УДК 517.95

Представление потенциалов через фундаментальные решения для эллиптического уравнения высшего порядка

© Р. М. Мавлявиев[1], И. Б. Гарипов[2], С. М. Нураниева[3], Э. Д. Хусаинова[4]

Аннотация. В работе рассматривается эллиптическое уравнение высшего порядка с младшими членами. Сформулирована основная краевая задача. Построены потенциалы для решения этой задачи.

Ключевые слова: потенциалы, симметричная область, эллиптическое уравнение.

Пусть $\overline{D}$ верхняя половина ограниченной области, симметричная относительно плоскости Oxy, Γ – верхняя часть достаточно гладкой границы. Снизу $\overline{D}$ ограничена частью Γ_0 координатной плоскости Oxy. Обозначим: $\Delta_B u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{z^k}\left(z^k \frac{\partial u}{\partial z}\right)$, где $k > 0$.

Требуется найти решение уравнения

$$\Delta_B^m u + 2a\frac{\partial \Delta_B^{m-1} u}{\partial x} + 2b\frac{\partial \Delta_B^{m-1} u}{\partial y} - c^2 \Delta_B^{m-1} u = 0, \tag{1.1}$$

$$(a > 0, b > 0, c^2 > a^2 + b^2).$$

из класса

$$u \in C^{2m}(D) \bigcap C^{2m-1}(\overline{D}), \tag{1.2}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{\Gamma_0} = 0, \quad \left.\Delta_B^i u\right|_{\Gamma} = f_{2i}, \quad \left.\frac{\partial \Delta_B^i u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f_{2i+1}, \quad i = \overline{0, \left[\frac{m}{2}\right] + 1}. \tag{1.3}$$

Здесь $\Delta_B^0 u \equiv u$, n – внешняя нормаль, восстановленная в т. $P(\xi, \eta, \zeta) \in \Gamma$. Аналогичная задача на плоскости, при $m = 2$ рассматривалась в работе [1].

Ранее было установлено, что внутренняя краевая задача (1.1) – (1.3) не может иметь более одного решения [2].

Фундаментальные решения уравнения (1.1) с особенностью в начале координат имеют вид

$$\varphi_l = r^{2l-1-k}, \quad l = \overline{0, m-2}, \quad \varphi_{m-1} = r^{2m-3-k} + \psi_{m-1}, \tag{1.4}$$

где ψ_{m-1} имеет меньшую особенность чем r^{2m-3-k}.

Получены рекуррентные формулы для подсчета производной любого порядка от φ_l

$$\frac{\partial^j r^{2l-1-k}}{\partial n^j} = r^{2l-1-j} \sum_{i=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]} a_i \cos^{j-2i}\theta; \tag{1.5}$$

[1]Старший преподаватель кафедры математического анализа, Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань; mavly72@mail.ru.

[2]Доцент кафедры математического анализа, Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань; ilnur_garipov@mail.ru.

[3]Доцент кафедры математического анализа, Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань; sirinya_nuranieva@mail.ru.

[4]Доцент кафедры алгебры, Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань; ence_khusainova@mail.ru.

$$(a_i = a_{2(l+i-j)-1,2(l-i)-1}),$$

где

$$a_{2p-1,2q-1} = (p+p+1-k)a_{2p+1,2q-1} + (q-p+1)a_{2p-1,2q+1} \tag{1.6}$$

при $p \neq q \neq l$ и

$$a_{2p-1,2q-1} = a_{2p-1,2q+1} \tag{1.7}$$

при $p = q \neq l$. Если $q = l$ то коэффициент разложения представляется в виде произведения

$$a_{2p-1,2l-1} = \prod_{i=1}^{l-p}(2(l-i)+1-k), \tag{1.8}$$

причем, если к тому же еще и $p = l$, то

$$a_{2l-1,2l-1} = 1. \tag{1.9}$$

Через θ обозначен угол между внешней нормалью n и радиус вектором $\overrightarrow{r}$ точки P относительно точки $M(x,y,z) \in D$. Очевидно $r = |\overrightarrow{r}| = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$.

