УДК 519.6..517.977.58

Разностные аппроксимации задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями

© Ф. В. Лубышев[1], А. Р. Манапова[2], М. Э. Файрузов[3]

Аннотация. Излагается метод разностной аппроксимации задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решением.
Ключевые слова: оптимальное управление, эллиптическое уравнение, оператор, разностная аппроксимация, функционал, минимизирующая последовательность.

1. Введение

В данной работе рассматриваются нелинейные задачи оптимального управления процессами в неоднородных анизотропных средах. Управляемые процессы описываются краевыми задачами для квазилинейных уравнений эллиптического типа. Ставятся и исследуются задачи для состояния с разрывными коэффициентами и решениями. Подобные задачи для состояния возникают при математическом моделировании и оптимизации процессов теплопередачи, диффузии, фильтрации и др. Построены и исследованы конечномерные разностные аппроксимации задач оптимального управления процессами, описываемыми уравнениями с разрывными коэффициентами и разрывными решениями. Полученные результаты могут найти применение и при решении обратных задач теплообмена, рассматриваемых в вариационной постановке.

2. Постановка задач с разрывными коэффициентами и решениями для состояния. Корректность постановки

Пусть $\overline{\Omega} = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1,2\right\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. И пусть область Ω разделена прямой $x_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней границей» $\overline{S} = \left\{x_1 = \xi,\ 0 \le x_2 \le l_2\right\}$, где $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \left\{0 < x_1 < \xi, \quad 0 < x_2 < l_2\right\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \left\{\xi < x_1 < l_1, \quad 0 < x_2 < l_2\right\}$ (на левую и правую подобласти Ω^- и Ω^+) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область Ω состоит из двух частей Ω_1 и Ω_2 с границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$, $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, а $\overline{S} = \overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_1$ – общая часть границ $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$. Следовательно, Ω есть объединение областей Ω_1 и Ω_2 и внутренних точек «контактной границы $\overline{S}$» подобластей Ω_1 и Ω_2, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω (в отличие от S-внутренней границы области Ω). Далее, будем обозначать через $\overline{\Gamma}_k$ – границы областей Ω_k без S, $k = 1,2$, так что $\partial\Omega_1 = \overline{\Gamma}_1 \cup S$, $\partial\Omega_2 = \overline{\Gamma}_2 \cup S$, где части Γ_k, $k = 1,2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$ ($\overline{\Gamma}_k$ – оставшаяся часть

[1]Профессор кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; v.lubyshev@mail.ru.

[2]Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; aygulrm@mail.ru.

[3]Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

$\partial\Omega_k$ после вычета S), $\overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α, $\alpha = 1,2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α, $\alpha = 1,2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω, то есть нормаль n направлена внутрь области Ω ($n = n(x)$ – единичный вектор нормали к S с выбранной ориентацией на S). Заметим, что поскольку векторы $n_1(x)$ и $n_2(x)$, $x \in S$ противоположно ориентированы на S, то $n(x) = n_1(x) = -n_2(x)$ на S. Ниже при постановке краевых задач, S – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью. В дальнейшем на кусках $\mathring{\Gamma}_k$, $k = 1,2$ границ $\partial\Omega_k$ положительной меры будут задаваться граничные условия определенного типа.

Предположим, что условия физического процесса позволяют моделировать его следующей задачей, а именно, рассмотрим следующую краевую задачу в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух подобластей Ω_1 и Ω_2, разбитой на части внутренней границей S.

