УДК 519.71

Системы с переменной структурой при наличии малых параметров

© Сафонкин В.И.[1]

Аннотация. Статья посвяшена изучению систем с переменной структурой при наличии в рей малых параметров. Полученные результаты могут быть использованы при построении релаксационных колебаний в физических системах.

Ключевые слова: система с переменной структурой, малый параметр

Известно, что наличие малых параметров в математических моделях систем с переменной структурой связано с необходимостью учета малых по величине физических величин в исследуемом объекте. Более того, их отбрасывание может приводить к неадекватности модели. В связи с этим, при решении прикладных задач вопрос о необходимости учета малых параметров или возможности их отбрасывания в процессе составлении математической модели играет существенную роль [3]. В других случаях этот вопрос связан с желанием исследователя упростить модель путем понижения ее порядка. Имеются, очевидно, и другие мотивы оценки влияния малого параметра на поведение решений таких систем. Вопрос учета малого параметра, как известно, для систем с гладкими правыми частями в определенной мере решается в рамках исследований сингулярных систем [2].

Постановка задачи. При исследовании систем с переменной структурой, в случае наличия в них малых параметров, применении подходов, используемых в обычных сингулярных системах, оказывается не возможным в силу разрыва функций, входящих в правые части уравнений исследуемой системы. Это связано с тем, что даже незначительное изменение параметров приводит к резким изменениям в поведении таких систем. В связи со сделанными замечаниями, естественно, встает вопрос оценки малого параметра на предмет возможности его отбрасывания в моделях вообще или установления границ его изменения, в которых свойства реальной системы сохраняется. Решению этой задачи и посвящается данная статья.

Решение задачи. Далее будем рассматривать систему с переменной структурой вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,y,\mu,u(t,x,y)), \tag{0.1}$$

$$\mu\frac{dy}{dt} = g(t,x,y,\mu), \tag{0.2}$$

где $x \in R^n$, $y \in R^l$, $f(t,x,u)$ - непрерывная по совокупности аргументов функция. Управляющая функция $u(t,x,y) \in \Re^m$ претерпевает разрыв первого рода на некоторой поверхности $S(t)$, задаваемой уравнением $s(t,x_1,...,x_n) = 0$ и представляющая собой множество M меры нуль, состоящее из точек границ областей $s_i(t,x,y) > 0$ и $s_i(t,x,y) < 0$, $i = 1,2,...n$.

Таким образом, функция $f(t,x,u(t,x,y))$ является непрерывной вплоть до общей границы указанных областей. Функция $g(t,x,y,\mu) \in C(D)$, $D = ([t_0,+\infty), R^n, R^l, \mu \in (0,\mu_0))$, μ- малый положительный параметр.

Области $s(t,x) > 0$ и $s(t,x) < 0$ будем называть областями однозначности функции $u(t,x,y)$. В этих областях соответственно: $u_i(t,x,y) = u_i^{(1)}(t,x,y)$, $i = 1,2...n$ при $s_i(t,x,y) > 0$ и $u_i(t,x,y) = u_i^{(2)}(t,x,C)$ при

[1]Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск

$s_i(t,x,y) < 0$. Функции $u_i^{(1)}(t,x,y)$ и $u_i^{(2)}(t,x,y) \in C([t_0,+\infty) \times R^n \times R^l)$.

Наряду с системой (0.1)-(0.2) будем рассматривать доопределенную систему, полученную в предположении $\mu = 0$ по следующей схеме:

1) из уравнения

$$g(t,x,y) = 0 \tag{0.3}$$

выражаем быструю координату $y = \varphi(t,x)$ и подставляем ее как в уравнение (0.1), так и в выражения $s_i(t,x,y)$;

2) методом эквивалентного управления [2] в предположении $\dot{s}(t,x) = 0$ в силу системы (0.1) находим выражение функции $u(t,x)$ и подстановкой ее в уравнение (0.1) получаем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \psi(t,x), \tag{0.4}$$

где $\psi(t,x) \in C([t_0,+\infty) \times R^n)$, $x \in R^n$, описывающее движение на многообразии $S^*(t)$ ($s^*(t,x) = 0$) ;

3) тем же методом доопределяем систему (0.1) вне поверхности $S^*(t)$ в предположении, что $\dot{s}(t,x) \neq 0$. В результате доопределения получим систему

$$\frac{dx^*}{dt} = f(t,x^*,\bar{u}(t,x^*)), \tag{0.5}$$

где $\bar{u}(t,x^*)$ управление, полученное в процессе доопределения системы (0.1) вне многообразия $S^*(t)$.

