УДК 517.92

Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных

© **В. И. Никонов**[1]

Аннотация. В работе получены необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений относительно заданных переменных. Установлена взаимосвязь между инвариантным подпространством линейного оператора, описывающего динамику системы и частичной устойчивостью. Рассмотрена задача робастной частичной устойчивости.

Ключевые слова: частичная устойчивость, инвариантное подпространство, минимальный многочлен.

1. Системы линейных дифференциальных уравнений

Пусть поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A^* x(t), \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n, A^* \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

К настоящему времени получены критерии устойчивости по заданной части координат фазового вектора линейной автономной системы вида (1.1), например, в работах [1],[2]. Следует отметить, что этими результатами уже нельзя воспользоваться если предположить, что матрица A^* системы (1.1) известна с определенной степенью точности, например, интервальная. Можно сказать, что эти методы чувствительны к изменениям коэффициентов матрицы системы.

В данной работе предлагается геометрический подход, позволяющий в некоторых случаях исследовать робастную устойчивость системы (1.1) по отношению к части переменных.

Предположим, что исследуется устойчивость по первой координате фазового вектора x системы (1.1). Обозначим первую координату фазового вектора через y, а остальные компоненты составят вектор z. В связи с этим, систему (1.1) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ay + b^T z, \\ \frac{dz}{dt} &= cy + Dz, \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}^{n-1}, a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^{n-1}, c \in \mathbb{R}^{n-1}, D \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}, T$-знак операции транспонирования.

Предположим, что многочлен

$$\sigma(\lambda) = \lambda^s + \gamma_1\lambda^{s-1} + \cdots + \gamma_{s-1}\lambda + \gamma_s,$$

где $0 \le s \le n-1$, является минимальным аннулирующим многочленом вектора b^T относительно линейного оператора, заданного матрицей D. Тогда справедливо соотношение

[1]Доцент кафедры дифференциальных уравнений, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; nikonovvi1970@rambler.ru.

$$b^T D^s + \gamma_1 b^T D^{s-1} + \dots + \gamma_{s-1} b^T D + \gamma_s b^T = 0. \tag{1.3}$$

Следует отметить, что в этом случае [3] , векторы $b^T, b^T D, \dots, b^T D^{s-1}$ образуют базис инвариантного циклического подпространства в $\mathbb{R}^{n-1}$.

Покажем, каким же образом устойчивость переменной y связана с этим подпространством.

Продифференцируем первое уравнение системы (1.2) по переменной t в силу второго уравнения этой системы, получим

$$\frac{d^2y}{dt^2} = a\frac{dy}{dt} + b^T cy + b^T Dz. \tag{1.4}$$

Аналогично, второе дифференцирование уравнения (1.4) дает

$$\frac{d^3y}{dt^3} = a\frac{d^2y}{dt^2} + b^T c\frac{dy}{dt} + b^T Dcy + b^T D^2 z.$$

Тогда на $s-1$ и s-м шаге, получаем соответственно, уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^s y}{dt^s} &= a\frac{d^{s-1}y}{dt^{s-1}} + b^T c\frac{d^{s-2}y}{dt^{s-2}} + b^T Dc\frac{d^{s-3}y}{dt^{s-3}} + \dots + b^T D^{s-2}cy + b^T D^{s-1}z, \\ \frac{d^{s+1}y}{dt^{s+1}} &= a\frac{d^s y}{dt^s} + b^T c\frac{d^{s-1}y}{dt^{s-1}} + b^T Dc\frac{d^{s-2}y}{dt^{s-2}} + \dots + b^T D^{s-1}cy + b^T D^s z. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} &\frac{d^{s+1}y}{dt^{s+1}} + \gamma_1\frac{d^s y}{dt^s} + \dots + \gamma_s\frac{dy}{dt} = a\frac{d^s y}{dt^s} + \sum_{j=0}^{s-1} b^T D^j c\frac{d^{s-1-j}y}{dt^{s-1-j}} + \\ &+\gamma_1\left(a\frac{d^{s-1}y}{dt^{s-1}} + \sum_{j=0}^{s-2} b^T D^j c\frac{d^{s-2-j}y}{dt^{s-2-j}}\right) + \dots + \gamma_{s-1}\left(a\frac{dy}{dt} + b^T cy\right) + \gamma_s ay + \\ &+ \left(b^T D^s + \gamma_1 b^T D^{s-1} + \dots + \gamma_s b^T\right) z. \end{aligned}$$

