

УДК 519.6

Диагностирование полости в стержне

© А. М. Ахтямов¹, Е. В. Саляхова²

Аннотация. В статье рассматривается диагностирование местоположения и размеров локальной полости в стержне по собственным частотам его изгибных колебаний. Для идентификации полости предложено использование собственных частот из двух спектров изгибных колебаний (вокруг разных осей).

Ключевые слова: стержень, собственные частоты, диагностика.

1. Введение

Стержни, балки являются деталями многих механизмов и конструкций, в которых часто образуются дефекты (трещины, полости из-за коррозии, ударов и т. п.). Для предотвращения аварий и поломок возникает задача их ранней диагностики. Часто для выявления дефекта в стержне и его местоположения используют собственные частоты его колебаний [1-8].

В настоящей работе рассматривается диагностирование локальной призматической полости в стержне квадратного сечения в случае, когда известно местоположение полости по оси X (проходящей вдоль стержня) и ее длина, но неизвестно местоположение полости по оси Y и ее размеры в плоскости сечения стержня YZ . Ранее, в статье [9], авторами был рассмотрен случай трубчатого стержня, у которого полость проходит по всей его длине. Была проведена диагностика полости трубчатого стержня, а также выявлено местоположение полости, при котором спектр собственных частот изгибных колебаний трубчатого стержня совпадает с соответствующим спектром собственных частот колебаний сплошного бездефектного стержня.

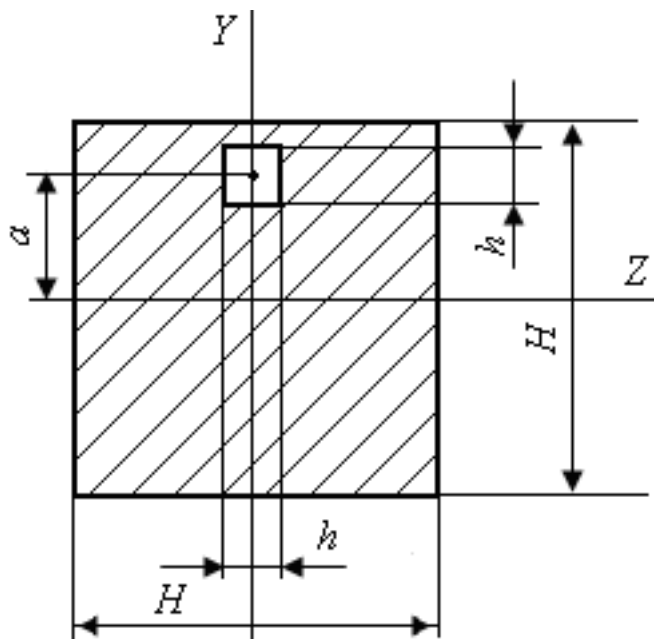
В настоящей работе, в отличие от статьи [9], рассматривается локальная полость, т.е. полость, не проходящая по всей длине стержня. Для идентификации рассматриваемой локальной полости используются собственные частоты из двух спектров изгибных колебаний (вокруг разных осей). Показано, что по двум собственным частотам, каждая из которых взята из спектров частот изгибных колебаний дефектного стержня вокруг разных осей, можно однозначно идентифицировать параметры размера h и местоположения a локальной полости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим колебания призматического стержня с дефектом в виде локальной полости. Его сечение изображено на рис. 2.1.

¹Ведущий научный сотрудник, Институт механики УНЦ РАН, г. Уфа; akhtyamovam@mail.ru

²Ассистент кафедры математики, ГОУ ВПО филиал УГАТУ в г. Нефтекамске, г. Нефтекамск; shalunova ev@rambler.ru



Р и с у н о к 2.1

Схема сечения стержня с локальной полостью

Уравнение изгибных колебаний стержня с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид [10]:

$$EJ \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0,$$

где $u(x, t)$ - прогиб текущей оси стержня, E [кг/м²] - модуль упругости, J [м⁴] - момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний, ρ [кг/м³] - плотность стержня, F [м²] - площадь поперечного сечения стержня. Собственные частоты изгибных колебаний рассматриваемого стержня будем обозначать через ω_i^a .

Выберем следующий вид закрепления стержня: левый конец жестко закреплен, правый конец свободен (консольный стержень).