Предложенной процедурой фактически произведено разделение движений в системе на быстрые, которые описываются уравнением (0.2) при малых значениях μ, и медленные, описываемые уравнением (0.5). Такой процедурой мы произвели переход при исследовании исходной системы из пространства размерности $n + l$ в пространство меньшей размерности порядка n. При этом правомерен вопрос: являются ли *эквивалентными* движения, описываемые системой (0.1) и системой (0.5), полученной в процессе доопределения? То есть, имеет ли место $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x^*(t)$? Очевидно, этого можно ожидать только в том случае, когда в достаточно малый интервал времени при значениях $t > t_0$ быстрые колебания «затухают».

Фактически задача сводится к установлению условий на функции правых частей системы и малый параметр μ, при которых можно указать алгоритм изучения медленных движений. В решении указанной задачи необходимо показать, что при наложенных условиях быстрые колебания затухают, а движениями на многообразии $S^*(t)$ можно моделировать медленные движения.

1. Сходимость быстрых движений.

Под сходимостью быстрых движений будем понимать их асимптотическую устойчивость относительно многообразия $S^*(t)$. Решение такой задачи фактически сводится к сравнению решений систем (0.4), описывающих движение на многообразии $S^*(t)$, и решений системы (0.5), описывающей движение в некоторой окрестности данного многообразия.

Предлагается такое сравнение выполнить на основе введения функции $V(t,z,s(z))$, где $z = x^* - x$. Будем предполагать, что введенная функция обладает свойствами:

$$1) V(t,z,s) \in C([t_0,+\infty) \times R^n \times R^m); V(t,0,0) = 0;$$

$$2) \|z\| \leq V(t,z,s) \leq k(t)\, \|z\|, t \geq t_0, V \in R^n, k(t) \in C([t_0,+\infty)\, , R^1_+);$$

$$3)\left|\left|V(t,z_1,s)-V(t,z_2,s)\right|\right|\le k(t)\left\|z_1-z_2\right\|,\forall z_1,z_2\in R^n;$$

$$4)\overline{\lim_{\delta\to+0}}\frac{1}{\delta}(V(t+h,z+\delta F,s(t+h))-V(t,z,s(t))\le\psi(t)V(t,z,s),\psi\in C([t_0,+\infty),R^1).$$

Здесь F есть функция правой части уравнения

$$\frac{dz}{dt}=f(t,z,s(z)).$$

В работе [5] показано, что при выполнении условия 2) обеспечивается непрерывная продолжимость решений системы (0.5) вправо при значении $t>t_0$, а условия 3)-4) обеспечивают их ограниченность.

Обратим внимание на то, что в решении данной задачи мы должны обращать внимание на три множества: $S(t)$; $S^*(t)$ и $\bar{S}(t)$. Как было отмечено выше первое множество состоит из точек поверхности $s(x)=0$, второе – из точек поверхности $s^*(\varphi(x))=0$ и третье из точек поверхности, описываемое уравнением $y=\varphi(x)$.

Оценим при помощи введенной функции близость решение системы (0.2) $y(t)$ и вырожденного решения $y^*(t)=\varphi(t,x^*)$ при значении $\mu=0$. Введем переменную $z=y-y^*$. Положим $V(t,z,\bar{s})=\|y-y^*\|$, где $\bar{s}=y-\varphi(t,x)$. Тогда производная функции V примет вид

$$\dot{V}=\varphi'_x(t,x)\cdot\dot{x}=\varphi'_x(t,x)\cdot f(t,x,\varphi(t,x),u^*)-\frac{1}{\mu}g(t,x,y),\tag{1.1}$$

где u^* есть доопределенная на многообразии $S^*(t)$ функция $u(t,x)$.

