УДК 519.71

Нерегулярная эллиптическая краевая задача с вырождением на границе

© **Д. И. Бояркин** [1]

Аннотация. В работе рассматривается нерегулярная краевая задача для эллиптического уравнения с вырождением на границе области. Гладкое многообразие вырождения может иметь коразмерность больше двух. Получены априорные оценки для решения задачи и определена его гладкость. При исследовании используются методы функционального анализа и геометрии гладких многообразий

Ключевые слова: эллиптические операторы, гладкое многообразие, преобразование Фурье, условие Лопатинского

1. Классификация многообразия вырождения коразмерности $k \geq 2$

Зависимость свойств решений граничной задачи от природы касания векторного поля границы вдоль многообразия коразмерности $k = 2$ и исследование этих свойств, впервые было проделано R. Borrelli в работе [1].

Пусть G - ограниченная область в R^n, $n \geq 3$, с кусочно-гладкой границей Γ^{n-1} и μ - гладкое векторное поле, определенное на Γ^{n-1}, касается Γ^{n-1} вдоль $(n-k)$ - мерного гладкого многообразия $\Gamma^{n-k}, k \geq 2$, но не касается Γ^{n-k}.

Определим гладкие $(n-i)$ - мерные многообразия $^{n-i}$, $2 \leq i \leq k-2$, таким образом, чтобы $\Gamma^{n-1} \supset \ldots \supset \Gamma^{n-i} \supset \ldots \supset \Gamma^{n-(k-1)} \supset \Gamma^k$. Многообразие Γ^k является ориентируемым в Γ^{k-1} с помощью поля μ. Пусть $\beta = \langle \mu, n \rangle$ - скалярное произведение μ и n, где n-вектор внешней нормали к Γ^{n-1} в точках Γ^{k-1}. В точках Γ^k функция $\beta = 0$. Обозначим через Γ^{k-1}_{+} множество точек Γ^{k-1}, в которых $\beta > 0$, а через Γ^{k-1}_{-} - множество точек Γ^{k-1}, где $\beta < 0$. Пусть $\beta^k = \langle \mu, n^k \rangle$ - скалярное произведение μ и n^k, где n^k - нормаль к Γ^k, лежащая в касательной плоскости к Γ^k и направленная в сторону Γ^{k-1}_{+}.

В зависимости от структуры поля μ $(n-k)$-мерное многообразие Γ^{n-k} отнесем к одному из классов:

- к первому классу, если $\beta > 0, \beta^k > 0$;
- ко второму классу, если $\beta > 0, \beta^k < 0$;
- к третьему классу, если $\Gamma^{k-1}_{+} = \varnothing$ либо $^{k-1}_{-} = \varnothing$.

Заметим что, так как поле μ не касается самого многообразия Γ^k, то Γ^k может относиться только к одному классу.

В настоящей работе рассматривается случай, когда Γ^k принадлежит к первому классу.

[1] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им Н.П. Огарева, г. Саранск; boyarkindi@gmail.com

2. Постановка задачи краевой задачи

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f \text{в} G, \tag{2.1}$$

$$\mu(x, D)u = \varphi \text{на} n - 1, \tag{2.2}$$

$$u = \varphi^k \text{на} n - k, \tag{2.3}$$

где L - эллиптический оператор второго порядка с гладкими коэффициентами; $\mu(x, D)$ - дифференцирование вдоль гладкого векторного поля μ.

Обозначим через N^{n-k} - $(n-k+1)$-мерное гладкое многообразие, проходящее через Γ^{n-k} трансверсально к полю μ. Продолжим гладким образом поля μ в достаточно малую окрестность Ω^k многообразия Γ^{n-k} в $N^{n-k+1} \bigcap G$. Так как Γ^{n-k} относится к первому классу, то каждую точку из Ω^k можно соединить с N^{n-k+1} интегральной кривой поля μ.

Далее, определим $(n-i+1)$-мерные плоскости нормалей N^{n-i} к , $2 < i \leq k-1$, проходящие соответственно через Γ^{n-i}. Заметим, что $N^{n-i} \in N^{n-i+1}$. Предположим, что в малой окрестности Ω многообразия Γ^{n-k} в G выполняется условие $[n_i, \mu] = 0$, где n_i - нормаль к плоскости N^{n-i}, $[\ ,\ ]$ - скобка Пуассона.

В работе Егорова Ю. В. - Кондратьева В. А. [1] при исследовании задачи с косой производной для эллиптического оператора второго порядка были предложены методы, которые основывались на теории эллиптических краевых задач и геометрии гладких многообразий. Эти методы позволяют исследовать краевые задачи для эллиптического оператора при более общих граничных условиях [2]. Подобные задачи возникают при моделировании явлений упругости, фильтрации и многих других физических процессов.

