

## В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 550.837.3

## Комбинированный метод решения задачи электрокаротажа вертикальной скважины

© С. В. Викторов<sup>1</sup>

**Аннотация.** В данной работе рассматривается математическая модель для задачи скважинной электроразведки и комбинированный метод ее решения.

**Ключевые слова:** потенциал поля точечного источника, прямая задача электроразведки, моделирование каротажа скважин.

## 1. Введение

Одной из главных задач изучения внутреннего строения геологического разреза земли является задача выявления и промышленной оценки месторождений полезных ископаемых. С другой стороны требуется переоценка уже разведанных запасов с учетом произведенной промышленной выработки, более полное опоскование продуктивных зон, уточнение контуров залежей. Каротаж или геофизические исследования в скважинах являются наиболее распространенными методами разведки в настоящее время. Использование скважин для изучения околоскважинного и межскважинного пространства позволяет существенно повысить эффективность поисковых работ и уменьшить объемы дорогостоящего бурения.

Среди большого числа известных геофизических методов исследований скважин, ведущее место занимает электрический каротаж постоянным током, как наиболее эффективный и экологически безопасный метод разведки. Возможность применения электрических методов для изучения строения земных недр предопределяется различием значений удельных электрических проводимостей горных пород.

В реальных геофизических исследованиях на распределение потенциала, влияют физические размеры, форма скважин, учет которых позволяет более точно восстановить структуру исследуемого района.

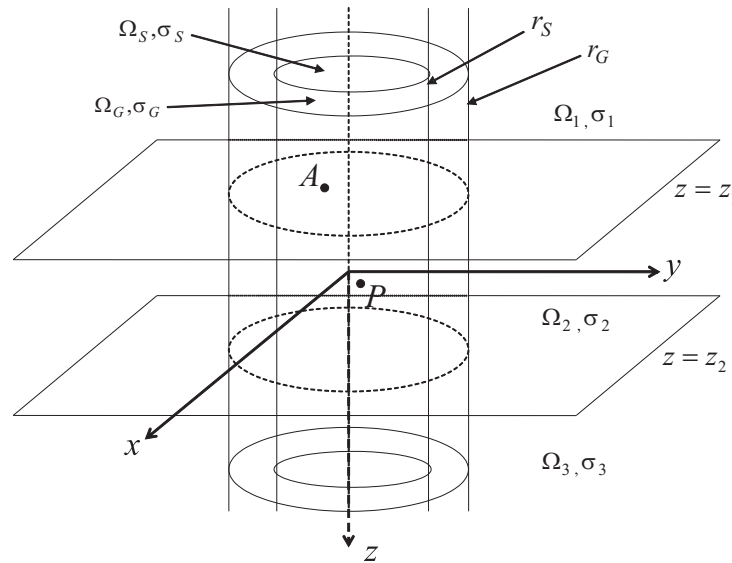
В работе рассматривается математическая модель прямой задачи электрического поля точечного источника постоянного тока для вертикальной бесконечной скважины с глинистой коркой в горизонтально-слоистой среде, состоящей из трех плоско-параллельных пластов.

## 2. Постановка задачи

Пусть в трех-слойном кусочно-однородном пространстве  $\Omega$ , состоящем из плоско-параллельных, горизонтально расположенных пластов  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$  с удельными электрическими проводимостями  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $\sigma_3$  находится вертикальная цилиндрическая скважина  $\Omega_S$ , заполненная буровым раствором удельной электрической проводимости  $\sigma_S$ , и вокруг

<sup>1</sup>доцент кафедры математического моделирования, Стерлитамакская государственная педагогическая академия, г. Стерлитамак; viktorov@rambler.ru.

которой присутствует глинистая корка в виде кольца  $\Omega_G$  удельной электрической проводимости  $\sigma_G$  (рис. 2.1).