Таким образом $\dot{V}=\varphi'_x(t,x)\cdot\psi(t,x,u^*)-\frac{1}{\mu}g(t,x,y)$. Требуя $\dot{V}<0$, имеем:

А) $\varphi'_x\psi(t,x,u^*)<0$ в областях однозначности функции $u^*(t,x)$;

Б) $\frac{1}{\mu}g(t,x,y)$ будет ограничена в областях однозначности значением $L\|y\|$, где $L-Const$, $L>0$.

В) в областях однозначности функции управления при выполнении условий А) и Б) должно иметь место соотношение $|\varphi'_x(t,x)\cdot\psi(t,x,u^*)|>\frac{1}{\mu}g(t,x,y)$, $t\in[t_0,+\infty)$

Из изложенного выше следует справедливость утверждения

Теорема 1.1. *Если в системе* (0.1) – (0.2) *функции правых частей удовлетворяют сделанным предположениям. Кроме того, выполнены условия А), Б) и В), то быстрая координата движения $y(t)$ через некоторое время попадает в $\delta-$ окрестность многообразия $S^*(t)$.*

Действительно, если выполнено условие А), то медленная составляющая движений фактически оказывает положительное влияние на стабилизацию быстрых движений в системе. Второй член в выражении производной функции $V(t,x.y)$ может менять знак на множестве $g(t,x,y)=0$. Однако, в областях однозначности в окрестности многообразия $S^*(t)$ при выполнении условия В) знак производной функции $V(t,x.y)$ остается отрицательно постоянным. Эти замечания и устанавливают справедливость сделанного утверждения. Т.е. при $t\to+\infty$ изображающая точка траектории быстрых движений окажется в достаточно малой окрестности многообразия $S^*(t)$.

Приведем примеры, подтверждающие сделанные утверждения.

Пример 1.1. *Рассмотрим систему второго порядка*

$$\frac{dx_1}{dt}=-x_2+Sign(s),$$

$$\mu\frac{dx_2}{dt}=x_1-2x_2,\tag{1.2}$$

Где μ- малый положительный параметр, $s = x_1 + x_2 - b$, $b-$ $Const, b > 0$. Положив $\mu = 0$ и заменив в первом уравнении переменную x_2 выражением $x_2 = \frac{1}{2}x_1$, будем иметь уравнение

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{2}x_1 + Sign(s^*),$$

описывающее медленные движения. Тогда многообразие $S^*(t)$, на котором управление претерпевает разрыв, примет вид $s^* = \frac{3}{2}x_1 - b = 0$. Возьмем функцию V в виде $V = \|s^*\|$. Ее производная в силу системы (1.2) примет вид $\dot{V} = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{2}Sign(s^*)$. Потребовав выполнение соотношения $\dot{V} < 0$, нетрудно видеть, что оно выполняется для всех значений $x_1 > 2$ в области $s^* > 0$ и всех значений $x_1 > 0$ в области $s^* < 0$. Таким образом, производная функции V имеет отрицательный знак в обеих областях однозначности при значениях $x_1 > 2$. Это означает, что из достаточно малой окрестности многообразия $s^* = 0$ траектории решений притягиваются к этому множеству.

Аналогичное утверждение имеет место, если потребовать выполнение соотношений $\lim \dot{s}^* < 0$ при $s^* \to +0$ и $\lim \dot{s}^* > 0$ при $s^* \to -0$.

Таким же образом оценим множество $g(x_1, x_2, 0) = x_1 - 2x_2 = 0$ на предмет его устойчивости относительно быстрых траекторий. Для этого введем переменную $z = x_2^* - x_2$, где x_2^*- координата движения по поверхности $s^*(x_1, x_2) = 0$, а x_2- координата быстрых движений вне поверхности $S^*(t)$.

