УДК 517.9

Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае

© Т. А. Шемякина[1]

Аннотация. В работе получены условия существования и дифференцируемости решения системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Основным методом исследования является метод дополнительного аргумента.
Ключевые слова: Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, метод дополнительного аргумента, расширенная характеристическая система.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему Франкля в гиперболическом случае:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - P(x,y,u,v)\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - Q(x,y,u,v)\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

при $P \geq p_0 > 0, Q \geq q_0 > 0$,
с начальными условиями для неизвестных функций:

$$u(x,0) = \varphi(x), v(x,0) = \psi(x), \tag{1.2}$$

в области $\tilde{\Omega} = \{(x,y) : -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq Y, Y > 0\}$.

В данной работе продолжено исследование системы Франкля в гиперболическом случае (1.1), (1.2). Основным методом исследования является метод дополнительного аргумента [1], [2].

В работе [4] для системы Франкля гиперболического типа методом дополнительного аргумента построена новая расширенная характеристическая система:

$$\begin{cases} \frac{d\eta_1(x,y,s)}{ds} = e(\eta_1(x,y,s), s, u_1(x,y,s), v_1(x,y,s)), \\ \frac{d\eta_2(x,y,s)}{ds} = -e(\eta_2(x,y,s), s, u_2(x,y,s), v_2(x,y,s)), \\ \frac{dw_1(x,y,s)}{ds} = F_1(\eta_1(x,y,s), s, u_1(x,y,s), v_1(x,y,s), w_1(x,y,s), w_3(x,y,s)), \\ \frac{dw_2(x,y,s)}{ds} = F_2(\eta_2(x,y,s), s, u_2(x,y,s), v_2(x,y,s), w_4(x,y,s), w_2(x,y,s)), \\ \frac{du_1(x,y,s)}{ds} = w_3(x,y,s), \\ \frac{dv_2(x,y,s)}{ds} = -w_4(x,y,s)/b(\eta_2(x,y,s), s, u_2(x,y,s), v_2(x,y,s)), \\ \eta_1(x,y,y) = x, \eta_2(x,y,y) = x, \\ w_1(x,y,0) = \Phi_1(\eta_1(x,y,0)), w_2(x,y,0) = \Phi_2(\eta_2(x,y,0)), \\ u_1(x,y,0) = \varphi(\eta_1(x,y,0)), v_2(x,y,0) = \psi(\eta_2(x,y,0)), \\ w_3(x,y,s) = w_2(\eta_1(x,y,s), s, s), w_4(x,y,s) = w_1(\eta_2(x,y,s), s, s), \\ u_2(x,y,s) = u_1(\eta_2(x,y,s), s, s), v_1(x,y,s) = v_2(\eta_1(x,y,s), s, s), \end{cases} \tag{1.3}$$

где $e(x,y,u,v) = \sqrt{P(x,y,u,v)/Q(x,y,u,v)}$;
функции $F_i, \Phi_i, i = 1,2;$ выражаются через исходные данные явным образом.

[1]Доцент кафедры высшей математики, Санкт-Петербургский Государственный Политехнический университет, г. Санкт-Петербург; sh tat @ mail.ru.

В этой системе уравнений новые неизвестные функции $\eta_1, \eta_2, w_1, w_2, w_3, w_4, u_1, u_2, v_1, v_2$ зависят не только от x и y, но еще и от дополнительного аргумента s.

Основным преимуществом новой расширенной характеристической системы по сравнению с предыдущей [3] является то, что мы уменьшили количество суперпозиций неизвестных функций и сейчас удобнее исследовать ее методом последовательных приближений.