Р и с у н о к 2.1

Вертикальная скважина с коркой в трех-слойном пространстве

Математическая модель прямой задачи описывающая потенциальное поле точечного источника постоянного тока интенсивности  $I$ , возбуждаемого внутри скважины в точке  $A(x_0, 0, z_0)$ , в декартовой системе координат с осью  $z$  направленной вниз и совпадающей с осью вращения скважины, представляется в виде следующей краевой задачи:

$$\Delta u_S(P) = -\frac{I}{\sigma_S} \delta(x - x_0) \delta(y) \delta(z - z_0), P(x, y, z) \in \Omega_S; \quad (2.1)$$

$$\Delta u_i(P) = 0, P(x, y, z) \in \Omega_i, i = \overline{1, 3}; \quad \Delta u_G(P) = 0, P(x, y, z) \in \Omega_G; \quad (2.2)$$

$$u_i(P)|_{z=z_i} = u_{i+1}(P)|_{z=z_i}; \quad \sigma_i \frac{\partial u_i(P)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = \sigma_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}(P)}{\partial z} \Big|_{z=z_i}, i = \overline{1, 2}; \quad (2.3)$$

$$u_i(P)|_{r_G} = u_G(P)|_{r_G}; \quad \sigma_i \frac{\partial u_i(P)}{\partial n} \Big|_{r_G} = \sigma_G \frac{\partial u_G(P)}{\partial n} \Big|_{r_G}, i = \overline{1, 3}; \quad (2.4)$$

$$u_S(P)|_{r_S} = u_G(P)|_{r_S}; \quad \sigma_S \frac{\partial u_S(P)}{\partial m} \Big|_{r_S} = \sigma_G \frac{\partial u_G(P)}{\partial m} \Big|_{r_S}; \quad (2.5)$$

$$u_{S,G} \rightarrow 0, |z| \rightarrow \infty; \quad u_{1,3} \rightarrow 0, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty; \quad u_2 \rightarrow 0, \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

где  $\Delta$  – оператор Лапласа, плоскость  $z = z_i$  – нижняя граница слоя  $\Omega_i$  ( $i = \overline{1, 3}$ ),  $\delta$  – функция Дирака,  $n$  и  $m$  – единичные векторы внешних нормалей к поверхностям  $r_G$  и  $r_S$  соответственно.

Решение прямой задачи (2.1)–(2.6) осуществляется комбинированным методом интегральных преобразований и интегральных уравнений [1].

### 3. Комбинированный метод решения

Перейдем в задаче (2.1)–(2.6) к цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  с плоскостью  $\varphi = 0$ , содержащей источник тока. Получим:

$$Lu_S \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_S}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_S}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_S}{\partial \varphi^2} = -\frac{I}{2r\sigma_S} \delta(r - r_0) \delta(\varphi) \delta(z - z_0), \quad (r, \varphi, z) \in \Omega_S; \quad (3.1)$$

$$Lu_G = 0, \quad (r, \varphi, z) \in \Omega_G; \quad Lu_i = 0, \quad (r, \varphi, z) \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 3}; \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0, \pi} = 0; \quad (3.3)$$

$$u_i|_{z=z_i} = u_{i+1}|_{z=z_i}; \quad \sigma_i \left. \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|_{z=z_i} = \sigma_{i+1} \left. \frac{\partial u_{i+1}}{\partial z} \right|_{z=z_i}, \quad i = \overline{1, 2}; \quad (3.4)$$

$$u_i|_{r=r_G} = u_G|_{r=r_G}; \quad \sigma_i \left. \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|_{r=r_G} = \sigma_G \left. \frac{\partial u_G}{\partial r} \right|_{r=r_G}, \quad i = \overline{1, 3}; \quad (3.5)$$

$$u_S|_{r=r_S} = u_G|_{r=r_S}; \quad \sigma_S \left. \frac{\partial u_S}{\partial r} \right|_{r=r_S} = \sigma_G \left. \frac{\partial u_G}{\partial r} \right|_{r=r_S}; \quad (3.6)$$

$$u_{S,G} \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad u_{1,3} \rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad u_2 \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad (3.7)$$

где условие (3.3) выражает симметрию поля относительно совпадающих плоскостей  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ .

К задаче (3.1)–(3.7) применим конечное косинус преобразование Фурье по переменной  $\varphi$ :

$$u^m(r, z) = \int_0^\pi u(r, \varphi, z) \cos m\varphi d\varphi \quad (3.8)$$

и будем искать ее решение в виде:

$$u(r, \varphi, z) = \pi^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_0^m) u^m(r, z) \cos m\varphi, \quad (3.9)$$

где  $\delta_0^m$  – символ Кронекера,  $\delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$ .