Задача A. Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \overline{\Omega}_1 = \Omega^-$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \overline{\Omega}_2 = \Omega^-$, где компоненты $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) Функция $u_1(x)$, определенная на $\overline{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \partial\Omega_1$, удовлетворяет в Ω_1 уравнению

$$L_1 u_1 = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(1)}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha}\right) + d_1(x) q_1(u_1) = f_1(x), \quad \text{в } \Omega_1, \tag{2.1}$$

а на границе $\partial\Omega_1 \setminus S = \overline{\Gamma}_1$ условию

$$u_1(x) = 0, \quad x \in \overline{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1 \setminus S, \tag{2.2}$$

2) Функция $u_2(x)$, определенная на $\overline{\Omega}_2 = \Omega_2 \cup \partial\Omega_2$, удовлетворяет в Ω_2 уравнению

$$L_2 u_2 = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha^{(2)}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha}\right) + d_2(x) q_2(u_2) = f_2(x), \quad \text{в } \Omega_2, \tag{2.3}$$

а на границе $\partial\Omega_2 \setminus S = \overline{\Gamma}_2$ условию

$$u_2(x) = 0, \quad x \in \overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2 \setminus S, \tag{2.4}$$

3) Искомые функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют еще дополнительным условиям на S, позволяющим «сшить» решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной (внутренней)границы S областей Ω_1 и Ω_2, следующего вида:

$$g(x) = k_1^{(1)}(x)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x)\frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2)\left(u_2(x) - u_1(x)\right), \quad x \in S. \tag{2.5}$$

Задачу $(2.1) - (2.5)$ можно переписать в более компактном виде. Рассмотрим функции вида

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1; \\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x), q(\xi) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), q_1(\xi), & x \in \Omega_1; \\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), q_2(\xi), & x \in \Omega_2, \quad \alpha = 1,2. \end{cases} \tag{2.7}$$

Тогда поставленную выше задачу А с разрывным решением можно сформулировать в следующем более компактном виде:

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 квазилинейному уравнению

$$Lu(x) = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + d(x)q(u) = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

граничным условиям на внешней границе $\partial\Omega$ (на границе раздела областей Ω_1 и Ω_2)

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \overline{\Gamma}_1 \cup \overline{\Gamma}_2 = (\partial\Omega_1 \setminus S) \cup (\partial\Omega_2 \setminus S),$$

и условиям сопряжения на внутренней границе S (на границе раздела областей Ω_1 и Ω_2)

$$\big[k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\big] = 0, \quad g(x) = \big(k_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}\big) = \theta(x_2)[u], \quad x \in S,$$

где $[u] = u_2(x) - u_1(x) = u^+ - u^-$ – скачок функции $u(x)$ на S, а $k_\alpha^{(1)}(x), k_\alpha^{(2)}(x), d(x), f(x)$ и $q(\xi)$, $\alpha = 1,2$ – функции, определяемые по-разному в Ω_1 и Ω_2, обладающие некоторыми условиями гладкости в соответствующих областях Ω_k, $k = 1,2$, претерпевающими разрыв на S первого рода $k_\alpha^{(1)}(x) \neq k_\alpha^{(2)}(x)$, $d_1(x) \neq d_2(x)$, $f_1(x) \neq f_2(x)$, $q_1(\xi) \neq q_2(\xi)$, $x \in S$. В дальнейшем, относительно заданных функций будем предполагать:

$$\begin{aligned} &k_\alpha(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2), \quad 0 < \nu_\alpha^p \le k_\alpha^{(p)}(x) \le \overline{\nu}_\alpha^p, \quad \alpha, p = 1,2, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ &d(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2), \quad 0 \le d_0 \le d(x) \le \overline{d}_0, \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \\ &\theta(x_2) \in L_\infty(S), \quad 0 < \theta_0 \le \theta(x_2) \le \overline{\theta}_0, \quad x \in S, \qquad f(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2); \end{aligned} \tag{2.8}$$

функции $q_\alpha(\xi)$ определены на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям:

$$q_\alpha(0) = 0, \qquad 0 \le q^0 \le \frac{q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \le L_q < \infty, \quad \text{для всех } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R},\ \xi_1 \neq \xi_2. \tag{2.9}$$

