УДК 519.6:517.962

Итерационные процессы для состояний с разрывными коэффициентами и решениями в задачах оптимального управления квазилинейными уравнениями

© Ф.В. Лубышев[1], М.Э. Файрузов[2], Г.Я. Галеева[3]

Аннотация. Разработан итерационный процесс для состояний управляемых процессов, описываемых нелинейными уравнениями с разрывными коэффициентами и решением в неоднородных анизотропных средах с итерациями на границе разрыва решения и коэффициентов. Исследован вопрос о сходимости итерационного процесса.

Ключевые слова: итерационный метод, оптимальное управление, эллиптическое уравнение, оператор, разностная аппроксимация.

1. Введение

В данной работе рассматриваются граничные задачи для квазилинейных уравнений эллиптического типа в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решением. Подобные задачи для состояний управляемых процессов возникают при математическом моделировании и оптимизации процессов теплопередачи, диффузии, фильтрации, теории упругости и др.

На практике, при математическом моделировании тепловых процессов в сложных конструкциях, возникает следующая характерная ситуация. Среда неоднородная, анизотропная, многослойная, и коэффициенты уравнений, описывающих процесс распределения тепла, являются разрывными функциями. В таких телах (средах) теплопередача между слоями в многослойных средах происходит зачастую за счет контактного теплообмена. При математическом моделировании подобных процессов на контактных границах S_k ставятся, так называемые условия сопряжения. В связи с развитием высокотемпературной теплофизики задачи с граничными условиями сопряжения приобрели первостепенное значение – расчет многослойных теплоизоляционных покрытий в металлургии, авиационной и космической технике, расчет многослойных покрытий головок ракет, элементов преобразователей энергии и т.д. Если тепловой контакт между средами (телами) Ω_1 и Ω_2, так называемый, – идеальный, то температуры и тепловые потоки на контактирующих поверхностях в обоих телах совпадают. Такая ситуация характерна, например, когда тела Ω_1 и Ω_2 тесно прижаты, например, в спаях. Следует заметить, однако, что такие условия не являются единственно возможными условиями на поверхности S контакта тел Ω_1 и Ω_2. Возможны и другие модели контакта. В прикладных исследованиях большое внимание заслуживают условия на S, так называемого, неидеального контакта сред. К задаче с условиями сопряжения такого вида приводит, например, задача о моделировании процесса распределения температуры в тонком стержне $0 \le x \le l$, имеющем при $x = \xi$, $\xi \in (0, l)$ разрез с теплоизоляционными свойствами. В реальных конструкциях тепловой контакт между соприкасающимися средами, например, деталями обычно нельзя считать

[1]профессор кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; v.lubyshev@mail.ru.

[2]доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

[3]доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; lara_wood@mail.ru.

идеальным. Такой случай реализуется, например, при недостаточно плотном соприкосновении шероховатых твердых тел. При неидеальном тепловом контакте тепловой поток непрерывен, что является отражением закона сохранения энергии, однако при неидеальном тепловом контакте в условиях сопряжения идеального контакта нарушается равенство температур на S. Если поверхность контакта не является идеальным проводником, то должно учитываться термическое сопротивление контакта (контактное тепловое сопротивление). Температура при переходе границы неидеального контакта S терпит разрыв, пропорциональный тепловому потоку с коэффициентом, равным контактному тепловому сопротивлению.

Различие температур соприкасающихся поверхностей оказывается пропорциональным контактному термическому сопротивлению (обратно пропорционально контактной тепловой проводимости), которая количественно характеризуется коэффициентом θ_k. Так что в случае неидеального теплового контакта условия идеального контакта на контактной границе S заменяются следующими условиями

$$\frac{\partial u_1}{\partial N_S} = \frac{\partial u_2}{\partial N_S} = \theta_k[u] = \theta_k(u_2(x) - u_1(x)), \qquad x \in S; \tag{1.1}$$