Полость квадратного сечения локализуется в стержне на отрезке $[x_1; x_2]$, длина ее известна. Как видно из рис. 2.1, параметр a определяет положение полости рассматриваемого стержня вдоль оси Y . При $a = 0$ полость лежит на срединной оси стержня. Параметр h определяет размеры полости, при известной ее протяженности. Необходимо идентифицировать полость в стержне, то есть однозначно определить значения параметра a и параметра h полости.

3. Диагностирование местоположения и размеров полости

Задача об изгибных колебаниях консольного стержня длины L заменой $u(x, t) = y(x) \cos \omega t$ сводится к следующей спектральной задаче [10]:

$$y^4(x) = \frac{\rho F \omega^2}{EJ} y(x) \quad (3.1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(L) = 0, \quad y'''(L) = 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
 y_1(x_1) &= y_2(x_1), & y_2(x_2) &= y_3(x_2), \\
 y_1'(x_1) &= y_2'(x_1), & y_2'(x_2) &= y_3'(x_2), \\
 EJ_1y_1''(x_1) &= EJ_2y_2''(x_1), & EJ_2y_2''(x_2) &= EJ_1y_3''(x_2), \\
 EJ_1y_1'''(x_1) &= EJ_2y_2'''(x_1), & EJ_2y_2'''(x_2) &= EJ_1y_3'''(x_2),
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

где x_1, x_2 - соответственно левая и правая границы полости, y_1 и y_2 - прогибы соответственно слева и справа от левой границы полости, y_2 и y_3 - прогибы соответственно слева и справа от правой границы полости,

$$F = \begin{cases} F_1, & x \in [0, x_1), \\ F_2, & x \in [x_1, x_2], \\ F_1, & x \in (x_2, L], \end{cases} \quad J = \begin{cases} J_1, & x \in [0, x_1), \\ J_2, & x \in [x_1, x_2], \\ J_1, & x \in (x_2, L]. \end{cases}$$

Равенства (3.3) представляют собой условия сопряжения [10, с.197].

Полость в стержне локализуется на отрезке $[x_1; x_2]$. Длина ее известна. Для идентификации размера полости в плоскости сечения стержня YZ (то есть значения параметра h) рассмотрим колебания вокруг оси Y . Для вышеописанного стержня

$$F_1 = H^2, \quad J_1 = \frac{H^4}{12}.$$

Площадь поперечного сечения на отрезке $[x_1; x_2]$, где локализуется полость, равна $F_2 = H^2 - h^2$. Определим момент инерции J_2 . В случае колебаний стержня вокруг оси Y момент инерции J_2 имеет вид:

$$J_2 = J_Y = \frac{H^4 - h^4}{12}$$

(ось Y является нейтральной осью). То есть он не зависит от параметра a . Следовательно, используя известный спектр частот колебаний вокруг оси Y , мы можем вычислить значение параметра h . Расчет ведется с помощью разностно-аналитического метода, описанного в [11].

Известно местоположение полости по оси X , проходящей вдоль стержня, ее длина, а также ее размеры в плоскости YZ . Осталось определить положение полости вдоль оси Y , то есть найти значение параметра a . Для рассматриваемого стержня определена система осей Z и Y (оси проходят через центр квадрата со стороной H). Нейтральная ось Z_1 проходит через центр тяжести сечения. Чтобы однозначно выявить значение параметра a , рассмотрим колебания стержня вокруг оси Z_1 . Для определения ее положения найдем центр тяжести сечения по отношению к оси Z [12].

Разобьем сечение на фигуры: 1 - квадрат ($H \times H$), 2 - полость ($h \times h$).

Площади фигур: квадрат $f_1 = H^2$, полость $f_2 = -h^2$ (для полости площадь выражается отрицательной величиной). Площадь сечения $F_2 = H^2 - h^2$.

Вычислим координаты y_i центров тяжести фигур, составляющих сечение, относительно оси Z . Результаты поместим в таблицу.