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega_0)$, $\Omega_0 = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$V(\Omega_0) = \left\{u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)\right\}. \tag{2.10}$$

Здесь $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1,2$ – Соболевское пространство функций, заданных в подобластях Ω_k, $k = 1,2$, с границей $\partial\Omega_k$, $k = 1,2$ и нормой [1]

$$\|u_k\|_{W_2^1(\Omega_k)} = \int\limits_{\Omega_k}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 + u_k^2\right] d\Omega_k, \quad k = 1,2. \tag{2.11}$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u,\vartheta)_V = (u_1,\vartheta_1)_{W_2^1(\Omega_1)} + (u_2,\vartheta_2)_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^{2}\|u_k\|^2_{W_2^1(\Omega_k)}, \tag{2.12}$$

$V = V(\Omega_0)$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega_0)$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Gamma_k} u_k^2\, d\Gamma_k + \int\limits_{S} [u]^2\, dS. \tag{2.13}$$

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1\left(\Omega_k;\overset{\circ}{\Gamma}_k\right)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k\subset\partial\Omega_k$, $k=1,2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$ пар функций $u(x)=(u_1(x),u_2(x))$:

$$\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)=\left\{u(x)=(u_1(x),u_2(x))\in W_2^1(\Omega_1;\Gamma_1)\times W_2^1(\Omega_2;\Gamma_2)\right\} \tag{2.14}$$

с нормой (2.13):

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}=\|u\|_*^2=\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\Omega_k+\int\limits_S [u]^2\,dS. \tag{2.15}$$

Обобщенным решением задачи A будем называть такую функцию $u(x)\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned}Q(u,\vartheta)=\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\left[\sum_{\alpha=1}^{2}k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\frac{\partial\vartheta}{\partial x_\alpha}+d(x)\,q(u)\,\vartheta\right]d\Omega_0+\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}\theta(x)[u][\vartheta]dS=\\=\int\limits_{\Omega_1\cup\Omega_2}f(x)\,\vartheta d\Omega_0=l(\vartheta),\qquad\forall\vartheta\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0).\end{aligned} \tag{2.16}$$

Теорема 2.1. *Пусть выполнены условия* (2.8), (2.9). *Тогда существует единственное обобщенное решение задачи A в смысле определения* (2.16). *Задача о нахождении обобщенного решения из* (2.16) *эквивалентна решению линейного операторного уравнения* $Au=F$, *где нелинейный оператор* $A:\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}\to\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}$ *определяется равенством* $(Au,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}=Q(u,\vartheta)$, $\forall u,\vartheta\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$, *а правая часть* $F\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$ *определяется соотношением* $(F,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}=l(\vartheta)$, $\forall\vartheta\in\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}(\Omega_0)$, *причем справедлива априорная оценка* $\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1,\Gamma_2}}\le C\sum\limits_{k=1}^{2}\|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}$.

3. Разностная аппроксимация задачи для состояния с разрывными коэффициентами и решением. Корректность

Рассмотрим задачу A с разрывными коэффициентами и разрывным решением. Для аппроксимации задачи A и исследования сходимости разностных аппроксимаций нам понадобятся некоторые сетки на $[0,l_\alpha]$, $\alpha=1,2$ и в $\overline{\Omega}$ [2]-[5]. Введем в рассмотрение одномерные неравномерные сетки $\hat{\omega}_1=\left\{x_1^{(i_1)}\in[0,l_1]:\ i_1=\overline{0,N_1},\ x_1^{(0)}=0,\ x_1^{(N_1)}=l_1,\ h_{1i_1}=x_1^{(i_1)}-x_1^{(i_1-1)}\right\}$, $\hat{\omega}_2=\left\{x_2^{(i_2)}\in[0,l_2]:\ i_2=\overline{0,N_2},\ x_2^{(0)}=0,\ x_2^{(N_2)}=l_2,\ h_{2i_2}=x_2^{(i_2)}-x_2^{(i_2-1)}\right\}$, а также введем неравномерную сетку по x_1 и x_2 в область $\overline{\Omega}=\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2\cup\overline{S}:\ \hat{\omega}=\hat{\omega}_1\times\hat{\omega}_2$. Очевидно, всегда можно построить сетку $\hat{\omega}_1$ так, чтобы точка $x_1=\xi$ была ее узлом.