где $\theta_k > 0$ – коэффициент контактной проводимости (коэффициент контактного теплообмена). Коэффициент контактного теплообмена, связанный с условиями контакта на S, зависит от большого числа факторов. Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть между двумя анизотропными телами с коэффициентами теплопроводности $k_\alpha^{(1)}(x)$ и $k_\alpha^{(2)}(x)$ помещена тонкая слабо проводящая прослойка. В этом случае условия контакта могут быть описаны соотношениями (1.1), где величина θ_k пропорциональна коэффициенту теплопроводности тонкой слабо проводящей прослойки. Из условий (1.1) следует, что в случае неидеального контакта равенство тепловых потоков имеет место, т.е. тепловой поток на поверхности контакта S между телами Ω_1 и Ω_2 непрерывен, а температура разрывна (разрыв первого рода по температуре), т.е. появляется пропорциональная тепловым потокам разность между двумя поверхностными температурами. Таким образом, контактирующие тела на поверхности контакта S имеют различную температуру, скачек который пропорционален тепловому потоку с коэффициентом пропорциональности θ_k^{-1} – коэффициентом контактного теплового сопротивления (θ_k – контактная проводимость).

Исследование контактных задач теплообмена является актуальным по сегодняшний день. К числу важных для практики задач следует отнести, например, задачу определения (идентификации) контактных тепловых сопротивлений, характеризующих теплопередачу между соприкасающимися частями конструкций (болтовых и заклепочных соединений, разъемов, шарниров и т.д.). В конструкциях на клеях роль контактного сопротивления играет некоторое эффективное тепловое сопротивление клеевой пленки. Для решения таких задач можно эффективно применять и развивать методы теории оптимального управления для уравнений математической физики, методы теории обратных задач для УМФ.

Рассмотрим для примера двухслойную плоскопараллельную пластинку. Запишем условия сопряжения слоев

$$k_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} = k_2(x)\frac{\partial u_2}{\partial x}, \qquad k_1(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} = \theta_k[u],$$

где $k_1(x)$ и $k_2(x)$ – коэффициенты теплопроводности слоев, $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – температуры слоев, $[u] = u_2(x) - u_1(x)$ – скачок температуры на границе слоев; θ_k^{-1} – тепловое контактное сопротивление. Величина $r_k = \theta_k^{-1}$ может рассматриваться, например, как константа, или, в общем случае, как функция переменных x, u (как функция точки и температуры) и эта зависимость определяется из решения соответствующей задачи оптимального управления, или из решения обратной задачи теплопроводности по результатам измерения температур в отдельных точках слоев.

Задачи для уравнений математической физики (УМФ) с условиями неидеального контакта часто возникают также при моделировании различных процессов в механике сплошных сред, теории упругости и др. По поводу физической интерпретации задач о сопряжении с условиями неидеального контакта добавим следующее. На практике при математическом моделировании процессов в неоднородных средах довольно часто возникает вопрос о необходимости решения задач УМФ в сложных областях, представляющих собой современные конструкции (сооружения) различного назначения и содержащих тонкие включения с физическими характеристиками, резко отличающимися от основной среды. Например, это могут быть как было отмечено выше слабо теплопроводящие элементы (элементы с теплоизоляционными свойствами), а также, например, при моделировании процессов фильтрации, могут встречаться слабо проницаемые элементы (тонкие слабо проницаемые включения), толщины которых существенно меньше характерных размеров рассматриваемых объектов.

При математическом моделировании фильтрационных процессов (напорной фильтрации), например, при создании в руслах рек гравитационных плотин, расположенных на фильтрующем упругом основании, важно учесть, что в активизации фильтрационных процессов в основании гравитационных плотин имеют, часто встречающиеся в основании плотин, тонкие слабо проницаемые включения: прослойки слабо проницаемых грунтов, цементационные завесы, шпунты. Считая такие включения бесконечно тонкими и слабо проницаемыми их влияние на исследуемый физический процесс можно учесть заданием условий сопряжения на тонких включениях S с помощью соотношений:

$$g(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^{-} = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^{+} = \theta(x)[u], \qquad x \in S,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^{\pm} = \left(\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\cos(n,\hat{x}_\alpha)\right)^{\pm},$$

$$[u] = u_2(x) - u_1(x) = u^+(x) - u^-(x) - \text{ скачек функции } u(x) \text{ на } S;$$

где $g(x)$ – заранее неизвестный поток теплоты или вещества через элементарную площадку; $\theta(x) \geq \theta_0 > 0$ – заданная функция, $S = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2$ – тонкое включение, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, Ω_1 и Ω_2 – некоторые области.

Численная решение таких задач, описывающих состояния управляемых процессов представляет значительные трудности и прежде всего в связи с необходимостью дискретизации указанных областей.