В результате получим однопараметрическое семейство (по параметру  $m = 0, 1, 2, \dots$ ) двумерных краевых задач относительно коэффициентов Фурье  $u^m(r, z)$  разложения исходной функции  $u(r, \varphi, z)$  в ряд (3.9):

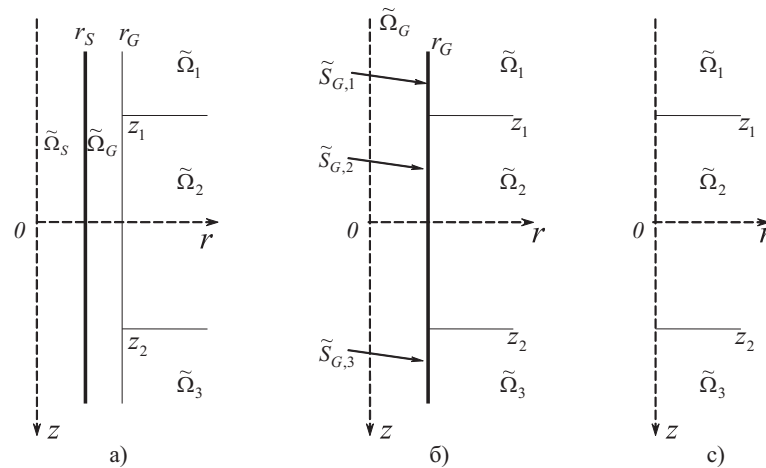
$$\tilde{A}(r_0, z_0), \quad \tilde{P}(r, z), \quad \tilde{Q}(r_Q, z_Q),$$

$$L^m u_S^m \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_S^m}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_S^m}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} u_S^m = -\frac{I}{4r\sigma_S} \delta(r - r_0) \delta(z - z_0), \quad \tilde{P} \in \tilde{\Omega}_S;$$

$$L^m u_G^m = 0, \quad \tilde{P} \in \tilde{\Omega}_G; \quad L^m u_i^m = 0, \quad \tilde{P} \in \tilde{\Omega}_i, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$\begin{aligned}
u_i^m|_{z=z_i} &= u_{i+1}^m|_{z=z_i}; \quad \sigma_i \frac{\partial u_i^m}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = \sigma_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}^m}{\partial z} \Big|_{z=z_i}, \quad i = \overline{1,2}; \\
u_i^m|_{r=r_G} &= u_G^m|_{r=r_G}; \quad \sigma_i \frac{\partial u_i^m}{\partial r} \Big|_{r=r_G} = \sigma_G \frac{\partial u_G^m}{\partial r} \Big|_{r=r_G}, \quad i = \overline{1,3}; \\
u_S^m|_{r=r_S} &= u_G^m|_{r=r_S}; \quad \sigma_S \frac{\partial u_S^m}{\partial r} \Big|_{r=r_S} = \sigma_G \frac{\partial u_G^m}{\partial r} \Big|_{r=r_S}; \\
|u_S^m|_{r=0} &< \infty; \quad u_{S,G}^m \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty; \\
u_{1,3}^m &\rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty; \quad u_2^m \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где области  $\tilde{\Omega}_S, \tilde{\Omega}_G, \tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3$  получены сечением соответствующих областей  $\Omega_S, \Omega_G, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  плоскостью  $\varphi = const$  (рис. 3.1 а–с).



Р и с у н о к 3.1

Выберем в качестве включения скважину  $\tilde{\Omega}_S$  (см. рис. 3.1а, где жирной линией отмечена граница включения).