При решении практических задач целесообразно выбирать в областях $\overline{\Omega}_1$ и $\overline{\Omega}_2$ равномерные шаги $h_1^{(1)}$ и $h_1^{(2)}$ соответственно, и, исходя из положения точки $x_1=\xi$, число узлов находить из предположения $h_1^{(1)}\approx h_1^{(2)}$.

Обоснования разностных схем на неравномерных сетках для данной задачи А не носит принципиального характера, и в дальнейшем для наглядности исследования во всей области $\overline{\Omega}$ сетку по x_1 и x_2 будем считать равномерной, полагая $x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)} = h_1$, $i_1 = \overline{1, N_1}$, и $x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)} = h_2$, $i_2 = \overline{1, N_2}$. Значение x_1 в точке $x_1 = \xi$ обозначим через x_ξ, а соответствующий номер узла обозначим через $N_{1\xi}$, $1 < N_{1\xi} < N_1 - 1$. Введем сетки узлов: $\overline{\omega}_1^{(1)} = \left\{ x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [0, \xi] : \ i_1 = \overline{0, N_{1\xi}}, \ N_{1\xi} h_1 = \xi \right\}$, $\overline{\omega}_1^{(2)} = \left\{ x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [\xi, l_1] : \ i_1 = \overline{N_{1\xi}, N_1}, \ N_1 h_1 = l_1 \right\}$; $\omega_1^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \setminus \{x_1 = 0, x_1 = \xi\}$, $\omega_1^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \setminus \{x_1 = N_{1\xi}, x_1 = l_1\}$; $\overline{\omega}_2 = \left\{ x_2^{(i_2)} = i_2 h_2 \in [0, l_2] : \ i_2 = \overline{0, N_2}, \ N_2 h_2 = l_2 \right\}$, $\omega_2 = \overline{\omega}_2 \setminus \{x_2 = 0, x_2 = l_2\}$; $\overline{\omega}_1 = \overline{\omega}_1^{(1)} \cup \overline{\omega}_1^{(2)}$, $\omega_1 = \omega_1^{(1)} \cup \omega_1^{(2)}$; $\overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \cup \overline{\omega}_2$, $\overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \cup \overline{\omega}_2$; $\omega^{(1)} = \omega_1^{(1)} \cup \omega_2$, $\omega^{(2)} = \omega_1^{(2)} \cup \omega_2$, $\overline{\omega}_h = \overline{\omega}^{(1)} \cup \overline{\omega}^{(2)} = \left(\overline{\omega}_1^{(1)} \cup \overline{\omega}_1^{(2)} \right) \times \overline{\omega}_2 = \left\{ x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, i_1 = \overline{0, N_1}, \ N_{1\xi} h_1 = \xi \ , \ (N_1 - N_{1\xi})\, h_1 = l_1 - \xi, \ 1 < N_{1\xi} < N_1 - 1 \right\} \times \overline{\omega}_2$ – сетка в $\overline{\Omega}$, $\omega_1^{(1)+} = \overline{\omega}_1^{(1)} \cap (0, \xi]$, $\omega_1^{(1)-} = \overline{\omega}_1^{(1)} \cap [0, \xi)$, $\omega_1^{(2)-} = \overline{\omega}_1^{(2)} \cap [\xi, l_1)$, $\omega^{(1)(+1)} = \omega_1^{(1)+} \times \overline{\omega}_2$, $S_\xi = \{x_1 = \xi, \ x_2 = h_2, 2h_2, \ldots, (N_2 - 1)h_2\} = \left\{ x_1 = \xi, \ x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, \ i_2 = \overline{1, N_2 - 1} \right\}$, $\gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus S_\xi$, $\gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus S_\xi$, $\omega_1^{(1)+} \times \omega_2 = \omega^{(1)} \cup S_\xi = \overline{\omega}^{(1)} \setminus \gamma^{(1)}$.