Важнейшей проблемой является разработка высокоточных экономичных алгоритмов дискретизации таких задач для состояний с разрывными коэффициентами и решениями, в том числе разработка экономичных, сходящихся итерационных методов их реализации.

2. Постановки задач для состояния процессов управления с разрывными коэффициентами и решениями. Задача А

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная открытая связная область пространства $\mathbb{R}^2$ с Липшицевой границей $\partial\Omega$. И пусть Ω разделена некоторой достаточно гладкой ориентированной кривой S (внутренней границей S) на две части (на подобласти) $\Omega_1 = \Omega^-$ и $\Omega_2 = \Omega^+$ (левую и правую, т.е. Ω^- – слева от S и Ω^+ – справа от S) с границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ соответственно,удовлетворяющими тому же условию Липшица. На кривой S выбрана ориентация и в соответствии с ней будем говорить о S^+ – ”положительной” стороне поверхности S и S^- – ”отрицательной” стороне поверхности S. Предполагается (для формулировки условий на поверхности S, см. ниже), что к поверхности S со стороны S^+ примыкает область $\Omega_2 = \Omega^+$, а со стороны S^- примыкает область $\Omega_1 = \Omega^-$. Таким образом, Ω есть объединение областей Ω_1 Ω_2 и внутренних точек контактной границы $\overline{S}$: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω (в отличие от S – внутренней границы области Ω. Очевидно, что $\partial\Omega = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus S$. Будем считать, что $\partial\Omega_1 = \overline{\Gamma}_1 \cup S$, $\partial\Omega_2 = \overline{\Gamma}_2 \cup S$, где части (куски) Γ_k, $k = 1, 2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$ ($\overline{\Gamma}_k$ – оставшаяся часть $\partial\Omega_k$ после вычета S, $k = 1, 2$, т.е. $\overline{\Gamma}_k$ – границы областей Ω_k без S), $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega \equiv \Gamma$.

Через n_α, $\alpha = 1, 2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области $\partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Пусть, далее $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1, т.е. нормаль n направлена внутрь области Ω_2 ($n = n(x)$ – единичный вектор нормали к S, согласованный с выбранной ориентацией на S).

Заметим, что поскольку, векторы $n_1(x)$ и $n_2(x)$, $x \in S$ противоположно ориентированы на S, то $n(x) = n_1(x) = -n_2(x)$ на S.

Заметим также, так как границы $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ областей Ω и Ω_k, $k = 1, 2$ по предположению Липшицевы, то в каждой точке $x \in \partial\Omega$ и $x \in \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ (за исключением, возможно, конечного числа точек) определены единичные векторы внешних нормалей, например, нормаль $n = (n_{x_1}, n_{x_2})$, где n_{x_1} и n_{x_2} – координаты вектора n. Так что вектор внешней нормали существует почти везде на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$. В дальнейшем на кусках $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границ $\partial\Omega_k$ положительной меры $\mathrm{mes}\Omega_k > 0$, $k = 1, 2$ будут заданы граничные условия определенного типа.

Рассмотрим следующую краевую задачу в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух частей (подобластей) Ω_1 и Ω_2, разбитой на две части внутренней границей S.

Задача А. Требуется найти функции $u(x)$ вида: $u(x) = u_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1 = \overline{\Omega}_-$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}_+$, где функция $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) Ищется функция $u_1(x)$, определенная на $\overline{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \partial\Omega_1$, удовлетворяющая в Ω_1 уравнению

$$L_1 u_1 = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha^{(1)}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} \right) + d_1(x) q_1(u_1) = f_1(x), \qquad \text{в } \Omega_1, \tag{2.1}$$

а на границе $\partial\Omega_1 \setminus S = \overline{\Gamma}_1$ условию

$$u_1(x) = 0, \qquad x \in \overline{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1 \setminus S; \tag{2.2}$$

2) Ищется функция $u_2(x)$, определенная на $\overline{\Omega}_2 = \Omega_2 \cup \partial\Omega_2$, удовлетворяющая в Ω_2 уравнению

$$L_2 u_2 = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha^{(2)}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha} \right) + d_2(x) q_2(u_2) = f_2(x), \qquad \text{в } \Omega_2, \tag{2.3}$$