Тогда в качестве функции можно принять $V = \|z\|$. Полагая $\mu = 0$, в силу системы будем иметь

$$\dot{V} = \frac{1}{\mu}g(x_1, x_2) + \frac{1}{2}(x_2 - Sign(s^*)). \tag{1.3}$$

Анализируя выражение правой части соотношения (1.3), нетрудно видеть, что в областях однозначности управления $u(x_1, x_2)$ в некоторой окрестности множества $S^*(t)$ функция $\dot{V}$ имеет отрицательный знак при выполнении условий:

1) в области $s^*(x_1, x_2) > 0$ $x_2 < 1 - \frac{2}{\mu}g(x_1, x_2)$;

2) в области $s^*(x_1, x_2) < 0$ $x_2 < -1 + \frac{2}{\mu}g(x_1, x_2)$.

3) в обеих областях однозначности при выполнении условий А) и Б) должно иметь место $x_2 < \min\left\{1 - \frac{2}{\mu}g(x_1, x_2), -1 + \frac{2}{\mu}g(x_1, x_2)\right\}$.

В силу непрерывности функции $g(x_1, x_2)$ можно всегда выбрать такую $\delta-$ окрестность многообразия переключения, условия А) — В) будут выполнены.

П р и м е р 1.2. *Рассмотрим систему вида*

$$\begin{aligned} &\tfrac{dx}{dt} = cy - \rho Sign(y + x), \\ &\tfrac{dy}{dt} = -ky + Sign(y + x), \\ &\mu\tfrac{dz}{dt} = \mu z - x - y, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где $Sign(y+x) = u(x, y)$, $c, k, \rho-$ положительные константы. Положив в (1.4) значение $\mu = 0$, будем иметь систему, описывающую поведение решений в двухмерном пространстве R^2.

$$\begin{aligned} &\tfrac{dx}{dt} = cy - \rho u(x, y), \\ &\tfrac{dy}{dt} = -ky + u(x, y), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где управляющая функция $u(x, y)$ претерпевает разрыв на множестве $S^*(t)$. Методом эквивалентного управления [1] система (1.5) на множестве $s^*(t) = 0$ приводится к виду

$$\begin{aligned} &\tfrac{dx}{dt} = cy - \rho\tfrac{k-c}{1-\rho}, \\ &\tfrac{dy}{dt} = -ky + \tfrac{k-c}{1-\rho}, \end{aligned} \tag{1.6}$$

где $\frac{k-c}{1-\rho}$ есть выражение доопределенного управления $\bar{u}(x,y)$ на данном множестве.

Аналогичным образом, в предположении $\dot{s}^* \neq 0$, получим систему

$$\begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = cy - \rho\frac{ky-cy+\dot{s}}{1-\rho}, \\ \frac{dy}{dt} = -ky + \frac{ky-cy+\dot{s}}{1-\rho}, \end{array} \tag{1.7}$$

описывающая поведение движений системы вне множества $S^*(t)$. Вводя обозначения: $x = x_1, y = x_2,$ система (1.6) примет вид

$$\begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = cx_2 - \rho\frac{k-c}{1-\rho}, \\ \frac{dx_2}{dt} = -kx_2 + \frac{k-c}{1-\rho}, \end{array} \tag{1.8}$$

а, вводя обозначения: $x = y_1, y = y_2$, система (1.7) приводится к виду

$$\begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = cy_2 - \rho\psi(y_1,y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} = -ky + \psi(y_1,y_2), \end{array} \tag{1.9}$$

где $\psi(y_1,y_2) = \frac{(k-c)y_2+\dot{s}}{1-\rho}$.

Напомним, здесь система (1.8) описывает поведение решений на множестве $S^*(t)$, а система (1.9) - вне этого множества. Проведем сравнение решений указанных систем, для чего введем функцию $V = \|y-x\|$, производная которой в силу систем (1.7) и (1.8) примет вид

$$\begin{array}{l} \dot{V} = [(y_1-x_1)(\dot{y}_1-\dot{x}_2) + (y_2-x_2)(\dot{y}_2-\dot{x}_2)] \cdot [(y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2]^{-\frac{1}{2}} = \\ = \frac{(y_1-x_1)\$_1(x_2)+(y_2-x_2)\$_2(x_2)}{\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}} \cdot (-\frac{\rho}{1-\rho}) \end{array},$$

где $\Phi_1(x_2) = [(k-c)x_2 - \dot{s} - (k-c)]$, $\Phi_2(x_2) = [(k-c)x_2 - \dot{s} + (k-c)]$.