Интегрируя дифференциальные уравнения из (1.3) по переменой s и учитывая начальные условия там же, приходим к эквивалентной системе интегральных уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c} \eta_1(x,y,s) = x - \int_s^y e(\eta_1(x,y,\tau),\tau,u_1(x,y,\tau),v_1(x,y,\tau))d\tau, \\ \eta_2(x,y,s) = x + \int_s^y e(\eta_2(x,y,\tau),\tau,u_2(x,y,\tau),v_2(x,y,\tau))d\tau, \\ w_1(x,y,s) = \Phi_1(\eta_1(x,y,0)) + \\ + \int_0^s F_1(\eta_1(x,y,\tau),\tau,u_1(x,y,\tau),v_1(x,y,\tau),w_1(x,y,\tau),w_3(x,y,\tau))d\tau, \\ w_2(x,y,\tau) = \Phi_2(\eta_2(x,y,0)) + \\ + \int_0^s F_2(\eta_2(x,y,\tau),\tau,u_2(x,y,\tau),v_2(x,y,\tau),w_4(x,y,\tau),w_2(x,y,\tau))d\tau, \\ u_1(x,y,s) = \varphi(\eta_1(x,y,0)) + \int_0^s w_3(x,y,\tau)d\tau, \\ v_2(x,y,s) = \psi(\eta_2(x,y,0)) - \int_0^s w_4(x,y,\tau)/b(\eta_2(x,y,\tau),\tau,u_2(x,y,\tau),v_2(x,y,\tau))d\tau, \\ w_3(x,y,s) = w_2(\eta_1(x,y,s),s,s), w_4(x,y,s) = w_1(\eta_2(x,y,s),s,s), \\ u_2(x,y,s) = u_1(\eta_2(x,y,s),s,s), v_1(x,y,s) = v_2(\eta_1(x,y,s),s,s). \end{array}\right. \tag{1.4}$$

В работе [4] была установлена и доказана эквивалентность решения системы интегральных уравнений (1.4) и исходной задачи (1.1), (1.2):

Функции $u(x,y) = u_1(x,y,s)$, $v(x,y) = v_2(x,y,s)$, определяемые из расширенной характеристической системы уравнений (1.4) при значении дополнительного аргумента $s = y$, будут решением исходной задачи (1.1), (1.2).

2. Существование ограниченного решения системы интегральных уравнений

Для доказательства существования классического решения задачи (1.1), (1.2) надо доказать существование непрерывно-дифференцируемого, ограниченного решения системы интегральных уравнений (1.4).

Так как решение будем искать в классе ограниченных функций, то введем новые неизвестные переменные: $\mu_1(x,y,s) = x - \eta_1(x,y,s)$, $\mu_2(x,y,s) = x - \eta_2(x,y,s)$. Тогда система интегральных уравнений (1.4) примет вид:

$$\left\{\begin{array}{c} \mu_1(x,y,s) = \int_s^y e(x - \mu_1(x,y,\tau),\tau,u_1(x,y,\tau),v_1(x,y,\tau))d\tau, \\ \mu_2(x,y,s) = -\int_s^y e(x - \mu_2(x,y,\tau),\tau,u_2(x,y,\tau),v_2(x,y,\tau))d\tau, \\ w_1(x,y,s) = \Phi_1(x - \mu_1(x,y,0)) + \\ + \int_0^s F_1(x - \mu_1(x,y,\tau),\tau,u_1(x,y,\tau),v_1(x,y,\tau),w_1(x,y,\tau),w_3(x,y,\tau))d\tau, \\ w_2(x,y,\tau) = \Phi_2(x - \mu_2(x,y,0)) + \\ + \int_0^s F_2(x - \mu_2(x,y,\tau),\tau,u_2(x,y,\tau),v_2(x,y,\tau),w_4(x,y,\tau),w_2(x,y,\tau))d\tau, \\ u_1(x,y,s) = \varphi(x - \mu_1(x,y,0)) + \int_0^s w_3(x,y,\tau)d\tau, \\ v_2(x,y,s) = \psi(x - \mu_2(x,y,0)) - \\ - \int_0^s w_4(x,y,\tau)/b(x - \mu_2(x,y,\tau),\tau,u_2(x,y,\tau),v_2(x,y,\tau))d\tau, \\ w_3(x,y,s) = w_2(x - \mu_1(x,y,s),s,s), w_4(x,y,s) = w_1(x - \mu_2(x,y,s),s,s), \\ u_2(x,y,s) = u_1(x - \mu_2(x,y,s),s,s), v_1(x,y,s) = v_2(x - \mu_1(x,y,s),s,s). \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Л е м м а 2.1. *Система интегральных уравнений (1.4) при* $0 < s \le y < Y_0$, *где* Y_0 *- известное значение, определяемое через исходные данные, имеет единственное, непрерывное, ограниченное на всей оси* $-\infty < x < \infty$ *решение.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Существование решения системы (1.4) будем доказывать методом последовательных приближений.