а на границе $\partial\Omega_2 \setminus S = \overline{\Gamma}_2$ условию

$$u_2(x) = 0, \qquad x \in \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2 \setminus S. \tag{2.4}$$

Здесь $k_\alpha^{(1)}(x)$, $k_\alpha^{(2)}(x)$, $d_\alpha(x)$, $f_\alpha(x)$, $q_\alpha(\xi)$, $\alpha = 1,2$ – некоторые заданные функции, определенные в соответствующих областях Ω_α по разному, причем

$$k_\alpha^{(1)}(x) \neq k_\alpha^{(2)}(x), \quad d_1(x) \neq d_2(x), \quad f_1(x) \neq f_2(x), \quad q_1(\xi) \neq q_2(\xi), \quad x \in S; \qquad (2.5)$$

эти функции наделены в областях Ω_α некоторыми условиями гладкости (см. далее).

3) Искомые функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют еще дополнительным условиям на S, позволяющим "сшить" решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль S областей Ω_1 и Ω_2:

$$g(x) = \frac{\partial u_1}{\partial N_S} = \frac{\partial u_2}{\partial N_S} = \theta(x)(u_2 - u_1), \qquad x \in S. \qquad (2.6)$$

Здесь

$$\frac{\partial u_p}{\partial N_S} = \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(p)}(x) \frac{\partial u_p}{\partial x_\alpha} \cos(n, \hat{x}_\alpha), \qquad p = 1,2.- \qquad (2.7)$$

– конормальная производная, а $\theta(x) \geq \theta_0 > 0$; n – нормаль к S, направленная внутрь области Ω_2 (n – внешняя нормаль к границе области Ω_1).

Поставленную задачу (2.1)-(2.7) назовем задачей A.

Задачу A можно переписать в удобном (компактном) виде. Рассмотрим функцию вида

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \overline{\Omega}_1, \\ u_2(x), & x \in \overline{\Omega}_2; \end{cases}$$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x), q(\xi) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), q_1(\xi), & x \in \overline{\Omega}_1, \\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), q_2(\xi), & x \in \overline{\Omega}_2, \end{cases} \quad \alpha = 1,2,$$

где $k_\alpha^{(k)}(x)$, $\alpha = 1,2$, $d_k(x)$, $f_k(x)$, $q_k(\xi)$ достаточно гладкие в соответствующих областях Ω_1 и Ω_2 функции, задаваемые в Ω_k по разному. Здесь u_k, $k = 1,2$ – сужение функции $u(x)$ на Ω_k, $k = 1,2$.

Тогда поставленную выше задачу A с разрывным решением на S (задачу о сопряжении с разрывным решением) можно сформулировать в следующем, более компактном виде.

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 уравнению

$$Lu(x) \equiv -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + d(x)q(u) = f(x), \qquad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

граничным условиям на внешней границе $\partial\Omega$

$$u(x) = 0, \qquad x \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = (\partial\Omega_1 \setminus S) \cup (\partial\Omega_2 \setminus S),$$

и условиям сопряжения на внутренней границе S (на границе раздела областей Ω_1 и Ω_2)

$$g(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^- = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^+ = \theta(x)[u], \qquad x \in S,$$

где

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^\pm = \left(\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\cos(n, \hat{x}_\alpha)\right)^\pm,$$

$$[u] = u_2 - u_1 = u^+ - u^- - \text{скачек функции } u(x) \text{ на } S;$$

Знаки "+", "-" обозначают, что значения соответствующих функций берутся по различные стороны границы раздела S областей Ω_1 и Ω_2, т.е. знак "+" обозначает, что значение функции берется на S в точке $x \in \overline{\Omega}_2$, а "-" – в точке $x \in \overline{\Omega}_1$.

Квадратные скобки обозначают разность величины в них заключающейся, взятой на правом и левом "берегах" контактной границы S. Так что индекс "+" обозначает значение величины с правого "берега" контактной границы. Если быть более точным, то $[u(x)]|_S$ – символ, обозначающий разность между u^+ и u^- – правым и левым предельными значениями функции $u(x)$ на кривой S, вычисленными при подходе к точке $x \in S$ со стороны области Ω_2 и со стороны области Ω_1:

$$[u(x)]|_S \equiv u(x)|_{x \to S-0} - u(x)|_{x \to S+0},$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial N_S}\right]\bigg|_S \equiv \frac{\partial u}{\partial N_S}\bigg|_{x \to S-0} - \frac{\partial u}{\partial N_S}\bigg|_{x \to S+0}.$$