Если предположить, что функции Φ_1 и Φ_2 невозрастающие по переменной x_2 в областях однозначности, а параметр ρ своим значением удовлетворяет неравенству $0 \leq \rho < 1$, то имеем $\dot{V} \leq 0$. Кроме того, видно, что при $\|y-x\| = 0$ функция V обращается в ноль.

Таким образом, при сделанных предположениях введенная функция V удовлетворяет требованиям 1) $\div$ 4). Это означает, что при $t \to +\infty$ все решения системы из областей однозначности $s^* > 0$ и $s^* < 0$ попадают в сколь угодно малую окрестность многообразия $S^*(t)$.

<u>Выводы</u>. Приведенные выше примеры показывают, что доопределенная по предложенной схеме исходная система в предположении $\mu = 0$ и при наложении дополнительных условий на функции правых частей может содержать скользящие режимы, которые описывают медленные движения в исходной системе (0.1) - (0.2). Как известно, наличие или отсутствие медленных режимов в реальных системах, описываемых системой (0.1)-(0.2), является весьма важным для практики. Напомним, что примером 1, мы показали возможность гашения быстрых колебаний в окрестности многообразия $g(x,y,0) = 0$, а примером 2 установлен факт существования в системах с переменной структурой при наличие в них малых параметров скользящих режимов.

Оказывается: если функция $\psi(t)$ в условии 4) удовлетворяет соотношению $\psi(t) \leq 0, t \in [t_0, +\infty)$ и выполнено условие $F(t,0,0) \equiv 0$, то в силу [5] для любого решения $z(t : t_0, x_0, s(t_0))$ имеет место $\|z(t : t_0, z_0, s(t_0)\| \leq N$ для всех $t \geq t_0, N - const$. А это означает, что $\lim\limits_{t\to+\infty} \|z(t : t_0, z_0, s(t_0)\| = 0$, т.е. любое решение системы (0.5) попадает в $\delta-$ окрестность поверхности S $(s(t,x) = 0)$, $x \in R^n$ при $t \to +\infty$.

2. Исследование медленных движений.

В дальнейшем будем рассматривать три множества: $S^*(t); \bar{S}(t)$ и $S_k(t)$. Первое множество определяется уравнением $s(t,x,y,0)=0$, второе – уравнением $g(t,x,y,0)=0$, а третье уравнением $s(t,x,y,\mu_k)=0$, $\mu_k \in (0,\mu_*)$.
Будем предполагать, что при $\mu \to 0$, в моменты времени t_k, $k=1,2,...$ значения μ образуют монотонно убывающую последовательность $\{\mu_k\}$.

При доопределении [2], уравнение (0.1), описывающее медленные движения, может быть заменено дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x,y,U_k(t,x)), \tag{2.1}$$

где ограниченное, замкнутое и непустое множество, полученное при доопределении функции $u(t,x,y,\mu)$ на множестве $S_k(t)$, соответствующем значению $\mu_:$. При этом $u(t,x,y,\mu_k) \in U_k(t,x)$. Тогда соотношение (2.1) можно заменить дифференциальным включением

$$\frac{dx}{dt} \in F_k(t,x), \tag{2.2}$$

где множество $F_k(t,x) = f(t,x,y,U_k(t,x)$ отвечает доопределению системы (0.1) в точке $x(t)$ на множестве $S_k(t)$. Впредь в функции правой части системы (2.1) в силу малости значения параметра μ быструю переменную y будем рассматривать как параметр, т.к. при всех значениях $t_k \in [t_0,T)$ быстрая составляющая $y(t)$ движения в конечном промежутке времени практически сохраняет свое начальное значение y_0.
Предположим, что многозначное отображение в правой части (2.2) удовлетворяет следующим условиям:
1) $F_k(t,x)$ - выпуклые компакты для всех точек $(t,x)\in S_k(t)$, соответствующих значениям μ_k;
2) функция F_k - многозначное отображение $(t,x_k) \to F_k(t,x_k)$ непрерывно по совокупности аргументов, где $(t,x_k)\in S_k(t)$. Кроме того, для всех F_k имеет место $\alpha(F(t,x_k),F(t,x^*)) \to 0$ при $x_k \to x^*$, $t - Const$. Здесь $\alpha(A,B) = \max\{\sup\limits_{a\in A}\rho(a,B), \sup\limits_{b\in B}\rho(b,A)\}$.