При исследовании сходимости разностных аппроксимаций нам потребуются скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на различных сетках.

Множество сеточных функций $y_1(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2 \subset \Omega_1 = \Omega^-$ обозначим через $H^{(1)}(\overline{\omega}^{(1)})$, а множество сеточных функций $y_2(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(2)} = \overline{\omega}_1^{(2)} \times \overline{\omega}_2 \subset \Omega_2 = \Omega^+$ обозначим через $H^{(2)}(\overline{\omega}^{(2)})$. Множество $H^{(k)}(\overline{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$, снабженное скалярным произведением и нормой

$$(y_k, \vartheta_k)_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} = \sum_{x \in \overline{\omega}^{(k)}} y_k(x) \vartheta_k(x) \hbar_1 \hbar_2, \qquad \|y_k\|_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} = (y_k, y_k)^{1/2}_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})}, \tag{3.1}$$

обозначим $L_2(\overline{\omega}^{(k)})$, $k = 1, 2$. Через $W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})$ и $W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})$ обозначим пространства сеточных функций, заданных на сетках $\overline{\omega}^{(1)}$ и $\overline{\omega}^{(2)}$, со скалярными произведениями и нормами:

$$\begin{gathered}
(y_1, \vartheta_1)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})} = \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \overline{\omega}_2} y_{1\overline{x}_1} \vartheta_{1\overline{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\overline{\omega}_1^{(1)} \times \omega_2^+} y_{1\overline{x}_2} \vartheta_{1\overline{x}_2} \hbar_1 h_2 + (y_1, \vartheta_1)_{L_2(\overline{\omega}^{(1)})}, \\
(y_2, \vartheta_2)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})} = \sum_{\omega_1^{(2)+} \times \overline{\omega}_2} y_{2\overline{x}_1} \vartheta_{2\overline{x}_1} h_1 \hbar_2 + \sum_{\overline{\omega}_1^{(2)} \times \omega_2^+} y_{2\overline{x}_2} \vartheta_{2\overline{x}_2} \hbar_1 h_2 + (y_2, \vartheta_2)_{L_2(\overline{\omega}^{(2)})}, \\
\|\nabla y_1\|^2 = \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \overline{\omega}_2} y^2_{1\overline{x}_1}(x) h_1 \hbar_2 + \sum_{\overline{\omega}_1^{(1)} \times \omega_2^+} y^2_{1\overline{x}_2} \hbar_1 h_2, \\
\|\nabla y_2\|^2 = \sum_{\omega_1^{(2)+} \times \overline{\omega}_2} y^2_{2\overline{x}_1}(x) h_1 \hbar_2 + \sum_{\overline{\omega}_1^{(2)} \times \omega_2^+} y^2_{2\overline{x}_2} \hbar_1 h_2, \\
\|y_k\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})} = \|\nabla y_k\|^2 + \|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})}, \quad k = 1, 2.
\end{gathered} \tag{3.2}$$

Через $V = V(\overline{\omega}^{(1,2)})$ обозначим пространство пар сеточных функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, определяемое соотношением

$$V \equiv V(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{ y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)}) \times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)}) \right\}. \tag{3.3}$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$\begin{gathered}
(y, \vartheta)_V = (y_1, \vartheta_1)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(1)})} + (y_2, \vartheta_2)_{W_2^1(\overline{\omega}^{(2)})}, \qquad \|y\|^2_V = \textstyle\sum_{k=1}^2 \|y_k\|^2_{W_2^1(\overline{\omega}^{(k)})}, \\
y(x), \vartheta(x) = \left\{ \begin{array}{ll} y_1(x), \vartheta_1(x), & x \in \overline{\omega}^{(1)}, \\ y_2(x), \vartheta_2(x), & x \in \overline{\omega}^{(2)}, \end{array} \right.
\end{gathered} \tag{3.4}$$

