\tau = \pi/2$ (при этом оценка погрешности выражения (4.6) не нарушается):

$$\begin{aligned} f^{(1)}\left(x,h\right) \ &= \ \frac{1}{h\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\left[f\left(x+h\right) \ - \ f\left(x-h\right)\right] \ + \ O(h^2) = \\ &= \frac{f\left(x+h\right) \ - \ f\left(x-h\right)}{2h} \ + \ O(h^2). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Полученная формула (4.7) совпадает с хорошо известным выражением для первой производной [8-10]. Следует отметить, что уменьшение шага интегрирования не уменьшает порядок аппроксимации.

Точность производной увеличивается на два порядка с учетом амплитуды третьей гармоники (формула (4.1)). При вычислении интегралов для A_1 и A_3 с учетом того, что $cos(3t)$ имеет 6 ветвей возрастания и убывания, шаг интегрирования возьмем равным $\tau = \pi/6$. В итоге получим:

$$f^{(1)}\left(x,h\right) \ = \ \frac{1}{6h}\cdot\{\sqrt{3}\left[f\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}h\right) \ - \ f\left(x-\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)\right]-2\ \left[f\left(x+h\right) \ - \ f\left(x-h\right)\right]+$$
$$+7\left[f\left(x+\frac{1}{2}h\right) \ - \ f\left(x-\frac{1}{2}h\right)\right]\}+\ O(h^4).$$

Заменим $h/2$ на h и выразим производную:

$$f^{(1)}(x,h) = \frac{1}{12h}\{\sqrt{3}\left[f\left(x+\sqrt{3}h\right) - f\left(x-\sqrt{3}h\right)\right] - 2\left[f(x+2h) - f(x-2h)\right] + \\ + 7\left[f(x+h) - f(x-h)\right]\} + O(h^4). \tag{4.8}$$

Учет в формуле (4.1) A_5 уменьшит погрешность аппроксимации на два порядка $(O(h^6))$, но приведет к более громоздким формулам.

Выполним проверку (4.8). Разложим по формуле Тейлора функции $f(x \pm h)$, $f(x \pm 2h)$ и $f(x \pm \sqrt{3}h)$. Полученные выражения подставим в (4.8) и после преобразования получим:

$$f^{(1)}(x) \approx \\ \approx \frac{1}{12h}[6hf^{(1)}(x) + 3h^3 f^{(3)}(x) - 8hf^{(1)}(x) - \frac{16}{3}h^3 f^{(3)}(x) + 14hf^{(1)}(x) + \frac{7}{3}h^3 f^{(3)}(x) + O(h^5)] = \\ = f^{(1)}(x) + O(h^4).$$

Таким образом, формула (4.8) справедлива с погрешностью $O(h^4)$.

При получении формулы для $f^{(2)}$ воспользуемся первым членом (4.2) и шаг интегрирования возьмем равный $\pi/4$ и тогда имеем:

$f^{(2)}(x,h) \approx \frac{4}{h^2}A_2$, где $A_2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x + h\cos t)\cos 2t dt$. При вычислении данного интеграла методом трапеций получим известную формулу [6 - 9]:

$$f^{(2)}(x,h) = \frac{1}{h^2}\left[f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)\right] + O(h^2).$$

Выражение для второй производной с погрешностью $O(h^4)$ имеет вид:

$$f^{(2)}(x,h) = \frac{1}{h^2}\left\{\begin{array}{l} -\frac{3}{2}\left[f(x+h) + f(x-h)\right] - 5f(x) + \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}\left[f\left(x + h\cos\frac{\pi}{8}\right) + f\left(x - h\cos\frac{\pi}{8}\right)\right] - \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\left[f\left(x + h\cos\frac{3\pi}{8}\right) + f\left(x - h\cos\frac{3\pi}{8}\right)\right] + \\ +4\left[f\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}h\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}f(x-h)\right] \end{array}\right\} + O(h^4).$$

Данное выражение можно видоизменить путем замены h на $h/2$.

Для третьей и четвертой производных с учетом выражений (4.3) и (4.4) получаются следующие выражения:

$$f^{(3)}(x,h) = \frac{1}{2h^3}\left\{\left[f(x+2h) - f(x-2h)\right] - 2\left[f(x+h) - f(x-h)\right]\right\} + O(h^2) \tag{4.9}$$

$$f^{(4)}(x,h) = \frac{3}{2h^4}\left[f(x+2h) - 2f\left(x+\sqrt{2}h\right) + 2f(x) - 2f\left(x-\sqrt{2}h\right) + f(x+2h)\right] + \\ + O(h^2).$$

При вычислении высших производных, используя формулу трапеций, учитывалось, что $cos(2t)$ имеет 4 ветви возрастания и убывания, $cos(3t)$ – 6, а $cos(4t)$ – 8 ветвей.