Теорема 2.1. *Если $u \in H_{s+1}(G)$, $d > 0$ - достаточно малое число и $s > \frac{3}{2}$, то существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от u, что*

$$C^{-1}\left(\|u\|_s + \|\mu(x,D)hu\|_s + \sum_{i=1}^{k-2}\|n_i(x,D)h^i u\|_s^{N^{n-i+1}} + \left\|h^k u\right\|_s^{N^{n-k}}\right) \leq$$

$$\leq \|f\|_{s-2} + \|\mu(x,D)hf\|_{s-2} + \sum_{i=1}^{k-2}\|n_i(x,D)h^i f\|_{s-2}^{N^{n-i+1}} + \left\|h^k f\right\|_{s-2}^{N^{n-k}} + + \|\varphi\|_{s-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{T-1}} +$$

$$\|h\varphi\|_{s-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-1}} + \sum_{i=1}^{k-2}\left(\|\varphi\|_{s-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}} + \|h^i\varphi\|_{s-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}}\right) + \left\|\varphi^k\right\|_{s-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{T-\pi}} + \|u\|_0 \leq$$

$$\leq C\left(\|u\|_s + \|\mu(x,D)hu\|_s + \sum_{i=1}^{k-2}\|n_i(x,D)h^i u\|_s^{N^{n-i+1}} + \left\|h^k u\right\|_s^{N^{n-k}}\right),$$

где $f = Lu$ в G, $\varphi = \mu(x,D)u$ на Γ^{n-1}, $\varphi^k = u$ на Γ^{n-k}, $h \in C^\infty(G)$ и $h = 1$ вне $\left(\frac{d}{2}\right)$ - окрестности многообразия Γ^{n-1}, $h^i \in C^\infty(G)$, $i = 2, ..., k-2$, причем h^i равна 1 в $\left(\frac{d}{2}\right)$ окрестности многообразия Γ^{n-i} и равна нулю вне d окрестности этого многообразия, $h^k \in C^\infty(G)$ и $h = 1$ вне $\left(\frac{d}{2}\right)$ - окрестности многообразия Γ^{n-k}.

Следствие 2.1. *Пространство решений однородной задачи*

- $Lu = 0$ *в* G
- $\mu(x, D)u = 0$ *на* $^{n-1}$

- $u = 0$ *на* $^{n-k}$

конечномерно

С л е д с т в и е 2.2. *Обозначим через* $\Pi_s(G)$ *пространство функций с конечной нормой*

$\|u\|_{\Pi_s(G)} = \|u\|_s + \|\mu(hu)\|_s + \sum_{i=1}^{k-1} \|n_i(h^i u)\|_s^{N^{n-i}} + \left\|h^k u\right\|_s.$

Через Γ_s^{n-i} $(i = 2, ..., k-1)$ *- пространства функций, определенных на* Γ^{n-i} *с конечной нормой*

$\|u\|_{\Gamma_S^{n-i}} = \|u\|_s^{n-i} + \|h^i u)\| \,\Gamma_{s+1}^{n-i},$

Γ_s^{n-1} *- пространство функций, определенных на* Γ^{n-1} *с конечной нормой*

$\|u\|_{\Gamma_S^{n-1}} = \|u\|_s^{\Gamma^{n-1}} + \|hu)\|_{s+1}^{\Gamma^{n-1}}$,

Γ_s^{n-k} *- пространство функций, определенных на* Γ^{n-k} *с конечной нормой*

$\|u\|_{\Gamma_S^{n-k}} = \|u\|_s^{\Gamma^{n-k}} + \|hu)\|_{s+1}^{\Gamma^{n-k}}$, *где* h , h^i h^k *функции, определенные в теореме 2.1.. Тогда область значений оператора*

$u \to (Lu, \mu(x, D)u|_{\Gamma^{n-1}}, n_i(x, D)u|_{\Gamma^{n-i}})\ u|_{\Gamma^{n-k}}, i = 2, \ldots, k-1,$ *действующего из*

$\Pi_s(G)$ *в* $\Pi_{s-2}(G) \times \Gamma_{s-\frac{3}{2}}^{n-1} \times \ldots \times \Gamma_{s-\frac{3}{2}}^{n-(k-1)} \times H_{s-\frac{3}{2}}(\Gamma^{n-k})$ *замкнута.*

Т е о р е м а 2.2. *Если многообразие* $^{\mathrm{n-k}}$ *принадлежит к первому классу и известно, что*

$u \in H_s(G), Lu \in H_s(G), \mu(x, D)u \in H_{s+\frac{1}{2}}(\Gamma^{n-1}), n_i(x, D)u \in H_{s+\frac{1}{2}}(\Gamma^{n-i}), i = 2, \ldots, k - 1, u \in H_{s+\frac{1}{2}}(\Gamma n - k)$, *где* $s > 0$ *то* $u \in H_{s+1}(G)$ *и существует такая постоянная* $C > 0$, *не зависящая от* u , *что*

$\|u\|_s \le C\,(\,\|f\|_{s-2} + \|\mu(x, D)hf\|_{s-2} + \sum_{i=1}^{k-2} \|n_i(x, D)h^i f\|_{s-2}^{N^{n-i+1}} + \left\|h^k f\right\|_{s-2}^{N^{n-k}} + \|\varphi\|_{s-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{T-1}} + \|h\varphi\|_{s-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-1}} + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\|\varphi\|_{s-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}} + \|h^i\varphi\|_{s-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}} \right) + \left\|\varphi^k\right\|_{s-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{T-\pi}} + \|u\|_s$
right)

Список литературы

1. Borrelli R. The singular, second order oblique derivative problem. –J. Math. and Mech., 1966, 51-81.

2. Бояркин Д. И. Одно обобщение задачи с косой производной. УМН, 1983, 38, 1(229), 157-158.

3. Егоров Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. - М.: Наука, 1984, 360 с.

4. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. О задаче с косой производной. – Матем. сб., 1969, 78, 148-176.

Irregular elliptic regional problem degenerating on border

© **D.I. Boyarkin** [2]

Abstract. In work the irregular regional problem for the elliptic equation is considered. Aprioristic estimations for the decision of a problem are received. At research methods of the functional analysis and geometry of smooth varieties are used

Key Words: elliptic operators, smooth variety, transformation Fourier, condition Lopatinsky

[2]Docent of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; boyarkindi@gmail.com