Введем несколько определений [3]-[4].

Определение 2.1. *Замкнутой окрестностью M^δ множества M будем называть множество точек, удовлетворяющих соотношению $\rho(x,M) \le \delta$. Очевидно M^δ - замкнутое множество.*

Определение 2.2. *Наименьшим выпуклым множеством coM множества M будем называть пересечение выпуклых множеств $A_1, A_2,,,,$ содержащих множество M.*

Определение 2.3. *Вектор-функцию $y(t)$ будем называть δ- решением (приближенным решением с точностью до δ) включения $\dot{x} \in F(t,x)$ с непрерывной функцией F, если на рассматриваемом интервале имеет место почти всюду $\dot{y}(t) \in F_\delta(t,y(t))$, где $F_\delta(t,y(t)) \equiv [coF(t^\delta,y^\delta)]^\delta$, $F(t^\delta,y^\delta)-$ пересечение множеств $F(t_1,y_1)$ для всех $t_1\in t^\delta, y\in y^\delta$, $|y_1-y|\le\delta$, $|t_1-t|\le\delta$.*

Определение 2.4. *Множество $F_*(t,x)$ для множеств $F_k(t,x)$, $k=1,2,...$ будем считать предельным множеством, если имеет место $\alpha(F_k(t,x),F_*(t,x^*)) \to 0$ при $x\to x^*$.*

О п р е д е л е н и е 2.5. *Если точка $(t^*, x^*) \in S^*(t)$ принадлежит области притяжения множества $S^*(t)$, то точку пересечения $p^*(t^*, x^*)$ траектории с множеством $S^*(t)$ будем называть точкой падения. Если в точке $p^*(t^*, x^*)$ траектория переходит в другую однозначную область, то будем ее называть точкой срыва.*

При введенных определениях сделаем следующие предположения:

1) для значений $\mu \in (0, \mu_0)$ существует сходящаяся последовательность $\{\mu_k\}$, т.е. $\mu_k \to \mu^*$ при $k \to \infty$;

2) каждому значению μ_k в пространстве R^l отвечает множество $S_k(t, \mu_k)$;

3) для каждого значения μ_k на множестве $S_k(t)$ существует точка падения (t, x_k) траектории из области однозначности. Как известно, при доопределении системы ( ) такой точке отвечает множество $F_k(t, x_k)$. Для значения $\mu = 0$ такой точкой будем считать точку $(t, x^*) \in S^*(t)$.

4)для каждой точки падения (t_k, x_k) существует замкнутая ее ε_k- окрестность, каждая точка которой удовлетворяет соотношению $\rho(x, x_k) \leq \varepsilon_k$. Такие множества будем обозначать M^{ε_k}. Для точки (t, x^*) - соответственно M^{ε_*}.

Т е о р е м а 2.1. *Если функция $F(t, x)$ непрерывна в точке (t_k, x_k), то в δ - окрестности этой точки можно выделить последовательность $\{\mu_k\}$, сходящуюся к этой точке, т.е. $\{x_k\} \to x^*$ при $k \to \infty$.*

Доказательство сделанного утверждения повторяет доказательство для непрерывной функции $f(x)$, приняв за предельное множество $F(t, x^*)$.