То есть это обычное обозначение для скачка функции на S, где $u^+(x)$, $x \in S$ означает значение (след) функции $u(x)$ в точке x на границе S со стороны Ω_2, а $u^-(x)$, $x \in S$ – значение (след) функции $u(x)$ в точке x на S со стороны Ω_1 (предельные значения $u(x)$ на кривой S с разных сторон от S: $[u] \equiv u^+(x) - u^-(x)$, $x \in S$, где $u^\pm(x) = \lim u(x')$, $x' \to x \in S$, $x' \in \Omega^\pm$).

Так как, по предположению, границы $\partial\Omega_k$ областей Ω_k Липшицевы, то оператор сужения $u^\pm \to u^\pm|_S$ из $W_2^1(\Omega^\pm)$ в $L_2(S)$ непрерывен; здесь $\Omega^+ = \Omega_2$, $\Omega^- = \Omega_1$.

Далее, так как коэффициенты $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $d(x)$, правая часть $f(x)$ задаются, вообще говоря, по разному в Ω_1 и Ω_2, то эти функции, вообще говоря, претерпевают разрыв первого рода в области Ω на кривой $S \subset \overline{\Omega}$.

Разрывность коэффициента $k_\alpha(x)$ уравнения соответствует тому, что среда (область Ω) является неоднородной и составлена из двух (в нашем случае) разнородных по своим физическим характеристикам материалов (область Ω состоит из частей с разными свойствами).

Так как функции $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $d(x)$, $f(x)$ (по предположению) имеют на S разрыв первого рода, то это означает, что

$$[k_\alpha(x)]|_S = k_\alpha^{(2)}(x)\big|_S - k_\alpha^{(1)}(x)\big|_S = k_\alpha^+(x) - k_\alpha^-(x) \neq 0, \tag{2.8}$$

$$[d(x)]|_S = d_2(x)|_S - d_1(x)|_S = d^+(x) - d^-(x) \neq 0,$$

$$[f(x)]|_S = f_2(x)|_S - f_1(x)|_S = f^+(x) - f^-(x) \neq 0.$$

Из условия (2.8) и условий (2.5), (2.6)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^- = \frac{\partial u_1}{\partial N_S} = \frac{\partial u_2}{\partial N_S} = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S}\right)^+, \qquad x \in S, \tag{2.9}$$

следует, что (2.8) предписывает скачек первых производных при переходе через S, т.е. первые производные решения $u(x)$ имеют разрывы первого рода на S. В то же время, в силу (2.9),

$$\left[\frac{\partial u}{\partial N_S}\right] = 0, \qquad x \in S - \text{ скачек функции } \frac{\partial u}{\partial N_S} \text{ на } S \text{ равен нулю,}$$

то есть условие (2.9) – требование непрерывности конормальной производной (непрерывность потока).

Заметим, что если бы наряду с (2.9) было задано условие

$$[u]=0, \qquad x\in S - \text{ скачек функции на } S \text{ равен нулю}$$

(вместо условия (2.6)), то это условие означало бы, что оно требует непрерывности решения задачи на кривой S. Так что разрыв в коэффициентах $k_\alpha(x)$ в уравнении в этом случае означал бы, что решение $u(x)$ задачи имеет слабый разрыв на кривой S (т.е. функция $u(x)$ непрерывна на S, а ее первые производные имеют разрывы первого рода на контактной кривой S.

Краевая задача А с разрывными коэффициентами и решением, может описывать, например, состояние управляемого процесса, когда в роли управления выступает, например, правая часть $f_1(x)\equiv g(x)\in U$ уравнения (2.1), причем в роли множетсва допустимых управлений U выступает

$$U=\left\{f_1(x)=g(x)\in L_2(\Omega_1): \xi_1\le g(x)\le \overline{\xi}_1 \text{ п.в. на } \Omega_1\right\},$$

где ξ_1 и ξ_2 – заданные константы, п.в. – почти всюду, а в качестве функционала цели $g\to J(g)$, $g\in U$ выступает, например, следующий функционал

$$J(f_1)=J(g)=\int\limits_{\Omega_2}|u(x,g)-u_0(x)|^2 d\Omega_2.$$

Здесь $u_0(x)\in L_2(\Omega_2)$ – заданная функция, а $u(x,g)$ – решение задачи А, отвечающее допустимому управлению.