Тогда решение задачи (3.10) представляется в виде [2]:

$$u^m = W^m + V^m, \quad u_S^m = \frac{\sigma_G}{\sigma_S}(W^m + V^m), \tag{3.11}$$

$$W^m = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^m(\tilde{Q}) \frac{\partial G^m(\tilde{P}, \tilde{Q})}{\partial r_{\tilde{Q}}} \cdot r_{\tilde{Q}} dz, \quad V^m = \frac{I}{4\sigma_S} G^m(\tilde{P}, \tilde{A}),$$

где функции  $G^m(\tilde{P}, \tilde{Q})$  – коэффициенты Фурье разложения функции Грина  $G(P, Q)$  в косинус-ряд (3.9) находятся из вспомогательной задачи:

$$L^m G_G^m \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial G_G^m}{\partial r} + \frac{\partial^2 G_G^m}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} G_G^m = -\delta(r - r_Q) \delta(z - z_Q);$$

$$L^m G_i^m = 0, \quad i = \overline{1,3};$$

$$G_i^m|_{z=z_i} = G_{i+1}^m|_{z=z_i}; \quad \sigma_i \frac{\partial G_i^m}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = \sigma_{i+1} \frac{\partial G_{i+1}^m}{\partial z} \Big|_{z=z_i}, \quad i = \overline{1,2}; \quad (3.12)$$

$$G_i^m|_{r=r_G} = G_G^m|_{r=r_G}; \quad \sigma_i \frac{\partial G_i^m}{\partial r} \Big|_{r=r_G} = \sigma_G \frac{\partial G_G^m}{\partial r} \Big|_{r=r_G}, \quad i = \overline{1,3};$$

$$|G_G^m|_{r=r_0} < \infty; \quad G_G^m \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty; \quad G_{1,3}^m \rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty; \quad G_2^m \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

а  $\mu^m(\tilde{Q})$  – неизвестные коэффициенты Фурье разложения функции плотности потенциала двойного слоя на границе включения – есть решение интегрального уравнения:

$$\mu^m(\tilde{P}) - \frac{\sigma_G - \sigma_S}{\sigma_G + \sigma_S} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^m(\tilde{Q}) r_{\tilde{Q}} \frac{\partial G^m(\tilde{P}, \tilde{Q})}{\partial r_{\tilde{Q}}} dz = \frac{\sigma_G - \sigma_S}{\sigma_G + \sigma_S} \cdot \frac{I}{4\pi\sigma_S} G^m(\tilde{P}, \tilde{A}).$$

Решение задачи (3.12) произведем аналогично, рассматривая  $\tilde{\Omega}_G$  как включение в горизонтально-слоистой среде (рис. 3.1б):

$$G^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) = \tilde{W}^m + \tilde{V}^m, \quad G_{G,i}^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) = (\tilde{W}^m + \tilde{V}^m) \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_G},$$

$$\tilde{W}^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) = \sum_{i=1}^3 \int_{\tilde{S}_{G,i}} \tilde{\mu}_{G,i}^m(\tilde{Q}) \cdot r_{\tilde{Q}} \cdot \frac{\partial \tilde{G}^m(\tilde{P}, \tilde{Q})}{\partial r_{\tilde{Q}}} dz, \quad \tilde{V}^m = \tilde{G}^m(\tilde{P}, \tilde{Q}),$$

где  $\tilde{G}^m(\tilde{P}, \tilde{Q})$  удовлетворяет следующей задаче:

$$L^m \tilde{G}^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) = -\delta(\tilde{P}, \tilde{Q}); \quad \tilde{G}_i^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) \Big|_{z=z_i} = \tilde{G}_{i+1}^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) \Big|_{z=z_i},$$

$$\sigma_i \frac{\partial \tilde{G}_i^m(\tilde{P}, \tilde{Q})}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = \sigma_{i+1} \frac{\partial \tilde{G}_{i+1}^m(\tilde{P}, \tilde{Q})}{\partial z} \Big|_{z=z_i}, \quad i = \overline{1,2}, \quad \left| \tilde{G}_i^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) \right|_{r=0} < \infty; \quad (3.13)$$

$$\tilde{G}_{1,3}^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) \rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty; \quad \tilde{G}_2^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Потенциал двойного слоя  $\tilde{W}^m = \tilde{W}_1^m + \tilde{W}_2^m + \tilde{W}_3^m$  претерпевает разрыв при переходе границ  $\tilde{S}_{G,1}$ ,  $\tilde{S}_{G,2}$ ,  $\tilde{S}_{G,3}$  (см. рис. 3.1б), для которого имеют место формулы:

$$\tilde{W}_{ext}^m(\tilde{P}_0) = \overline{W}_i^m(\tilde{P}_0) + 0.5 \cdot \tilde{\mu}_{G,i}^m(\tilde{P}_0), \quad \tilde{W}_{in}^m(\tilde{P}_0) = \overline{W}_i^m(\tilde{P}_0) - 0.5 \cdot \tilde{\mu}_{G,i}^m(\tilde{P}_0), \quad i = \overline{1,3}, \quad (3.14)$$