Проверим точность формулы для третьей производной. Воспользуемся теми же формулами, которые мы использовали при проверке выражения (4.8).

$$f^{(3)}(x) \approx \frac{1}{2h^3}\left[4hf^{(1)}(x) + \frac{8}{3}h^3 f^{(3)}(x) - 4hf^{(1)}(x) - \frac{16}{3}f'''(x) - \frac{2}{3}h^3 f^{(3)}(x) + O(h^5)\right] = \\ = f^{(3)}(x) + O(h^2)$$

П р и м е р 4.1. *Найдем* $f^{(4)}$ *для* $f = sinx$ *:*

$$(\sin x)^{(4)} \;=\; \frac{3}{h^4}\sin x\left[\cos(2h) - 2\cos(\sqrt{2}h) + 1\right] + O(h^2) \;=\; \left\langle \cos t \approx 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}\right\rangle = \\ = \frac{3\sin x}{h^4}\left(\frac{2}{3}h^4 - \frac{1}{3}h^4\right) + O(h^2) \;=\; \sin x \;+\; O(h^2)$$

Повысить точность высших производных на два порядка возможно путем учета высших гармоник функции (см. формулы (3.4), (4.1),(4.2)). Например, во второй производной необходимо учесть 4-ю гармонику, в третьей – пятую, в четвертой – шестую гармонику и так далее, следуя выше приведенному алгоритму.

Следует отметить, что наиболее простой и практичный вид имеет третья производная (4.9).

5. Экспериментальное исследование зависимости и ее производных

На практике при экспериментальном исследовании зависимости с помощью изучения высших гармоник (метод модуляционного Фурье анализа) необходимо учитывать измерительные шумы, определяемые соотношением “сигнал/шум”. В этом случае для оценки точности восстановления исходной зависимости и ее производных необходимо воспользоваться критерием сходимости рядов Фурье и Тейлора и в некоторых случаях большое число членов ряда нет необходимости учитывать.

Часто в эксперименте измеряемой зависимостью является напряжение U (эдс) возникающее на датчике, которое прямо пропорционально исследуемой зависимости или ее производной, например, вольтамперная характеристика (ВАХ) или дифференциальное сопротивление соответственно [1-7]. Учитывая сказанное, запишем: $U(x) = C \cdot f(x)$. В случае ВАХ $C = 1$, а $x = I$ (где I – сила тока). Коэффициенты Фурье A_m есть амплитуды гармоник напряжения, т.е. $A_m \equiv U_m(x_0, h)$ и $x_0 + h \cdot \cos t$ (x_0 – сила постоянного тока, h – амплитуда переменного тока и t – параметр определенный выше, т.е. $t = \omega\tau$). В этом случае экспериментально определенным напряжением U^* будет несинусоидальный периодический сигнал, который в основном определяется суммой:

$$U^*(t) = \frac{U_0^*}{2} + \sum_{m=1}^{N} U_m^* \cdot \cos(t).$$

Здесь N – число гармоник, для которых $|U_m^*| > \Delta U$, где ΔU – ошибка измерения.

Для оценки ошибки восстановления производной df/dx при отсутствии гистерезиса в зависимости $f(x)$ воспользуемся рядом Фурье (2.2) и рядом для производной (3.2) [3 - 5]. Будем считать, что df/dx - "истинная" производная исследуемой ("истинной") зависимости, определяемая рядом (3.2). Выражение df_*/dx является восстановленной производной, определяемой конечной суммой экспериментально определенных амплитуд $U_m^*(x_0, h)$:

$$\frac{df_*}{dx} = \frac{1}{h}\sum_{m=1}^{N}(-1)^{m-1}\cdot(2m-1)\cdot U_{2m-1}^*. \tag{5.1}$$

Ошибку оценим по формуле:

$$\left| h\cdot\frac{df}{dx} - \ h\cdot\frac{df_*}{dx}\right| < \delta U. \tag{5.2}$$

С учетом формул (3.2) и (5.1) выражение (5.2) с остаточным членом ряда (3.2) R_N примет вид:

$$\left|\sum_{m=1}^{N}(-1)^{m-1}(2m-1)\cdot A_{2m-1} + R_N - \sum_{m=1}^{N}(-1)^{m-1}(2m-1)\cdot U_{2m-1}^*\right| < \delta U. \tag{5.3}$$