Введем в рассмотрение пространство $H(\Omega_0)$, $\Omega_1\cup\Omega_2=\Omega_0$ пар функций $u(x)=(u_1(x),u_2(x))$:

$$H(\Omega_0)=\left\{u=(u_1(x),u_2(x))\in W_2^1(\Omega_1)\times W_2^1(\Omega_2)\right\},$$

то есть

$$\left\{\begin{array}{l} u(x)\in H(\Omega_0)\Leftrightarrow u_1\equiv u\big|_{\Omega_1}\in W_2^1(\Omega_1),\\ u(x)\in H(\Omega_0)\Leftrightarrow u_2\equiv u\big|_{\Omega_2}\in W_2^1(\Omega_2).\end{array}\right.$$

Здесь $W_2^1(\Omega_k)$, $k=1,2$ – Соболевское пространство функций, заданных в подобластях Ω_k, $k=1,2$ с границей $\partial\Omega_k$, $k=1,2$ и нормой [1]-[3]

$$\|u_k\|_{W_2^1(\Omega_k)}=\int\limits_{\Omega_k}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2+u_k^2\right]d\Omega_k, \qquad k=1,2.$$

Снабженное скалярным произведением

$$(u,v)_H=\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}(\mathrm{grad}u_k\cdot\mathrm{grad}v_k+u_kv_k)\,d\Omega_k=\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}+u_kv_k\right]d\Omega_k,$$

$$u(x),v(x)=\left\{\begin{array}{ll} u_1(x),v_1(x), & x\in\Omega_1,\\ u_2(x),v_2(x), & x\in\Omega_2,\end{array}\right.$$

и нормой

$$\|u\|_H^2=\|u_1\|^2_{W_2^1(\Omega_1)}+\|u_2\|^2_{W_2^1(\Omega_2)}=\sum_{k=1}^{2}\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)},$$

$H=H(\Omega_0)$ является гильбертовым пространством.

В гильбертовом пространстве $H(\Omega_0)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение и норму:

$$(u,v)_* = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k} \mathrm{grad}u_k\cdot \mathrm{grad}v_k d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_k} u_k v_k d\Gamma_k + \int\limits_{S}[u][v]dS =$$

$$\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha}d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_k} u_k v_k d\Gamma_k + \int\limits_{S}[u][v]dS,$$

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k + \int\limits_{S}[u]^2 dS. \tag{2.10}$$

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$ содержит свои предельные точки. Через $W_2^1(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи (в окрестности) $\overset{\circ}{\Gamma}_k\subset\partial\Omega_k$, $k=1,2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k=1,2$. Под участками $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$ понимаются куски границы $\partial\Omega_k$; естественно, мы не рассматриваем случай, когда какой-либо из участков $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ вырождается в точку и т.п.; $W_2^1(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k)$ совпадает с $W_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k=\emptyset$; $W_2^1(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k)=\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k=\partial\Omega_k$.

Заметим, что для элементов $u_k(x)\in W_2^1(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k)$ справедливо неравенство [3]

$$\int\limits_{\Omega_k} u_k^2(x)\,d\Omega_k \le C_{\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k, \qquad k=1,2.$$

с постоянной $C_{\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k}$, зависящей только от Ω_k и $\overset{\circ}{\Gamma}_k$, при этом "площадь" куска $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ поверхности $\partial\Omega_k$ должна быть положительной: $\mathrm{mes}\,\overset{\circ}{\Gamma}_k>0$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{H}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$ пар функций $u(x)=(u_1(x),u_2(x))$:

$$\overset{\circ}{H}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0) = \left\{u=(u_1(x),u_2(x))\in W_2^1(\Omega_1;\Gamma_1)\times W_2^1(\Omega_2;\Gamma_2)\right\}$$

с нормой (2.10):

$$\|u\|^2_{\overset{\circ}{H}_{\Gamma_1,\gamma_2}} = \|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \int [u]^2 dS.$$

О п р е д е л е н и е 2.1. *Обобщенным решением задачи A будем называть такую функцию* $u(x)\in\overset{\circ}{H}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$, *которая удовлетворяет интегральному тождеству*

$$Q(u,v) = \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + d(x)q(u)v\right]d\Omega_0 + \int\limits_{S}\theta(x)[u][v]\,dS =$$

$$= \int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2} f(x)v\,d\Omega_0 = l(v), \qquad \forall v\in\overset{\circ}{H}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0). \tag{2.11}$$