Т е о р е м а 2.2. *Если каждое из множеств M^{ε_k} - непустое, ограниченное и замкнутое, кроме того, они образуют вложенные подмножества в области $G \in R^l$ с радиусами r_{μ_k}, а последовательность μ_k является равномерно сходящейся с предельной точкой μ^*, то при $k \to \infty$ имеет место $\rho(M^{\varepsilon_k}, M^{\varepsilon_*}) \to 0$ (равносильно $x_k(t) \to x^* \in S^*(t)$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть r_{μ_k}- радиусы вложенных подмножеств. Причем, $r^*_\mu = \min\{r_{\mu_k}\}$. Тогда в соответствии с условием теорем в окрестности M^{ε_*} точки (t, x^*) при $k \to \infty$ будет расположена точка $(t, x_k) \in S_k(t)$, которая будет располагаться от точки (t, x^*) на сколь угодно малом расстоянии ρ. Очевидно, для последовательности $\{x_k\}$ точка (t, x^*) будет являться предельной при $r^*_\mu \to 0$. Действительно, если предположить, что существует другая предельная точка x_p, отстоящая от точки (t, x^*) на расстоянии большем r_{μ_k}, то множества M^{ε_*} и M^{ε_p} не пересекаются, что противоречит условию теоремы.

Как известно, множество $F_k(t, x_k)$ состоит из предельных точек значений функции $f(t, x, u(t, x))$ при $x_k \to x^*$. Среди таких значений находятся и векторы $f^+(t, x, u(t, x)) = \lim f$ при $x \to x^*$ в области $s^*(x) > 0$, $f^-(t, x, u(t, x)) = \lim f$ при $x \to x^*$ в области $s^*(x) < 0$.

Введем обозначение $f^+_{N_k}, f^-_{N_k}$ - соответственно проекции векторов f^+ и f^- на нормаль, проведенную к касательной плоскости множества $S_k(t)$ в точке (t, x_k).

О п р е д е л е н и е 2.6. *Множество точек, заключенных между векторами $f^+(t, x_k)$ и $f^-(t, x_k)$ и выпуклой оболочкой, натянутой на концы этих векторов, будем называть выпуклым конусом C_k.*

Т е о р е м а 2.3. *Если выполнены условия теорем 1 и 2, кроме того, для всех точек $x_k \in S_k(t)$ имеют место неравенства $f^+_{k-1} \geq f^+_k$ и $f^-_{k-1} \geq f^-_k$ для всех $x_k \in [x_{k-1}, x_k]$, то имеет место $\rho(F_{k-1}(t, x_{k-1}), F_k(t, x_k)) \to 0$ при $x_{k-1} \to x_k$.*

Действительно, если выполнены условия теорем 1-3, то выпуклые конусы C_k являются вложенными для всех $x_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Эти конусы будут содержаться между направляющими прямыми, лежащими на векторах $f^-_{N_k}$ и $f^+_{N_k}$. Это означает, что при $x_{k-1} \to x_k$, выпуклые оболочки, представляющие множества $F_{k-1}(t, x_{k-1})$ и $F_k(t, x_k)$ будут отстоять друг от друга на сколь угодно малую величину, т.е. имеет место $\rho(F_{k-1}, F_k) \to 0$. Доказанное утверждение влечет выполнение утверждение $\rho(F_{k-1}, F_*) \to 0$ при $x_k \to x^*$.

П р и м е р 2.1. *Рассмотрим систему*

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = 2Sign(2x_1 - x_2 + \mu) - Sign(2x_2 - x_1 + \mu),\\
&\dot{x}_2 = -2Sign(2x_1 - x_2 + \mu) + Sign(2x_2 - x_1 + \mu),\\
&\mu\dot{x}_3 = x_2 - x_1.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

где μ - малый положительный параметр. Доопределив систему () при $\mu = 0$, будем иметь систему вида

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = 2SignS^*_1 - SignS^*_2,\\
&\dot{x}_2 = -2SignS^*_1 + SignS^*_2
\end{aligned} \tag{2.4}$$

При значении $\mu = 0$ многообразия S^*_1 и S^*_2 совпадают с координатными осями Ox_2 и Ox_1 соответственно. Траекториями движения в областях однозначности являются отрезки прямых, соединяющих точки многообразий S^*_1 и S^*_2. При значении $\mu \neq 0$ такими многообразиями будут $x_1 = \mu$ и $x_2 = \mu$ (см. рисунок 1).