$V = V(\overline{\omega}^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

В гильбертовом пространстве $V(\overline{\omega}^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму:

$$\|y\|_*^2 = \|\nabla y_1\|^2 + \|\nabla y_2\|^2 + \|y_1\|^2_{L_2(\gamma^{(1)}\cap\overline{\Gamma}_1)} + \|y_2\|^2_{L_2(\gamma^{(2)}\cap\overline{\Gamma}_2)} + \|[y]\|^2_{L_2(S_\xi)}, \tag{3.5}$$

где

$$\|y_1\|^2_{L_2(\gamma^{(1)}\cap\overline{\Gamma}_1)} = \sum_{x_2\in\overline{\omega}_2} y_1^2(0,x_2)\hbar_2(x_2) + \sum_{0\le x_1\le\xi} y_1^2(x_1,0)\hbar_1(x_1) + \sum_{0\le x_1\le\xi} y_1^2(x_1,l_2)\hbar_1(x_1);$$

$$\|y_2\|^2_{L_2(\gamma^{(2)}\cap\overline{\Gamma}_2)} = \sum_{x_2\in\overline{\omega}_2} y_2^2(l_1,x_2)\hbar_2(x_2) + \sum_{\xi\le x_1\le l_1} y_2^2(x_1,0)\hbar_1(x_1) + \sum_{\xi\le x_1\le l_1} y_2^2(x_1,l_2)\hbar_1(x_1),$$

$[y]_{|S_\xi} = y_2(x) - y_1(x)$, $x \in S_\xi$, – скачок функции $y(x)$ на S_ξ, $\|[y]\|^2_{L_2(S_\xi)} = \sum\limits_{x_2\in\omega_2} \left(y_2(\xi,x_2) - y_1(\xi,x_2)\right)^2 h_2$, $\overline{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1 \setminus S$, $\overline{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2 \setminus S$, $S_\xi = \{x_1 = \xi, x_2 = h_2, 2h_2, \ldots, (N_2-1)h_2\}$.

Пусть $\overset{0}{\gamma}{}^{(k)}$ – часть $\partial\omega^{(k)}$. Через $W_2^1\left(\overline{\omega}^{k}, \overset{0}{\gamma}{}^{(k)}\right)$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $W_2^1\left(\overline{\omega}^{(k)}\right)$, обращающихся в нуль на $\overset{0}{\gamma}{}^{(k)}$.

Заметим, что для сеточных функций $y_k(x) \in W_2^1\left(\overline{\omega}^{(k)}, \overset{0}{\gamma}{}^{(k)}\right)$ справедливо неравенство

$$\|y_k\|^2_{L_2(\overline{\omega}^{(k)})} \le C_{\overline{\omega}^{(k)},\overset{0}{\gamma}{}^{(k)}} \left[\|\nabla y_1\|^2 + \|\nabla y_2\|^2\right]. \tag{3.6}$$

Введем в рассмотрение пространство $\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y = (y_1, y_2)$:

$$\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)}) \times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)}, \gamma^{(2)})\right\} \tag{3.7}$$

с нормой (3.5)

$$\|y\|^2_{\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = \|y\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|^2_{L_2(S_\xi)}. \tag{3.8}$$

Через $\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ обозначим пространство пар сеточных функций $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$:

$$\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}) = \left\{y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)}) \times W_2^1(\overline{\omega}^{(2)}\right\}, \tag{3.9}$$

с нормой (3.5)

$$\|y\|^2_{\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}}} = \|y\|_*^2 = \sum_{k=1}^{2} \|\nabla y_k\|^2 + \|y_2\|^2_{L_2(\gamma^{(2)}\cap\overline{\Gamma}_2)} + \|[y]\|^2_{L_2(S_\xi)}. \tag{3.10}$$

Дифференциальной задаче A (см. (2.1) – (2.5)) поставим в соответствие следующую сеточную задачу A_h.