За нулевое приближение решения системы интегральных уравнений (2.1)возьмем равенства:

$\mu_1^0(x,y,s) = 0$, $\mu_2^0(x,y,s) = 0$, $w_1^0(x,y,s) = \Phi_1(x)$, $w_2^0(x,y,s) = \Phi_2(x)$, $u_1^0(x,y,s) = \varphi(x)$, $v_2^0(x,y,s) = \psi(x)$.

Первое и все последующие приближения решения системы уравнений (2.1) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений $(n = 1, 2, ...)$:

$$\begin{cases} \mu_1^n(x,y,s) = \int_s^y e(x - \mu_1^n(x,y,\tau), \tau, u_1^n(x,y,\tau), v_1^n(x,y,\tau))d\tau, \\ \mu_2^n(x,y,s) = -\int_s^y e(x - \mu_2^n(x,y,\tau), \tau, u_2^n(x,y,\tau), v_2^n(x,y,\tau))d\tau. \end{cases} \tag{2.2}$$

$$\begin{cases} w_1^n(x,y,s) = \Phi_1(x - \mu_1^n(x,y,0)) + \\ + \int_0^s F_1(x - \mu_1^n(x,y,\tau), \tau, u_1^n(x,y,\tau), v_1^n(x,y,\tau), w_1^n(x,y,\tau), w_3^n(x,y,\tau))d\tau, \\ w_2^n(x,y,s) = \Phi_2(x - \mu_2^n(x,y,0)) + \\ + \int_0^s F_2(x - \mu_2^n(x,y,\tau), \tau, u_2^n(x,y,\tau), v_2^n(x,y,\tau), w_4^n(x,y,\tau), w_2^n(x,y,\tau))d\tau. \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} u_1^n(x,y,s) = \varphi(x - \mu_1^n(x,y,0)) + \int_0^s w_3^n(x,y,\tau)d\tau, \\ v_2^n(x,y,s) = \psi(x - \mu_2^n(x,y,0)) - \\ - \int_0^s w_4^n(x,y,\tau)/b(x - \mu_2^n(x,y,\tau), \tau, u_2^n(x,y,\tau), v_2^n(x,y,\tau))d\tau. \end{cases} \tag{2.4}$$

$$w_3^n(x,y,s) = w_2^{n-1}(x - \mu_1^n(x,y,s), s, s), w_4^n(x,y,s) = w_1^{n-1}(x - \mu_2^n(x,y,s), s, s),$$
$$u_2^n(x,y,s) = u_1^{n-1}(x - \mu_2(x,y,s), s, s), v_1^n(x,y,s) = v_2^{n-1}(x - \mu_1(x,y,s), s, s).$$

Для всех пар уравнений (2.2), (2.3), (2.4) при каждом n с помощью своего процесса последовательных приближений доказано существование их решений. Для всех $0 < y \le Y_{n0}$, где Y_{n0} - известное значение, определяемое через исходные данные, последовательные приближения $\{u_1^{n,k}\}$, $\{v_2^{n,k}\}$, $\{\mu_i^{n,k}\}$, $\{w_i^{n,k}\}$, $i = 1, 2$; ограничены, сходятся и имеют ограниченные частные производные по аргументу x. Таким образом для всех $n = 1, 2, ...$ получены следующие оценки:

$$\begin{cases} \|\mu_i^n\| \le 1, \|\partial_x \mu_i^n\| \le 1, i = 1, 2; \\ \|w_i^n\| \le C_\Phi, \|\partial_x w_i^n\| \le N_{wix}, i = 1, 2; \\ \|u_1^n\| \le 2C_{\varphi\psi}, \|\partial_x u_1^n\| \le 3C_{\varphi\psi}, \\ \|v_2^n\| \le 2C_{\varphi\psi}, \| \partial_x v_2^n\| \le 3C_{\varphi\psi}, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $C_{\varphi\psi}$, C_Φ, N_{w1x}, N_{w2x} - известные константы.