Части сечения	Площади частей f_i	Координата y_i их центров тяжести
1	H^2	0
2	$-h^2$	a

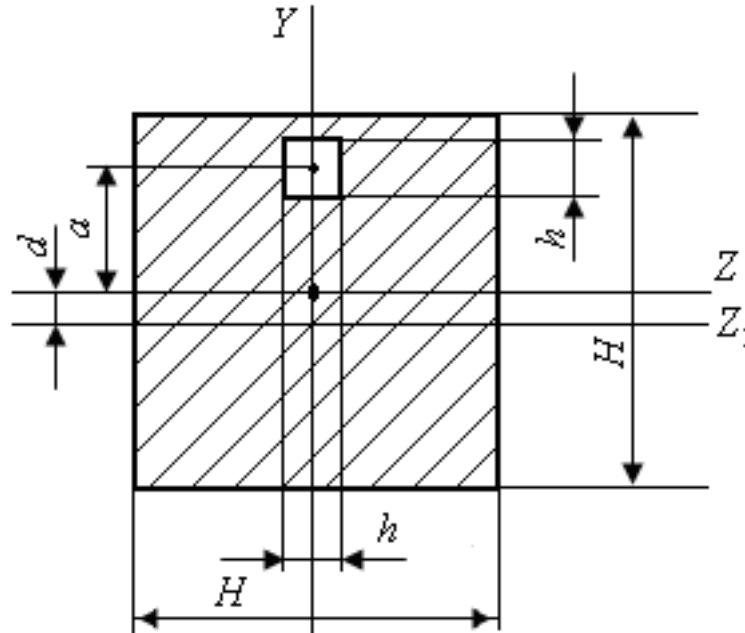
Определим статический момент сечения относительно выбранной оси Z :

$$S_Z = H^2 \cdot 0 - h^2 \cdot a.$$

Координата y_c центра тяжести сечения по отношению к оси Z имеет вид:

$$y_c = \frac{S_Z}{F_2} = \frac{-h^2 a}{H^2 - h^2}.$$

Положение нейтральной оси Z_1 , проходящей через центр тяжести сечения (рис. 3.1), найдено.



Р и с у н о к 3.1

Нейтральная ось Z_1 проходит через центр тяжести сечения, $d = (h^2 a)/(H^2 - h^2)$

Вычислим теперь момент инерции сечения стержня с полостью относительно нейтральной оси Z_1 .

$$J_{Z_1} = \frac{H^4}{12} + H^2 \left(\frac{h^2 a}{H^2 - h^2} \right)^2 - \left(\frac{h^4}{12} + h^2 \left(a + \frac{h^2 a}{H^2 - h^2} \right)^2 \right).$$

После упрощения, выражение для J_{Z_1} примет вид:

$$J_{Z_1} = \frac{H^4 - h^4}{12} - \frac{H^2 h^2 a^2}{H^2 - h^2}.$$

Следовательно, момент инерции сечения стержня с полостью на отрезке $[x_1; x_2]$, где локализуется полость, имеет вид:

$$J_2 = J_{Z_1} = \frac{H^4 - h^4}{12} - \frac{H^2 h^2 a^2}{H^2 - h^2}.$$

Зная значение параметра h , и взяв одну собственную частоту из спектра частот колебаний стержня вокруг оси Z_1 , мы можем теперь однозначно определить значение параметра a , характеризующего местоположение локализованной на отрезке $[x_1; x_2]$ полости вдоль оси Y .

Таким образом, используя по одной собственной частоте из двух разных спектров частот изгибных колебаний можно однозначно идентифицировать местоположение и размеры рассматриваемой локальной полости.

4. Примеры

Пример 4.1. Рассмотрим полученные выше результаты на конкретном примере. Для описанного консольного стержня возьмем следующие значения параметров:

$$H = 0,1 \text{ м}, \quad L = 1 \text{ м}, \quad \rho = 7850 \text{ кг/м}^3, \quad E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ кг/м}^2.$$

Стержень имеет полость квадратного сечения, которая лежит на отрезке $[0,26;0,74]$ по оси X , проходящей вдоль стержня.

С помощью разностно-аналитического метода [11] по известной собственной частоте колебаний стержня вокруг оси Y получено значение параметра $h = 0,01$ м, характеризующего размеры полости протяженностью 0,48 м, находящейся на отрезке $[0,26;0,74]$.

Зная значение параметра h , и взяв одну собственную частоту из известного спектра колебаний вокруг оси Z_1 , мы можем вычислить значение параметра a , характеризующего положение полости вдоль оси Y . Расчет ведется с помощью разностно-аналитического метода [11]. Результаты занесены в таблицу 1.