где  $\tilde{W}_{ext}^m(\tilde{P}_0)$ ,  $\tilde{W}_{in}^m(\tilde{P}_0)$ ,  $\overline{W}_i^m(\tilde{P}_0)$ ,  $\tilde{P}_0 \in \tilde{S}_{G,i}$ ,  $i = \overline{1,3}$  – соответственно внешние, внутренние и прямые значения потенциалов.

Используя формулы (3.14) получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных  $\tilde{\mu}_{G,i}^m$ :

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_{G,1}^m - 2\frac{\sigma_1 - \sigma_G}{\sigma_1 + \sigma_G} \left( \bar{W}_1^m + \tilde{W}_2^m + \tilde{W}_3^m \right) = 2\frac{\sigma_1 - \sigma_G}{\sigma_1 + \sigma_G} \cdot \tilde{V}_0^m, & \tilde{Q} \in \tilde{S}_{G,1}; \\ \tilde{\mu}_{G,2}^m - 2\frac{\sigma_2 - \sigma_G}{\sigma_2 + \sigma_G} \left( \tilde{W}_1^m + \bar{W}_2^m + \tilde{W}_3^m \right) = 2\frac{\sigma_2 - \sigma_G}{\sigma_2 + \sigma_G} \cdot \tilde{V}_0^m, & \tilde{Q} \in \tilde{S}_{G,2}; \\ \tilde{\mu}_{G,3}^m - 2\frac{\sigma_3 - \sigma_G}{\sigma_3 + \sigma_G} \left( \tilde{W}_1^m + \tilde{W}_2^m + \bar{W}_3^m \right) = 2\frac{\sigma_3 - \sigma_G}{\sigma_3 + \sigma_G} \cdot \tilde{V}_0^m, & \tilde{Q} \in \tilde{S}_{G,3}; \end{cases}$$

Решение задачи (3.13) для случая  $n$ -слойного пространства получено по рекуррентным формулам методом "фиктивных границ" [3].

Используемый в работе метод обладает преимуществами. С одной стороны, он позволяет поэтапно понижать геометрическую сложность исследуемой среды, с другой – позволяет использовать для своей реализации алгоритмы допускающие распараллеливание вычислений, что значительно повышает скорость счета.

В трехмерном случае, когда круговая скважина наклонная и пересекает пласт с плоско-параллельными границами под некоторым углом, решение может быть построено другим способом – в виде интегральных представлений на основе метода интегральных уравнений [4].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.Т., Кризский В.Н. Решение некоторых задач электроразведки методом интегральных уравнений. // Известия ВУЗов, Геология и разведка, 1993, №4, С. 122–127.
2. Воскобойников Г.М. О вычислении стационарных электромагнитных полей в некоторых кусочно-однородных средах // Изв. АН СССР. Физика Земли, 1973, - №9, - С. 73–76.
3. Викторов С.В. Математическое моделирование геоэлектрических полей в осесимметричных средах со сплайн-аппроксимацией границ: дис. канд. физ.-мат. наук / С.В. Викторов – Стерлитамак, 2005.
4. Викторов С.В. Математическое моделирование электрокаротажа пересекающей пласт скважины. // Материалы 36-ой сессии международного семинара "Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей 2009, С. 82–86.

## The combined method of the decision of a problem electroinvestigations the vertical Chinks

© S. V. Viktorov<sup>2</sup>

**Abstract.** In the given work it is considered Mathematical model for a problem electroinvestigations and The combined method of its decision

**Key Words:** Potential of a field of a dot source, direct problem of electroinvestigation, modeling chinks.

<sup>2</sup>The lecturer of chair of mathematical modeling. The Sterlitamaksky state Pedagogical academy. The city of Sterlitamak. viktorov@rambler.ru