В силу полученных неравенств доказана сходимость последовательных приближений $\{u_1^n\}$, $\{v_2^n\}$, $\{\mu_i^n\}$, $\{w_i^n\}$, $i = 1, 2$.

Переходя к пределу в рекуррентных уравнениях (2.2), (2.3), (2.4) при значениях $n \to \infty$ получили, что предельные функции будут удовлетворять системе интегральных уравнений (2.1), а следовательно и системе интегральных уравнений (1.4). Единственность решения следует также из неравенств (2.2).

Таким образом, получили, что система интегральных уравнений (1.4) при $0 < s \le y < Y_0$, где $Y_0 \le Y_{n0}$ - известное значение, определяемое через исходные данные, имеет единственное, непрерывное, ограниченное на всей оси $-\infty < x < \infty$ решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Дифференцируемость решения системы интегральных уравнений

С помощью преобразований и оценок, таких же как при доказательстве леммы 2.1, доказывается следующая лемма.

Лемма 3.1. *Функции u_1, v_2, μ_i, w_i, $i = 1, 2$; являющиеся решением системы интегральных уравнений (2.1) при $0 < s \le y < Y_*$, $Y_* \le Y_0$ - известное значение, определяемое через исходные данные, имеют непрерывные и ограниченные на всей числовой оси $x \in (-\infty, \infty)$, производные по переменным x, y.*

На основе проведенных исследований сформулируем теорему.

Теорема 3.1. *Пусть функции $P(x, y, u, v)$, $Q(x, y, u, v)$ - дважды дифференцируемы по всем своим аргументам; $P \ge p_0 > 0$, $Q \ge q_0 > 0$; $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$, $\psi(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$.*

Тогда задача Коши для системы Франкля в гиперболическом случае (1.1), (1.2) при $0 \le y < Y_*$, где константа Y_* точно определяется через исходные данные,

имеет единственное, ограниченное на всей числовой оси $x \in (-\infty, \infty)$ решение $u(x, y) \in C^{(1,1)}((-\infty, \infty) \times [0, Y_0])$, $v(x, y) \in C^{(1,1)}((-\infty, \infty) \times [0, Y_0)$, которое при $s = y$ совпадает с решением системы интегральных уравнений (1.4): $u(x, y) = u_1(x, y, y)$, $v(x, y) = v_2(x, y, y)$.

Список литературы

1. Алексеенко С.Н., Панков П.С., Косов С.Г. Применение метода дополнительного аргумента к решению задачи Коши для системы уравнений изоэнтропического движения баротропного газа //Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып.33.– С.43–48.

2. Alekseenko S.N. A basic scheme to investigate two first order quasi-linear partial differential equations //Analytical and Approximate Methods/ H.-P. Blatt, R. Felix, L.G. Lelevkina, M. Sommer (Eds.).–Aachen: Snaker Verlag, – 2003.–P.1–14.

3. Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Круц К.Г. Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в гиперболическом случае //Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып.35. – С.142–147.

4. Шемякина Т.А.Построение расширенной характеристической системы для системы Франкля в гиперболическом случае //Труды Средневолжского математического общества.–2007.– Т. 9, № 1. – С.264–273.

Conditions for the existence and differentiability of solutions of Frankl in the hyperbolic case.

© **T. A. Shemyakina**[2]

Abstract. We have obtained the conditions of existence and differentiability of solutions of the system of two quasilinear differential partial equations of the first order. The basic research technique is the method of additional argument.

Key Words: Differential partial equations of the first order, the method of additional argument, the extended characteristic system.

[2]Associate professor of the higher mathematics Chair, St.-Petersburg State Polytechnic university, St.-Petersburg, sh tat @ mail.ru.