Таблица 1. Значение параметра a для стержня с полостью, локализованной на участке $[0,26;0,74]$, $h = 0,01$.

ω_1^a (рад/с)	a	ω_2^a (рад/с)	a	ω_3^a (рад/с)	a
166,239	0	1043,818	0	2921,126	0
166,138	0,01	1043,249	0,01	2920,040	0,01
165,837	0,02	1041,539	0,02	2916,772	0,02
165,334	0,03	1038,681	0,03	2911,294	0,03
164,626	0,04	1034,660	0,04	2903,562	0,04
164,195	0,045	1032,208	0,045	2898,830	0,045

Пример 4.2. Возьмем стержень, описанный в примере 4.1., с полостью квадратного сечения, которая лежит на отрезке $[0,26;0,32]$ по оси X , проходящей вдоль стержня. Длина полости составляет 0,06 м.

С помощью разностно-аналитического метода [11] по известной собственной частоте колебаний стержня вокруг оси Y получено значение параметра $h = 0,01$ м.

Зная значение параметра h , и взяв одну собственную частоту из известного спектра колебаний вокруг оси Z_1 , мы можем вычислить значение параметра a , характеризующего положение полости вдоль оси Y . Расчет ведется с помощью разностно-аналитического метода [11]. Результаты занесены в таблицу 2.

Таблица 2. Значение параметра a для стержня с полостью, локализованной на участке $[0,26;0,32]$, $h = 0,01$.

ω_1^a (рад/с)	a	ω_2^a (рад/с)	a	ω_3^a (рад/с)	a
166,013	0	1040,687	0	2915,026	0
166,013	0,01	1040,648	0,01	2914,788	0,01
166,012	0,02	1040,532	0,02	2914,071	0,02
166,01	0,03	1040,338	0,03	2912,866	0,03
166,007	0,04	1040,061	0,04	2911,157	0,04
166,005	0,045	1039,891	0,045	2910,108	0,045

Пример 4.3. Рассмотрим теперь стержень, концы которого защемлены (остальные параметры такие же, как и у описанных выше консольных стержней). Стержень имеет полость квадратного сечения, которая лежит на отрезке $[0,26;0,74]$ по оси X , проходящей вдоль стержня. Длина полости составляет $0,48$ м.

С помощью разностно-аналитического метода [11] по известной собственной частоте колебаний стержня вокруг оси Y получено значение параметра $h = 0,01$ м, характеризующего размеры полости, находящейся на отрезке $[0,26;0,74]$.

Зная значение параметра h , и взяв одну собственную частоту из известного спектра колебаний вокруг оси Z_1 , мы можем вычислить значение параметра a , характеризующего положение полости вдоль оси Y . Расчет ведется с помощью разностно-аналитического метода [11]. Результаты занесены в таблицу 3.

Таблица 3. Значение параметра a для стержня с полостью, локализованной на участке $[0,26;0,74]$, $h = 0,01$.
Концы стержня защемлены.

ω_1^a (рад/с)	a	ω_2^a (рад/с)	a	ω_3^a (рад/с)	a
1061,08	0	2920,852	0	5720,131	0
1060,66	0,01	2919,869	0,01	5718,736	0,01
1059,39	0,02	2916,91	0,02	5714,538	0,02
1057,27	0,03	2911,953	0,03	5707,502	0,03
1054,29	0,04	2904,956	0,04	5697,564	0,04
1052,48	0,045	2900,676	0,045	5691,481	0,045

5. Совпадение частот стержня с полостью и сплошного бездефектного стержня

В работе [9] на примере колебаний сплошного призматического стержня и трубчатого стержня (полость проходит по всей длине стержня) было показано, что при определенном положении полости стержня, один из спектров собственных частот изгибных колебаний стержня с полостью совпадает с соответствующим спектром собственных частот колебаний сплошного бездефектного стержня.

