Краткие сообщения

УДК 517.937

Инвариантные меры одного класса квазиэндоморфизмов пространства Лебега

© **В. Г. Шарапов**[1]

Аннотация. В статье изучается построение инвариантной меры для одного класса квазиэндоморфизмов, задаваемых непрерывными нигде не дифференцируемыми отображениями. Рассматривается случай, когда инвариантная мера сосредотачивается на части пространства первоначальной меры меньше единицы.

Ключевые слова: Инвариантные меры; непрерывные нигде не дифференцируемые функции; квазиэндоморфизмы.

1. Введение

Пусть (M, F, ρ) – пространство Лебега, т.е. пространство, изоморфное отрезку $[0, 1)$ с мерой Лебега. Квазиэндоморфизмом называется измеримое несингулярное (прообраз множества меры 0 имеет меру 0) преобразование пространства M. Измеримое разбиение ξ пространства M есть разбиение на прообразы точек для некоторого измеримого преобразования пространства M, не сохраняющее меру.

2. Постановка задачи

Пусть $M = [0, 1)$, T – действительная функция, определённая на $[0, 1)$ и удовлетворяющая условиям: 1. $T(0) = 0, \lim\limits_{x\to 1} T(x) = 1$. 2. T непрерывна и нигде не дифференцируема. 3. T не сохраняет меру. Построение таких функций, сохраняющих меру, описано в [1]. В данной статье приведён пример построения такого квазиэндоморфизма, который не сохраняет меру, а инвариантная мера сосредоточена на отрезке $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$.

3. Приведение квазиэндоморфизмов данного класса к инвариантной мере

Построим квазиэндоморфизм, т.е. измеримое отображение, не сохраняющее меру, пространства M. При этом будем использовать технику из [1]. Разобьём заштрихованную часть рис. 1 на квадраты первого порядка и занумеруем их так, чтобы A_i^1 и A_{i+1}^1 для любого i имели общую сторону или вершину. Для $i = \overline{1, 4}$ определим $T^{-1}A_i^1 = \{(x, y) : \frac{i-1}{12} \le x < \frac{i}{12}, 0 \le y < 1\}$.

[1]доцент, Волгоградский государственный университет, г. Волгоград; vsharapov99@mail.ru

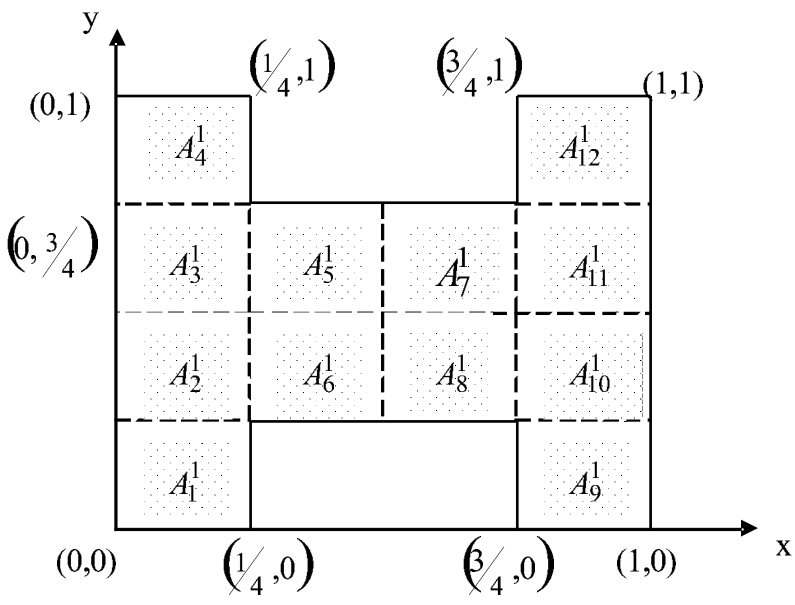

Рис. 1

Для $i = \overline{5,12}$ положим

$$T^{-1}A_5^1 = \{(x,y) : \frac{1}{4} \le x < \frac{3}{8}, \frac{1}{4} \le y < \frac{3}{4}\},$$

$$T^{-1}A_6^1 = \{(x,y) : \frac{3}{8} \le x < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \le y < \frac{3}{4}\},$$

$$T^{-1}A_7^1 = \{(x,y) : \frac{1}{2} \le x < \frac{5}{8}, \frac{1}{4} \le y < \frac{3}{4}\},$$

$$T^{-1}A_8^1 = \{(x,y) : \frac{5}{8} \le x < \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \le y < \frac{3}{4}\},$$