Здесь δU – величина (некоторое напряжение), определяющая точность восстановления; N – число экспериментально определённых, нечётных гармоник напряжения U_k^*, ограниченное напряжением шумов $U_{\text{Ш}}$ и ошибкой измерения. Где $U_{\text{Ш}}$ – среднее квадратичное напряжение шумов. Пусть величина ΔU в целом (с учетом $U_{\text{Ш}}$) является ошибкой измерения напряжения U. Необходимо чтобы при всех $k \le N$, $U_k^* > \Delta U(U_{\text{Ш}})$. Остаток ряда (3.2) R_N очевидно равен $R_N = \sum\limits_{m=N+1}^{\infty}(-1)^{m-1}(2m-1)\cdot A_{2m-1}$.

Заметим, что при заданной ошибке измерения напряжения ΔU число наблюдаемых гармоник с амплитудой большей ошибки растет с ростом амплитуды модуляции и зависит от "степени нелинейности исходной зависимости". "Степень нелинейности" будем определять числом доминирующих членов ряда Тейлора зависимости f. Высокая степень нелинейности, т.е. когда у функции имеются резкие изменения, т.е. "скачки" или "выбросы" близкие к изломам и разрывам первого рода обуславливает медленную сходимость ряда. Более наглядно это можно объяснить тем, что резкие "выбросы" (изменения) у функции описываются высокими частотами гармоник Фурье или высокими степенями полинома. Наибольшая наблюдаемая частота (номер) гармоники или степень полинома будут фактически обратно пропорциональна ширине "выброса" или скачка.

Оценим теперь величину δU. Допустим, что ошибка измерения величин U_k^* для всех $k \le N$ имеет одинаковую величину ΔU, тогда:

$$\left|\sum_{m=1}^{N}(-1)^{m-1}(2m-1)\cdot A_{2m-1} + R_N - \sum_{m=1}^{N}(-1)^{m-1}(2m-1)\cdot U_{2m-1}^*\right| <$$
$$< \sum_{m=1}^{N}(2m-1)\left|A_{2m-1} - U_{2m-1}^*\right| \ + \ |R_N|\,.$$

Учитывая, что $|A_{2m-1} - U_{2m-1}^*| \le \Delta U$ для абсолютной ошибки получим:

$$\delta U_a \ = \left| h\cdot\frac{df}{dx} - \ h\cdot\frac{df_*}{dx}\right| < \Delta U\cdot\sum_{m=1}^{N}(2m-1) \ + \ |R_N| \ = \ N^2\cdot\Delta U + |R_N| \tag{5.4}$$

Среднеквадратичная ошибка будет равна:

$$\delta U_S \ = \ \sqrt{\sum_{m=1}^{N}(2m-1)^2\cdot\Delta U^2 \ + \ R_N^2} = \Delta U\cdot\sqrt{N(2N-1)(2N+1)/3 \ + \ \frac{R_N^2}{\Delta U^2}}.$$

Тогда точное значение $h\cdot(df/dx)$ находится в пределах:

$$h\cdot\frac{df_*}{dx} \ \pm \ \Delta U\sqrt{N(2N-1)(2N+1)/3+\frac{R_N^2}{\Delta U^2}} \tag{5.5}$$

Не определенным остается остаточный член R_N ряда. Величина остатка R_N зависит от дифференциальных свойств функции $f(x)$ [4, 5]. При определении производной df/dx мы предполагаем её существование. Если $f(x)$, кроме того, имеет d^2f/dx^2 удовлетворяющую условиям Дирихле [4, 5], то R_N легко оценить и он по модулю меньше, чем U_0/N т.е.: $|R_N| < U_0/N$. Здесь U_0 – некоторая положительная величина, оценку которой дадим ниже. Действительно, так как для абсолютной сходимости остатка R_N необходимо, чтобы истинные A_{2m-1} имели оценку: $|A_{2m-1}| < U_0/(2m-1)^3$. Т.е. мы получаем:

$$|R_N| = \left|\sum_{m=N+1}^{\infty}(-1)^{m-1}(2m-1)\cdot A_{2m-1}\right| < U_0\sum_{m=N+1}^{\infty}\frac{1}{m^2} < \frac{U_0}{N} \tag{5.6}$$

Более наглядно восстанавливаемая производная является непрерывной и имеет конечное число изломов. Если исследуемая зависимость $U(x)$ обладает гистерезисными свойствами оценка (5.6) не годится. В этом случае сама производная имеет разрывы первого рода.