Для рассматриваемого стержня также существует положение локализованной на отрезке $[x_1; x_2]$ полости вдоль оси Y , при котором собственные частоты изгибных колебаний стержня с полостью совпадают с собственными частотами изгибных колебаний стержня без полости (взятого с такими же характеристиками). Однако случай локальной полости отличается от случая полости, проходящей по всей длине стержня (трубчатый стержень), тем, что эти положения являются разными для первой, второй, третьей и последующих частот. Для трубчатого стержня, как показано в работе [9], отношение $\frac{\omega_i^a}{\omega_i^*}$ не зависит от i , для всех $i = 1, 2, 3, 4 \dots$

С помощью разностно-аналитического метода [11] вычислены собственные частоты колебаний сплошного бездефектного стержня, взятого с такими же характеристиками, что и рассматриваемый стержень с локальной полостью:

$$\omega_1^* = 166,01(\text{рад/с}), \quad \omega_2^* = 1040,369(\text{рад/с}), \quad \omega_3^* = 2913,062(\text{рад/с}).$$

На рис. 5.1 изображен график, показывающий влияние местоположения локальной полости вдоль оси Y (то есть значения параметра a), на поведение собственных частот изгибных колебаний стержня. График подтверждает, что существуют такие положения

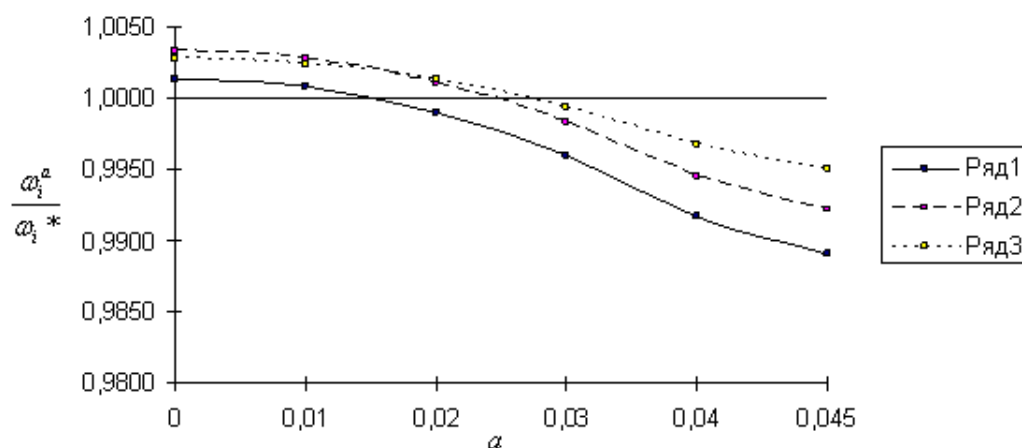
полости, при которых собственные частоты изгибных колебаний стержня с полостью совпадают с собственными частотами изгибных колебаний бездефектного стержня (взятого с такими же характеристиками). При этом значения параметра a , при которых происходит совпадение частот бездефектного стержня и стержня с полостью, являются разными для первой, второй, третьей собственной частоты. Первые собственные частоты совпадают при $a = 0,015$, вторые - при $a = 0,024$, третьи - при $a = 0,027$.

График зависимости поведения собственных частот колебаний стержня от местоположения полости для примера 4.2. приведен на рисунке 5.2. Совпадение частот стержня с полостью и бездефектного стержня (взятого с такими же характеристиками) происходит при $a = 0,031$ - для первой собственной частоты, при $a = 0,028$ - для второй, при $a = 0,028$ - для третьей.

График зависимости поведения собственных частот колебаний стержня от местоположения полости для примера 4.3. приведен на рисунке 5.3. В примере 4.3. для сплошного бездефектного стержня с заземленными концами собственные частоты имеют вид:

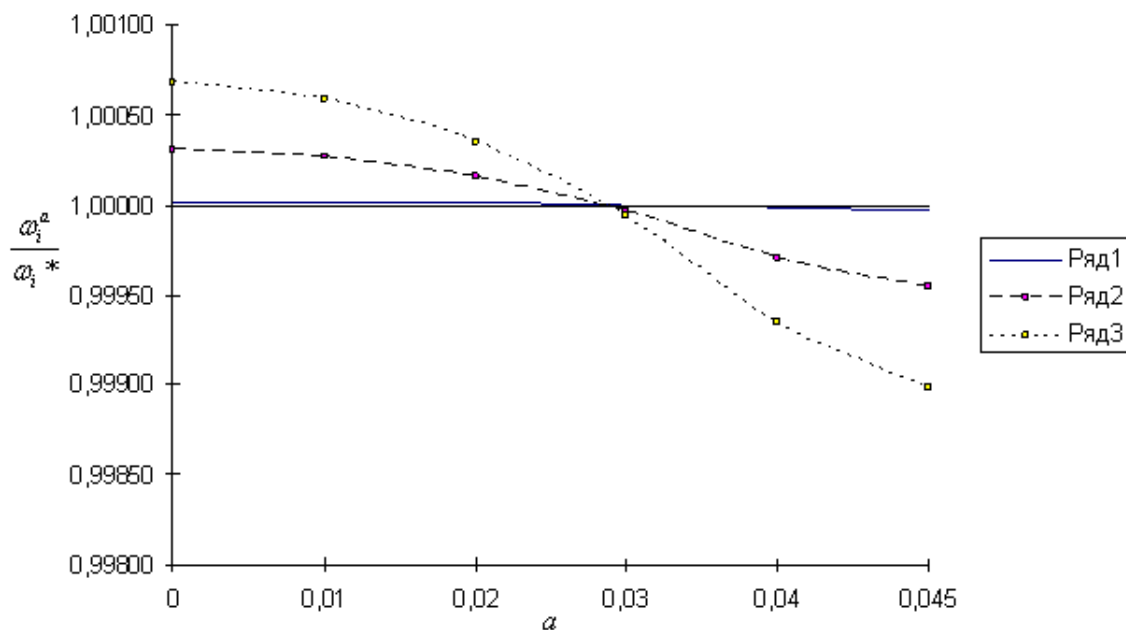
$$\omega_1^* = 1056,367(\text{рад/с}), \quad \omega_2^* = 2911,916(\text{рад/с}), \quad \omega_3^* = 5708,520(\text{рад/с}).$$

Совпадение частот стержня с полостью и бездефектного стержня (взятого с такими же характеристиками) происходит при $a = 0,033$ - для первой собственной частоты, при $a = 0,030$ - для второй, при $a = 0,028$ - для третьей.



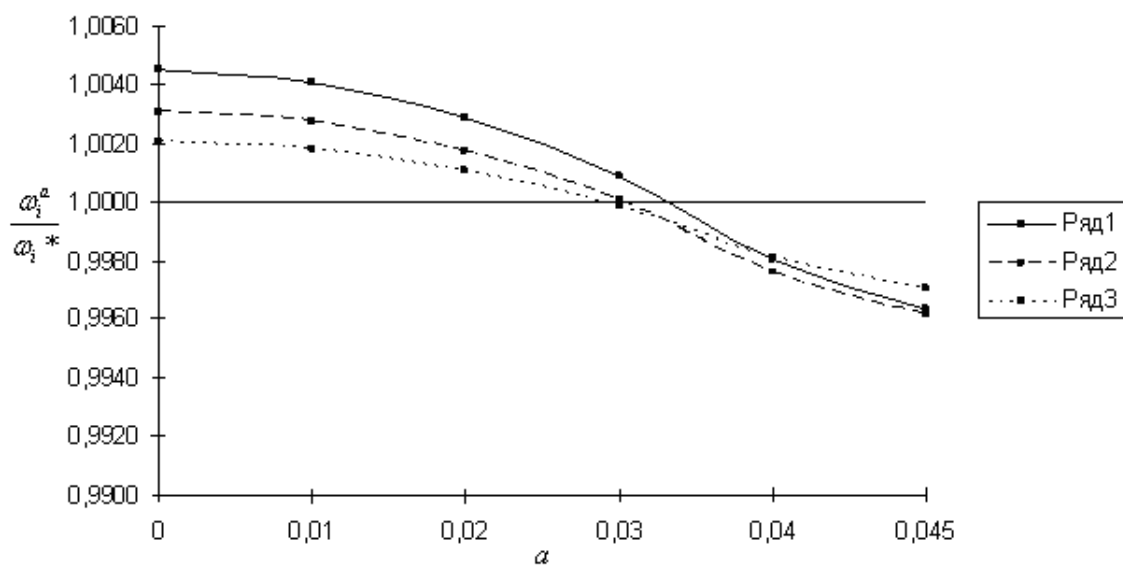
Р и с у н о к 5.1

Влияние местоположения локализованной на отрезке $[0,26;0,74]$ полости на поведение собственных частот консольного стержня, ряд 1 соответствует ω_1^a/ω_1^* , ряд 2 соответствует ω_2^a/ω_2^* , ряд 3 соответствует ω_3^a/ω_3^*