Множествами точек x_k на многообразиях S^*_1 и S^*_2 являются точки x_k на траекториях движения. Для каждой такой точки имеет место $f^-_{N_k} = f^+_{N_k}$. Выпуклыми конусами здесь являются треугольники, образованные векторами: $f^-_1(x_1, x_2)$; $f^-_1(x_1, x_2)$ и отрезками, соединяющие вершины этих векторов. Для любых двух точек x_{k-1} и x_k, лежащие на траектории движения, их конусы являются выпуклыми и вложенными. При этом нетрудно видеть, что при $\mu \to 0$ значение $\mu_{k-1} \to \mu_k$, а $x_{k-1} \to x_k$ для всех $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Таким образом, оказываются выполненными все требования как теоремы 3, так и теорем 1-2. Это означает, что расстояния между множествами F_{k-1} и F_k, образованные отрезками, соединяющими вершины векторов $f^=_k$ и f^+_k, стремятся к нулю при значениях $\mu \to 0$. Откуда следует, что при достаточно малых значениях μ решение $x^*(t)$ и решение $x_k(t)$, находящиеся в $\delta-$ окрестности множества $S^*(t)$, могут отличаться на сколь угодно малую величину $\varepsilon(\mu)$.

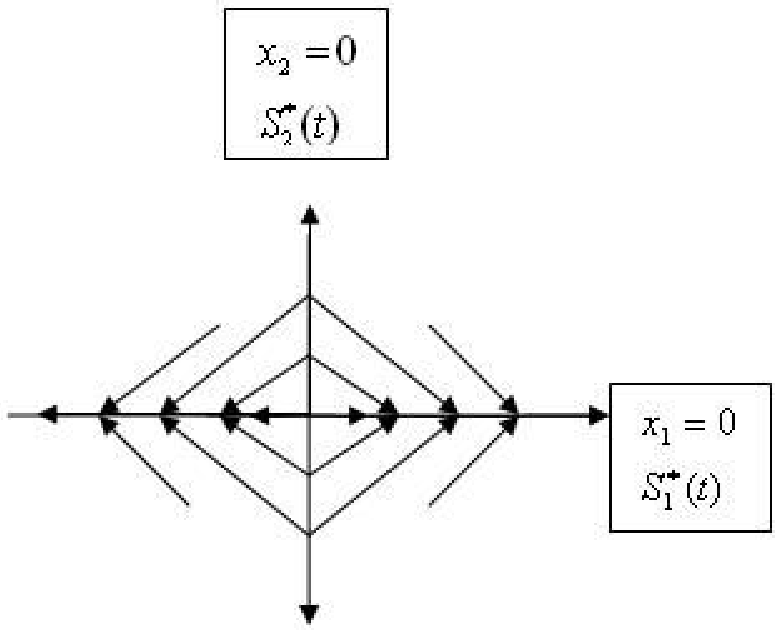

Рисунок **2.1**

Расположение траекторий в окрестности многообразий $S_1^*(t)$ и $S_2^*(t)$

Выводы. В этом пункте сделана попытка оценить влияние малого параметра на поведение в реальных системах медленных движений в предположении, что быстрые колебания стабилизируются в конечный промежуток времени. Полученные условия, обеспечивающие попадания траектории на многообразие разрыва управляющей функции и их сохранение в виде скользящих режимов, позволяют оценить допустимые значения малого параметра, обеспечивающие требуемый режим в изучаемой системе.

Список литературы

1. Емельянов С.В. Теория систем с переменной структурой. – М.: Наука,1970, – 592 с.

2. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 368 с.

3. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 223 с.

4. Пятницкий Е.С. Избранные труды (теория управления). Т.1. – М.: Физматлит, 2004. – 382 с.

5. Сафонкин В.И. Асимптотика поведения решений систем с переменной структурой // Труды Средневолжского математического общества. Саранск: Из-во СВМО, 2005. Т7, №1. – С. 251-256.

Sistem with variable structure in the presence of small parameter

© **V.I. Safonkin** [2]

Abstract. The article is devoted to studying the behavior of system with variable structure in the presence of small parameter. These results can be useful in studying relaxation oscillations in physical devices.

Key Words: system with variable structure; small parameter.

[2]Associate professor of applied mathematics chair, Mordovian State University, Saransk