За величину U_0 грубо можно взять максимальное по модулю значение из всего множества U^*_{2m-1} наблюдаемых гармоник ($U_0 = \max|U^*_{2m-1}|$), например, U^*_1 - амплитуду первой гармоники. Более точно в качестве U$_0$ можно взять $\max|U^*_{2m-1}|$ при $m > N$, т.е. максимальный модуль отбрасываемых амплитуд гармоник, например, $|U^*_{2N+1}|$ – модуль первой из отбрасываемых гармоник или ошибку ΔU измерения амплитуды гармоники. Тогда среднеквадратичная ошибка восстановления будет равна:

$$\delta U_S \ = \ \left.\left(\Delta U\sqrt{N(2N-1)(2N+1)/3+\frac{1}{N^2}}\right)\right|_{N>>1} \propto \Delta U\cdot N^{3/2} \tag{5.7}$$

Абсолютная ошибка определится по формуле: $\delta U_a = (N^2+1/N)\cdot\Delta U$. Среднеквадратичная ошибка восстановления δU растет с ростом N как $N^{3/2}$. Поэтому при некотором значении N$_{\text{кр}}$ величина δU будет сравнима с восстанавливаемой производной $(\delta U \approx h\cdot(dU/dx))$. Критическое число амплитуд гармоник $N_{\text{кр}}$ можно оценить следующим образом:

$$h\frac{df}{dx} = \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\cdot(2m-1)\cdot A_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\infty}(2m-1)\cdot|A_{2m-1}| \approx$$

$$\approx A_*\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}A_* \approx U^*.$$

Значит, используя формулу (5.7) получим:

$$N_{\text{кр}} \ = \ \sqrt[3]{\left(\frac{U^*}{\Delta U}\right)^2}. \tag{5.8}$$

Например, при 10% точности измерений $N_{\text{кр}} = 5$, т.е. учет в формуле (5.1) 9-ой гармоники будет критическим.

В общем случае если $m+1$ производная будет удовлетворять условиям Дирихле, то остаток ряда будет оцениваться: $|R_N| \propto U_0/N^m$. Здесь показатель степени $m > 2$. В этом случае коэффициенты Фурье убывают очень быстро.

При восстановлении самой исследуемой зависимости f получается следующая оценка:

$$\delta U = \sqrt{(N+1)\,\Delta u^2 + [U_0/\,(2N)]^2};$$

Для второй производной исследуемой зависимости d^2f/dx^2 имеем:

$$\delta U = \sqrt{(8/15)N(N+1)(2N+1)(3N^2+3N-1)\cdot\Delta u^2 + [U_0/(2N^2)]^2}.$$

Отметим, что при восстановлении исследуемой зависимости предполагалось существование ее производной, а при восстановлении второй производной исследуемой зависимости предполагалось существование 3ей производной удовлетворяющих условиям Дирихле, соответственно.

Список литературы

1. Солимар Л. Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение// М.: Мир – 1974 – 428с.

2. Кузьмичев Н.Д. Поведение намагниченности поликристаллических образцов $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в слабых магнитных полях// Письма в ЖТФ – 1991 – Т. 17, Вып. 7 – С. 56-60.

3. Кузьмичев Н.Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников// ЖТФ – 1994 – Т. 64, Вып. 12 – С. 63-74.

4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т.// М.: Наука – 1970 – Т. 2 – 800 с.

5. Смирнов В.И. Курс высшей математики.// М.: Наука – 1974 – Т. 2 – 656 с.

6. Кузьмичев Н.Д. Модуляционная методика восстановления исходных зависимостей и их производных в случае произвольных амплитуд модуляции// Письма в ЖТФ – 1994 – Т. 20, Вып. 22 – С. 39-43.

7. Кузьмичев Н.Д. Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных// ЖТФ – 1997 – Вып.37. №7 – С. 124-127.

8. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов, 2-е изд., перераб. и доп.// М.: ФИЗМАТЛИТ – 2005. – 304 с.

9. Пирумов У.Г. Численные методы.// М.: Дрофа – 2003 – 224 с.

10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы.// М.: Наука – 1989 – 421 с.

Application of the Taylor-Fourier series for numerical and experimental calculation of investigation dependance derivatives.

© N. D. Kuzmichev[2]

Abstract. Found the formulas for Fourier series coefficient of function expanding Taylor serie and formulas for numerical and experimental calculation of derivatives with help Fourier series coefficients.
Key Words: modulation Fourier analysis, Taylor-Fourier series, numerical differentiation, experimental founding of derivatives, precision of calculation.

[2]Head of sub-department of general scientific disciplines, Mordovian State Univercity after N.P. Ogarev, Saransk; kuzmichevnd@yandex.ru.