В дальнейшем, относительно заданных функций будем предполагать:

$$\begin{array}{l} k_\alpha(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2), \qquad 0 < \nu \le k_\alpha(x) \le \overline{\nu}, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2; \\ d(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2), \qquad 0 < d_0 \le d(x) \le \overline{d}_0, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2; \\ \theta(x) \in L_\infty(S), \qquad 0 < \theta_0 \le \theta(x) \le \overline{\theta}_0, \quad x \in S; \\ f(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2); \end{array} \tag{2.12}$$

функция $q_\alpha(\xi)$ определена на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям:

$$q_\alpha(0) = 0, \quad 0 \le q_0 \le \big[q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2)\big]/(\xi_1 - \xi_2) \le L_q < \infty \quad \text{для всех } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \xi_1 \ne \xi_2. \tag{2.13}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (2.12)-(2.13). *Тогда существует единственное обобщенное решение* $u(x) \in \overset{\circ}{H}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$ *задачи A в смысле определения 2.1. Задача о нахождении обобщенного решения из* (2.11) *эквивалентна решению операторного уравнения*

$$Au = F,$$

где оператор A *определяется на* $\overset{\circ}{H}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$ *билинейной формой* $Q(u,v)$ *с помощью равенства*

$$\big(Au, v\big)_{\overset{\circ}{H}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = Q(u,v), \qquad \forall u, v \in \overset{\circ}{H}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0),$$

а правая часть $F \in \overset{\circ}{H}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$ *определяется соотношением*

$$\big(F, v\big)_{\overset{\circ}{H}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} = l(v), \qquad \forall u, v \in \overset{\circ}{H}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0),$$

причем справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}_{\Gamma_1,\Gamma_2}} \le C \sum_{k=1}^{2} \|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}.$$

3. Итерационный процесс для задачи A о сопряжении с разрывными коэффициентами и решением с итерациями на внутренней границе разрыва решения и его сходимость

Рассмотрим граничную задачу A с разрывными коэффициентами и решением (2.1)-(2.7). Оказывается численное решение граничных задач подобного типа можно эффективно осуществлять с применением итерационных методов, а именно, итераций на границе S разрыва решения, в сочетании с разностным методом и методом конечных элементов [4], [5] в отдельности в каждой из областей Ω_1 и Ω_2.

В данном пункте остановимся на вопросах о построении итерационного процесса с итерациями на границе $S \subset \Omega$ разрыва решения задачи A и обосновании сходимости процесса итераций.

Задаче (2.1)-(2.7) поставим в соответствие следующий итерационный процесс с итерациями на внутренней границе S:

$$L_1 u_1^n = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial u_1^n}{\partial x_\alpha}\right) + d_1(x) q_1(u_1^n) = f_1(x), \qquad x \in \Omega_1, \tag{3.1}$$

$$u_1^n = 0, \qquad x \in \overline{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1 \setminus S, \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u_1^n}{\partial N_{\partial\Omega_1}} = \frac{\partial u_1^n}{\partial N_S} = \theta(x)\big[u_2^{n-1}(x) - u_1^n(x)\big], \qquad x \in S; \tag{3.3}$$

$$L_2 u_2^n = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial u_2^n}{\partial x_\alpha}\right) + d_2(x) q_2(u_2^n) = f_2(x), \qquad x \in \Omega_2, \tag{3.4}$$

$$u_2^n = 0, \qquad x \in \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2 \setminus S, \tag{3.5}$$

$$-\frac{\partial u_2^n}{\partial N_{\partial\Omega_2}} = \frac{\partial u_2^n}{\partial N_S} = \theta(x)\big[u_2^n(x) - u_1^n(x)\big], \qquad x \in S; n = 1, 2, ..., \tag{3.6}$$

где $u_2^0(x)$ – начальное приближение, например, $u_2^0(x) = 0$ на S.

Таким образом, итерационный процесс (3.1)-(3.6) сводит решение исходной граничной задачи A с разрывным решением к решению на каждой итерации n двух граничных задач (3.1)-(3.3) и (3.4)-(3.6) в подобластях Ω_1 и Ω_2 соответственно.