Наконец, учитывая (1.3), приходим к линейному однородному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} &\frac{d^{s+1}y}{dt^{s+1}} + (\gamma_1 - a)\frac{d^s y}{dt^s} + (\gamma_2 - a\gamma_1 - b^T c)\frac{d^{s-1}y}{dt^{s-1}} + \dots \\ &+(\gamma_s - a\gamma_{s-1} - b^T c\gamma_{s-2} - \dots - b^T D^{s-3}c\gamma_1 - b^T D^{s-2}c)\frac{dy}{dt} - \\ &-(a\gamma_s + b^T c\gamma_{s-1} + b^T Dc\gamma_{s-2} + \dots + b^T D^{s-2}c\gamma_1 + b^T D^{s-1}c)y = 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Следовательно, вопрос об устойчивости системы (1.2) по переменной y сводится к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения (1.5). Тогда справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1.1. *Если s степень минимального аннулирующего многочлена вектора b^T относительно линейного оператора, заданного матрицей D, то для того, чтобы система* (1.2) *была y-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения (*(1.5) *было устойчивым.*

Т е о р е м а 1.2. *В предположениях теоремы 1.1., для того, чтобы система* (1.2) *была асимптотически y-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы многочлен*

$$\begin{aligned} &P_s(\lambda) = \lambda^{s+1} + (\gamma_1 - a)\lambda^s + (\gamma_2 - a\gamma_1 - b^T c)\lambda^{s-1} + \dots \\ &+(\gamma_s - a\gamma_{s-1} - b^T c\gamma_{s-2} - \dots - b^T D^{s-3}c\gamma_1 - b^T D^{s-2}c)\lambda - \\ &-(a\gamma_s + b^T c\gamma_{s-1} + b^T Dc\gamma_{s-2} + \dots + b^T D^{s-2}c\gamma_1 + b^T D^{s-1}c) = 0 \end{aligned}$$

был устойчивым.

Следствие 1.1. *Если $s = n - 1$, то система (1.2) приводима к дифференциальному уравнению n-го порядка относительно переменной y. В этом случае характеристическое уравнение системы (1.2) совпадает с характеристическим уравнением дифференциального уравнения (1.5), а, следовательно, y-устойчивость системы (1.2) возможна лишь в случае устойчивости системы по всем координатам фазового вектора x.*

Следствие 1.2. *Если $s = k < n - 1$, то в системе (1.1) можно выделить подсистему k-го порядка, относительно переменной y и некоторых дополнительных переменных. При этом, интегрирование системы (1.1) сводится к последовательному интегрированию двух подсистем порядка k и $n - k$, соответственно.*

Замечание 1.1. *Постоянные $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, присутствующие в уравнении (1.5) можно выразить через числовые коэффициенты системы (1.2). Для этого достаточно умножить скалярно (1.3) справа последовательно на векторы $b, D^T b, \ldots, (D^T)^{s-1} b$ и решить полученную систему линейных уравнений относительно $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$.*

Замечание 1.2. *Если требуется исследовать устойчивость фазового вектора системы (1.1)) по нескольким переменным, то для этого, последовательно, представляем систему (1.1) в виде (1.2), где y – другая интересующая нас переменная и используем теорему 1.1..*

2. Системы линейных разностных уравнений

Рассмотрим линейную разностную систему вида

$$x(t+1) = A^* x(t), \tag{2.1}$$

где $x \in R^n, A$ – постоянная матрица соответствующих размеров. Так же будем предполагать, что исследуется на устойчивость первая координата фазового вектора x. В связи с чем, представим систему (2.1) в виде

$$\begin{aligned} y(t+1) &= ay(t) + b^T z(t), \\ z(t+1) &= cy(t) + Dz(t). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Пусть минимальный аннулирующий многочлен вектора b^T имеет вид (1.3).

Проведем аналогичные рассуждения и в данном случае.

Из первого уравнения системы (2.1) следует

$$y(t+2) = ay(t+1) + b^T z(t+1),$$

Откуда в силу второго уравнения этой системы имеем

$$y(t+2) = ay(t+1) + b^T cy(t) + b^T Dz(t).$$

Таким образом, на s-м шаге (s- степень минимального многочлена (1.3)) приходим к уравнению

$$y(t+s+1) = ay(t+s) + b^T cy(t+s-1) + \cdots + b^T D^{s-1} cy(t) + b^T D^s z.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\begin{array}{l} y(t+s+1)+\gamma_1 y(t+s)+\cdots+\gamma_s y(t+1)= \\ =ay(t+s)+\sum\limits_{j=0}^{s-1} b^T D^j cy(t+s-j-1)+ \\ +\gamma_1\left(ay(t+s-1)+\sum\limits_{j=0}^{s-2} b^T D^j cy(t+s-j-2)\right)+\cdots \\ +\gamma_{s-1}\big(ay(t+1)+b^T cy(t)\big)+\gamma_s ay(t)+ \\ +\big(b^T D^s+\gamma_1 b^T D^{s-1}+\cdots+\gamma_s b^T\big)\, z(t). \end{array} \tag{2.3}$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$\begin{array}{l} y(t+s+1)=(\gamma_1-a)y(t+s)+(\gamma_2-a\gamma_1)y(t+s-1)+\cdots \\ +(\gamma_s-a\gamma_{s-1}-b^T c\gamma_{s-2}-\cdots-b^T D^{s-3}c\gamma_1-b^T D^{s-2}c)y(t+1)- \\ -(a\gamma_s+b^T c\gamma_{s-1}+b^T Dc\gamma_{s-2}+\cdots+b^T D^{s-2}c\gamma_1+b^T D^{s-1}c)y(t)=0. \end{array} \tag{2.4}$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. *Если s степень минимального аннулирующего многочлена вектора b^T относительно линейного оператора, заданного матрицей D, то для того, чтобы система* (2.1) *была y-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения* (2.4) *было устойчивым.*

3. Системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Данный подход применим и к исследованию y-устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Исследуем y-устойчивость системы вида

$$\frac{dx(t)}{dt}=A^* x(t-\tau), \tag{3.1}$$

где $x\in R^n, \tau=const, A^*$-постоянная матрица соответствующих размеров.

Представим систему (3.1)) в виде

$$\begin{array}{l} \dfrac{dy(t)}{dt}=ay(t-\tau)+b^T z(t-\tau), \\ \dfrac{dz(t)}{dt}=cy(t-\tau)+Dz(t-\tau). \end{array} \tag{3.2}$$

Далее, дифференцируя первое уравнение системы (3.2), получим

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2}=a\frac{dy(t-\tau)}{dt}+b^T\frac{dz(t-\tau)}{dt},$$

откуда следует, что справедливо соотношение

$$\frac{d^2y(t+\tau)}{dt^2}=a\frac{dy(t)}{dt}+b^T\frac{dz(t)}{dt},$$

которое в силу второго уравнения системы (3.1) приводит к уравнению

$$\frac{d^2y(t+\tau)}{dt^2}=a\frac{dy(t)}{dt}+b^T cy(t-\tau)+b^T Dz(t-\tau).$$

Проведя аналогичные рассуждение к полученному уравнению, имеем

$$\frac{d^3y(t+2\tau)}{dt^2} = a\frac{d^2y(t+\tau)}{dt^2} + b^T c\frac{dy(t)}{dt} + b^T Dcy(t-\tau) + b^T D^2 z(t-\tau).$$

Таким образом, на $s-1$-м и s-м шагах, получаем, соответственно, уравнения

$$\frac{d^s y(t+(s-1)\tau)}{dt^s} = a\frac{d^{s-1}y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-1}} + b^T c\frac{d^{s-2}y(t+(s-3)\tau)}{dt^{s-2}} + \cdots$$
$$+ b^T D^{s-1}cy(t-\tau) + b^T D^{s-1}z(t-\tau),$$

$$\frac{d^{s+1}y(t+s\tau)}{dt^{s+1}} = a\frac{d^s y(t+(s-1)\tau)}{dt^s} + b^T c\frac{d^{s-1}y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-1}} + \cdots$$
$$+ b^T D^s cy(t-\tau) + b^T D^s z(t-\tau).$$

Если предположить, что s степень минимальный аннулирующий многочлен вектора b^T относительно линейного оператора заданного матрицей D то приходим к уравнению

$$\begin{aligned}
&\frac{d^{s+1}y(t+s\tau)}{dt^{s+1}} + (\gamma_1 - a)\frac{d^s y(t+(s-1)\tau)}{dt^s} + \\
&+ \left(\gamma_2 - a\gamma_1 - b^T c\right)\frac{d^{s-1}y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-1}} + \cdots \\
&+ \left(\gamma_s - a\gamma_{s-1} - \cdots - b^T D^{s-3}c\gamma_1 - b^T D^{s-2}c\right)\frac{dy(t)}{dt} - \\
&- \left(a\gamma_s + b^T c\gamma_{s-1} + \cdots + b^T D^{s-2}c\gamma_1 + b^T D^{s-1}\right)y(t-\tau) = 0.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Следовательно, вопрос y-устойчивости системы (3.1) сводится к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения (3.3). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если s степень минимального аннулирующего многочлена вектора b^T относительно линейного оператора, заданного матрицей D, то для того, чтобы система* (3.1) *была y-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения* (3.3) *было устойчивым.*

Список литературы

1. Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1991. – 284 с.

2. Чудинов К.М. Критерий устойчивости по части переменных автономной системы дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 2003. – №4(491). – С. 67-72.

3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Geometric aspect of partial stability for linear systems

© V. I. Nikonov[2]

Abstract. In the paper sufficient and necessary conditions are obtained for a partial stability of the linear systems. The coupling is shown to the invariant subspase and a partial stability. In additional, a robust partial stability is discussed.

Key Words: Partial stability, invariant subspace, minimal polynomial.

[2]Instructor of Differential Equationes Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; nikonovvi1970@rambler.ru.