Р и с у н о к 5.2

Влияние местоположения локализованной на отрезке $[0,26;0,32]$ полости на поведение собственных частот консольного стержня, ряд 1 соответствует ω_1^a/ω_1^* , ряд 2 соответствует ω_2^a/ω_2^* , ряд 3 соответствует ω_3^a/ω_3^*



Р и с у н о к 5.3

Влияние местоположения локализованной на отрезке $[0,26;0,74]$ полости на поведение собственных частот стержня с защемленными концами, ряд 1 соответствует ω_1^a/ω_1^* , ряд 2 соответствует ω_2^a/ω_2^* , ряд 3 соответствует ω_3^a/ω_3^*

6. Выводы

1. Для случая, когда известно местоположение полости по оси X (проходящей вдоль стержня) и ее длина, но неизвестно местоположение полости по оси Y и ее размеры в плоскости сечения стержня YZ , проведено диагностирование локальной полости в стержне.

Показано, что для идентификации полости необходимо использование собственных частот из двух спектров изгибных колебаний (вокруг разных осей). По двум собственным частотам, каждая из которых взята из спектров частот изгибных колебаний стержня с полостью вокруг разных осей, можно однозначно идентифицировать параметры размера h и местоположения a полости.

2. Показано, что существует значение параметра a , характеризующего положение локальной полости стержня вдоль оси Y , при котором собственные частоты его изгибных колебаний (вокруг оси Z_1) совпадают с соответствующими собственными частотами бездефектного стержня (взятого с такими же характеристиками), при этом значения параметра a являются разными для первой, второй, третьей собственной частоты. Таким образом, если полость может развиваться в промежутке между поверхностью стержня и его нейтральной осью, следует с осторожностью применять методы диагностирования дефектов с помощью одного спектра собственных частот колебаний. Они не всегда позволят выявить и правильно идентифицировать такой дефект.

Авторы выражают признательность М.А. Ильгамову и Б.М. Люпаеву за обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gladwell G.M.L. Inverse Problems in Vibration. 2nd ed. — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004.
2. Ваньков Ю.В., Казаков Р.Б., Яковлева Э.Р. Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов. Электронный журнал "Техническая акустика" <http://www.ejta.org>, 2003, 5.
3. Morassi A. Crack-induced changes in eigenparameters of beam structures // ASCE Journal of engineering mathematics, 1993, vol. 119 (9). P. 1798-1803.
4. Ильгамов М.А., Хахимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. — 2009. — № 5. — С. 83-89.
5. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. — 224 с.
6. Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. — 2005. — № 9. — С.44-56.
7. Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // Прикладная механика и техническая физика. — 2008. — Т. 49, № 6. — С. 152-158.
8. Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. Определение полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия. — 2010. — № 5. — С. 29-33.
9. Ахтямов А.М., Саяхова Е.В. Всегда ли наличие полости в стержне меняет собственные частоты? Электронный журнал "Техническая акустика" <http://www.ejta.org>, 2011, 7.
10. Вибрации в технике: Справочник под. ред. В.В. Болотина. Т.1. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1978. — 352 с.

11. Абзалимов Р.Р., Саляхова Е.В. Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений 4-го порядка с разделенными краевыми условиями // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 11. – С. 3-11.
12. Рудицын М.Н., Артемов П.Я., Любошиц М.И. Справочное пособие по сопротивлению материалов. Минск: Высшая школа, 1970. – 630 с.

Diagnosing cavity in the rod

© А. М. Akhtyamov³, Е. V. Salyakhova⁴

Abstract. The article deals with diagnosing the location and size of the local cavity in the rod on the natural frequencies of its flexural vibrations. For cavity identification two spectra of flexural vibrations (around different axes) are suggested to use.

Key Words: beam, natural frequencies, diagnostics.

³Chief Researcher, Institute of Mechanics Ufa Scientific Center Russian Academy of Sciences, Ufa; akhtyamovam@mail.ru

⁴Assistant of the Department of Mathematics, an affiliate of the Ufa State Aviation Technical University in Neftekamsk, Neftekamsk; shalunova ev@rambler.ru