Мультипольные потенциалы

$$W_i(P) = C_k \int\limits_{\Gamma} \mu_i(M)\left(r^{i-3-k}\cos^{2n-i}\theta + \gamma_i\right)\eta^k d\Gamma, \quad i = \overline{1,m} \tag{1.10}$$

удовлетворяют уравнению (1.1) на Γ_0 т.к. их ядра, в силу формул (1.4) и (1.5) представляются в виде линейной комбинации фундаментальных решений и их нормальных производных. Заметим так же, что

$$\Delta_B(r^{-k-l}\cos^{m+l}\theta) = r^{-k-l-2}\cos^{m+l+2}\theta. \tag{1.11}$$

Решение краевой задачи ищется в виде суммы

$$u = \sum_{i=1}^{m} W_i(P). \tag{1.12}$$

В результате с использованием граничных условий (1.3) для непрерывных плотностей μ_i получается система интегральных уравнений II рода, которая по альтернативе Фредгольма разрешима. И в силу того, что решение уравнения не более одного, то она однозначно разрешима. При выводе интегральных уравнений приходится пользоваться предельными соотношениями. А при доказательстве последних, на границе Γ_0 нужно пользоваться представлениями (1.10) и (1.11).

Из рекуррентных формул (1.5)-(1.9), при $k = 0$ как частный случай получаются представления Лободзинской И.Г. [3]. Вывод предельных значений при $z > 0$ не вызывает затруднений. В этом случае фундаментальные решения с особенностью в произвольной точки M_0 имеют вид

$$\overline{\varphi_l} = T_M^{M_0}\varphi_l \tag{1.13}$$

где $T_M^{M_0}$ – оператор обобщенного сдвига Бесселя [4]. Эти фундаментальные решения лишь на слагаемое меньшей особенности отличаются от функций r^{2l-1-k}. Вместо потенциалов (1.10) надо воспользоваться потенциалами

$$W_i(P) = C_k \int\limits_{\Gamma} \mu_i(M)\left((yy_0)^{-\frac{k}{2}} r^{i-2}\cos^{2m-i}\theta + \overline{\gamma_i}\right)\eta^k d\Gamma, \quad l = \overline{1,m} \tag{1.14}$$

и практически повторить рассуждения Лободзинской И.Г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193).

Список литературы

1. Мавлявиев Р.М. Решение основной краевой задачи для одного В-эллиптического уравнения методом потенциалов // Труды Средневолжского математического общества. – 2000. – Т. 2, № 1. – С. 76-77.

2. Гарипов И.Б., Хусаинова Э.Д., Мавлявиев Р.М. Единственность решения B-эллиптического уравнения высшего порядка с младшими членами // Труды международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы". (24–28 июня 2008 г., г. Стерлитамак). — Уфа: Гилем, 2008. – Т. 1. – С. 51-53.

3. Лободзинская И.Г. Потенциалы основной краевой задачи для уравнения $\Delta^m u$ // Научный ежегодник ОГУ им. И.И. Мечникова. – 1961. – Вып. 2. – С. 107-110.

4. Вайнштейн А. Обобщение осесимметричной теории потенциала // Бюллетень Американского математического общества. – 1953. – Т. 59, № 1-3. – С. 20-38.

The expression of potentials in fundamental solutions for higher-order elliptic equation.

© R. M. Mavlyaviev[5], I. B. Garipov[6], S. M. Nuranieva[7], E. J. Khusainova[8]

Abstract. In this work higher-order elliptic equation with junior members is considered. The classic boundary value problems have been formulated. Potentials for solving this problem have been constructed.

Key Words: potentials, simmetric region, close-to-elliptic equation.

[5]Assistent of Mathematical Analysis Chair, Tatar State University of Humanities and Education, Kazan; mavly72@mail.ru.

[6]Docent of Mathematical Analysis Chair, Tatar State University of Humanities and Education, Kazan; ilnur_garipov@mail.ru.

[7]Docent of Mathematical Analysis Chair, Tatar State University of Humanities and Education, Kazan; sirinya_nuranieva@mail.ru.

[8]Docent of Algebra Chair, Tatar State University of Humanities and Education, Kazan; ence_khusainova@mail.ru.