В обобщенной постановке итерационный процесс относительно функций $u_1^n(x)$ и $u_2^n(x)$ состоит в отыскании последовательности пар функций $\{u^n(x)\} = \big\{(u_1^n(x), u_2^n(x))\big\}_{n=1}^{\infty}$ таких, что $u_k^n(x) \in W_2^1(\Omega_k; \Gamma_k)$, $k = 1, 2$ и которые удовлетворяют интегральным тождествам:

$$\int\limits_{\Omega_1} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(1)} \frac{\partial u_1^n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} + d_1(x) q(u_1^n) v_1\right] d\Omega_1 + \int\limits_S \theta(x) u_1^n v_1 \, d\gamma =$$

$$= \int\limits_S \theta(x) u_2^{n-1} v_1 d\gamma + \int\limits_{\Omega_1} f_1(x) v_1 d\Omega_1, \qquad \forall v_1(x) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1), \tag{3.7}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha^{(2)} \frac{\partial u_2^n}{\partial x_\alpha}\frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} + d_2(x) q(u_2^n) v_2\right] d\Omega_2 + \int\limits_S \theta(x) u_2^n v_2 \, d\gamma =$$

$$= \int\limits_S \theta(x) u_1^n v_2 d\gamma + \int\limits_{\Omega_2} f_2(x) v_2 d\Omega_2, \qquad \forall v_2(x) \in W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2); \tag{3.8}$$

$n = 1, 2, \ldots;$ $u_2^0(x)$ – начальное приближение (например, $u_2^0(x) = 0$ на S).

Используя теорию монотонных операторов [8] можно установить однозначную разрешимость задач (3.7)-(3.8) относительно функций $u_1^n(x)$ и $u_2^n(x)$ в классах $W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1)$ и $W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)$ (при каждом фиксированном номере n) соответственно.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (2.12), (2.13). *Тогда, если выполнено условие*

$$4C^2 \big\|\theta(x)\big\|_{L_\infty(S)}^2 < 1, \tag{3.9}$$

где $C = const > 0$ – некоторая константа, то итерационный процесс (3.1)-(3.6) *сходится в норме $\|\cdot\|_H$ (а значит и в норме* (2.10) *в силу их эквивалентности) к единственному решению задачи A при любом начальном приближении $u_2^0(x) \in W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)$ и справедлива оценка скорости сходимости*

$$\big\|z^n\big\|_H = \Big(\|z_1^n\|_{W_2^1(\Omega_1)} + \|z_2^n\|_{W_2^1(\Omega_2)}\Big)^{1/2} \le q^n \|z_2^0\|_{W_2^1(\Omega_2)}, \tag{3.10}$$

где

$$0 < q = \left(\frac{2C^2\|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}^2}{1 - 2C^2\|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}^2}\right)^{1/2} < 1. \tag{3.11}$$

Используя полученные результаты, построены и исследованы разностные аппроксимации задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решением. Настоящая работа примыкает и развивает результаты [6]-[9].

Список литературы

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. - 334с.
2. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. - 575с.
3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. - 407с.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. - 614с.
5. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. - 350с.
6. Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Уфа: БашГУ, 1999. - 244с.
7. Лубышев Ф.В. Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах // Доклады РАН. 1996. Т.349. №5. С.598-602.
8. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах // Журнал вычисл. математики и математической физики. 2007. Т.47. №3. С.376-396.
9. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. - 524с.

Iterative processes for states with discontinuous coefficients and solutions in optimal control of quasilinear equations

© F.V. Lubyshev[4], M.E. Fairuzov[5], G.Y. Galeeva[6]

Abstract. Developed an iterative process for state-controlled processes described by nonlinear equations with discontinuous coefficients and solution in inhomogeneous anisotropic media with iterations on the boundary of discontinuity and coefficients. The question of convergence of the iterative process.

Key Words: iteration method, optimal control, elliptic equation, the operator, the difference approximation.

[4] full professor of Bashkir State University, Department of Applied Computer Science and Numerical Methods; v.lubyshev@mail.ru.

[5] associate professor of Bashkir State University, Department of Applied Computer Science and Numerical Methods; fairuzovme@mail.ru.

[6] associate professor of Bashkir State University, Department of Applied Computer Science and Numerical Methods; lara_wood@mail.ru.