$$T^{-1}A_9^1 = \{(x,y) : \frac{3}{4} \le x < \frac{13}{16}, 0 \le y < 1\},$$

$$T^{-1}A_10^1 = \{(x,y) : \frac{13}{16} \le x < \frac{7}{8}, 0 \le y < 1\},$$

$$T^{-1}A_11^1 = \{(x,y) : \frac{7}{8} \le x < \frac{15}{16}, 0 \le y < 1\},$$

$$T^{-1}A_12^1 = \{(x,y) : \frac{15}{16} \le x < 1, 0 \le y < 1\}.$$

Каждый квадрат первого порядка разбиваем горизонтальной и вертикальной прямыми на четыре квадрата второго порядка. Перенумеруем квадраты второго порядка так, чтобы выполнялись условия: 1) сначала нумеруем квадраты, входящие в A_1^1, потом в A_2^1 и т.д., т.е. согласовано с упорядочением квадратов первого порядка; 2) все квадраты A_i^2 второго порядка занумерованы так, что для любого $i = \overline{1,47}$ квадраты A_i^2 и A_{i+1}^2 имеют или общую сторону или общую вершину. Прообраз каждого квадрата A_i^1 разбивается вертикальными отрезками на четыре равновеликих прямоугольника, каждый из которых является прообразом одного из четырёх квадратов второго порядка, входящих в A_i^1, перенумерованных так, что из каждых двух прообразов левее тот, который имеет меньший номер. Далее аналогично по индукции строим квадраты n-го порядка с выполнением условий 1) и 2) для $n=\overline{3,\infty}$. Теперь возьмём любую точку (x,y), входящую в заштрихованную область рис. 1. Для неё существует последовательность $\{A^n_{i_n}\}$ квадратов, сходящаяся к точке (x,y). Соответствующая последовательность $\{T^{-1}A^n_{i_n}\}$ сходится при $n\to\infty$ к вертикальному отрезку, являющемуся прообразом точки (x,y). Для $i=\overline{1,4}$ определим непрерывное взаимно однозначное сохраняющее меру отображение U квадрата A^1_i в интервал $[\frac{i-1}{16},\frac{i}{16})$ для прообразов x отображения T и отображение V в интервал $[\frac{16-i}{16},\frac{16-(i-1)}{16})$ для образов y отображения T. Аналогично для $i=\overline{9,12}$ определяется отображение U квадрата A^1_i так, что $x\in[\frac{i+3}{16},\frac{i+4}{16})$, $y\in[\frac{i-9}{4},\frac{i-8}{4})$. Для $i=\overline{5,8}$ для квадратов A^1_i полагаем $x\in[\frac{i-3}{8},\frac{i-2}{8})$, $y\in[\frac{i-3}{8},\frac{i-2}{8})$. Полагаем, что прообразом точки $y=V(x,y)$ является множество точек $U(T^{-1}(x,y))$. Этим самым определяется отображение точки x отрезка $[0,1)$ в точку y. Легко видеть, что полученное отображение T непрерывно (вследствие условий 1) и 2) при нумерации квадратов) и нигде не дифференцируемо. Если обозначить $A=[\frac14,\frac34)$, то $TA=A$, $\rho(A)=\frac12,\rho(T^-1A)=\frac34$, т.е. T не сохраняет меру. Для отображения $T:[0,1)\to[0,1)$ существует отображение мер $T_\star\rho(B)=\rho(T_{-1}B)$,

$$T_\star\rho(A^1_1\cup A^1_4)=\rho(T^{-1}(A^1_1\cup A^1_4))=\frac18,$$

$$T^2_\star\rho(A^1_1\cup A^1_4)=\rho(T^{-2}(A^1_1\cup A^1_4))=\frac{1}{16},$$

$$\ldots,$$

$$T^n_\star\rho(A^1_1\cup A^1_4)=\rho(T^{-n}(A^1_1\cup A^1_4))=\frac14\frac{\dot{1}}{2^n},$$

$$T_\star\rho(A^1_5\cup A^1_6\cup A^1_7\cup A^1_8)=\rho(T^{-1}(A^1_5\cup A^1_6\cup A^1_7\cup A^1_8))=\frac12+\frac14,$$

$$T^2_\star\rho(A^1_5\cup A^1_6\cup A^1_7\cup A^1_8)=\rho(T^{-1}(A^1_5\cup A^1_6\cup A^1_7\cup A^1_8))=\frac12+\frac14+\frac18,$$

$\ldots,$ $T^n_\star\rho(A^1_5\cup A^1_6\cup A^1_7\cup A^1_8)=\rho(T^{-n}(A^1_5\cup A^1_6\cup A^1_7\cup A^1_8))=\frac12+\frac14+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}}$. Положим $\mu=\lim\limits_{n\to\infty}\frac1n\sum\limits_{k=1}^{n}T^k_\star\rho$. Подставляем в эту формулу предыдущие результаты, получаем $\mu([0,\frac14))=0$, $\mu([\frac14,\frac34))=1$, $\mu([\frac34,1))=0$. Таким образом, приведение к инвариантной мере сводит отображение T к его сужению $T:[\frac14,\frac34)\to[\frac14,\frac34)$, где $[\frac14,\frac34)$ с мерой $\mu[\frac14,\frac34)=1$. Как показано в [1], эндоморфизм T является точным, т.е. $\forall A\in F$ с $\mu(A)>0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(T^nA)=1$.

Список литературы

1. Шарапов В. Г. Эргодические свойства непрерывных нигде не дифференцируемых отображений // Вестник Волгоградского государственного университета, 1996, серия 1, вып. 1, С. 50-54.

Invariant measures of one class of quasiendomorphisms of lebesgue space

© **V. G. Sharapov** [2]

Abstract. In the paper a construction of invariant measure for one class of quasiendomorphisms given by continuous nowhere differentiable maps is studied. It is considered the case when the invariant measure is concentrated on the interval of primary measure smaller one.

Key Words: Invariant measure, continuous nowhere differentiable functions, quasiendomorphisms.

[2]Associate professor, Volgograd State University, Volgograd; vsharapov99@mail.ru