Задача $\mathbf{A_h}$. Требуется найти функцию $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$, определенную на $\overline{\omega} = \overline{\omega}^{(1)} \cup \overline{\omega}^{(2)}$, $y(x) = y_1(x)$, $x \in \overline{\omega}^{(1)}$, $y(x) = y_2(x)$, $x \in \overline{\omega}^{(2)}$, где компоненты $y_1(x)$ и $y_2(x)$ удовлетворяют условиям:

1) Сеточная функция $y_1(x)$, определенная на $\overline{\omega}^{(1)} = \omega^{(1)} \cup \partial\omega^{(1)}$, удовлетворяет в $\omega^{(1)}$ уравнению

$$L_1 y_1(x) = -\left(a_{1h}^{(1)}(x) y_{1\overline{x}_1}\right)_{x_1} - \left(a_{2h}^{(1)}(x) y_{1\overline{x}_2}\right)_{x_2} + d_{1h}(x) q_1(y_1) = f_{1h}(x), \quad x \in \omega^{(1)}, \tag{3.11}$$

а на границе $\partial\omega^{(1)} \setminus S_\xi = \gamma^{(1)}$ условию

$$y_1(x) = 0, \quad x \in \gamma^{(1)}; \tag{3.12}$$

2) Сеточная функция $y_2(x)$, определенная на $\overline{\omega}^{(2)} = \omega^{(2)} \cup \partial\omega^{(2)}$, удовлетворяет в $\omega^{(2)}$ уравнению

$$L_2 y_2(x) = -\left(a_{1h}^{(2)}(x) y_{2\overline{x}_1}\right)_{x_1} - \left(a_{2h}^{(2)}(x) y_{2\overline{x}_2}\right)_{x_2} + d_{2h}(x) q_2(y_2) = f_{2h}(x), \quad x \in \omega^{(2)}, \tag{3.13}$$

а на границе $\partial\omega^{(2)} \setminus S_\xi = \gamma^{(2)}$ условию

$$y_2(x) = 0, \quad x \in \gamma^{(2)}; \tag{3.14}$$

3) Искомые функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ связаны между собой дополнительными условиями на S_ξ, позволяющими «сшить» решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ вдоль сеточного множества S_ξ:

$$\begin{gathered} a_{1h}^{(1)}(x) y_{1\overline{x}_1}(x) - \frac{h_1}{2}\left[\left(a_{2h}^{(1)}(x) y_{1\overline{x}_2}\right)_{x_2}(x) - d_{1h}(x) q_1(y_1) + f_{1h}(x)\right] = \\ = \theta_h(x_2)\left(y_2(x) - y_1(x)\right), \quad x \in S_\xi = \{x_1 = \xi,\ x_2 \in \omega_2\}, \end{gathered} \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered} a_{1h}^{(2)}(x_1 + h_1, x_2) y_{2x_1}(x) + \frac{h_1}{2}\left[\left(a_{2h}^{(2)}(x) y_{2\overline{x}_2}\right)_{x_2}(x) - d_{2h}(x) q_2(y_2) + f_{2h}(x)\right] = \\ = \theta_h(x_2)\left(y_2(x) - y_1(x)\right), \quad x \in S_\xi = \{x_1 = \xi,\ x_2 \in \omega_2\}, \end{gathered} \tag{3.16}$$

Здесь через $a_{1h}^{(\alpha)}$, $a_{2h}^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, $d_{\alpha h}$, $f_{\alpha h}$, $\alpha = 1, 2$, θ_h обозначены усреднения функций $k_1^{(\alpha)}$, $k_2^{(\alpha)}$, $\alpha = 1, 2$, d_α, f_α, $\alpha = 1, 2$, θ по Стеклову [2] – [5].

Запишем разностную схему (3.11) – (3.16) в виде:

$$A^{(1)} y_1 = A_1^{(1)} y_1 + A_2^{(1)} y_1 = \varphi_1(x), \qquad x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi, \tag{3.17}$$

$$y_1(x) = 0, \quad x \in \partial\omega^{(1)} \setminus S_\xi = \gamma^{(1)}; \tag{3.18}$$

$$A_1^{(1)} y_1(x) = \begin{cases} -\left(a_{1h}^{(1)} y_{1\overline{x}_1}\right)_{x_1}(x) + \dfrac{1}{2} d_{1h}(x) q_1(y_1), & x \in \omega^{(1)}; \\ \dfrac{2}{h_1}\left[a_{1h}^{(1)}(x) y_{1\overline{x}_1}(x) + \theta_h(x_2) y_1(x)\right] + \dfrac{1}{2} d_{2h}(x) q_2(y_2), & x \in S_\xi, \end{cases} \tag{3.19}$$

$$A_2^{(1)} y_1(x) = -\left(a_{2h}^{(1)} y_{1\overline{x}_2}\right)_{x_2}(x) + \frac{1}{2} d_{1h}(x) q_1(y_1), \quad x \in \omega^{(1)} \setminus S_\xi, \tag{3.20}$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} f_{1h}(x), & x \in \omega^{(1)}; \\ f_{1h}(x) + \dfrac{2}{h_1}\theta_h(x_2) y_2(x), & x \in S_\xi, \end{cases} \tag{3.21}$$

где сеточная функция $y_2(x)$, $x \in \overline{\omega}^{(2)} = \omega^{(2)} \cup \partial\omega^{(2)}$ является решением следующего операторного уравнения:

$$A^{(2)} y_2 = A_1^{(2)} y_2 + A_2^{(2)} y_2 = \varphi_2(x), \qquad x \in \omega^{(2)} \cup S_\xi, \tag{3.22}$$

$$y_2(x) = 0, \quad x \in \partial\omega^{(2)} \setminus S_\xi; \tag{3.23}$$

$$A_1^{(2)} y_2(x) = \begin{cases} -\left(a_{1h}^{(2)} y_{2\overline{x}_1}\right)_{x_1}(x) + \dfrac{1}{2} d_{2h}(x) q_2(y_2), & x \in \omega^{(2)}; \\ -\dfrac{2}{h_1}\left[a_{1h}^{(2)}(x_1 + h_1, x_2) y_{2x_1}(x) - \theta_h(x_2) y_2(x)\right] + \dfrac{1}{2} d_{2h}(x) q_2(y_2), & x \in S_\xi, \end{cases} \tag{3.24}$$

$$A_2^{(2)}y_2(x) = -\left(a_{2h}^{(2)}y_{2\overline{x}_2}\right)_{x_2}(x) + \frac{1}{2}d_{2h}(x)q_2(y_2), \quad x \in \omega^{(2)} \setminus S_\xi, \tag{3.25}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} f_{2h}(x), & x \in \omega^{(2)}; \\ f_{2h}(x) + \dfrac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_1(x), & x \in S_\xi, \end{cases} \tag{3.26}$$

Рассмотрим теперь $H^{(1)}(\overline{\omega}^{(1)})$ – множество сеточных функций $y_1(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(1)} = \overline{\omega}_1^{(1)} \times \overline{\omega}_2$. Через $H^{(1)}(\overline{\omega}^{(1)}, \overset{0}{\gamma}{}^{(1)})$ обозначим подмножество $H^{(1)}(\overline{\omega}^{(1)})$, состоящее из сеточных функций $y_1(x)$, $x \in \overline{\omega}^{(1)}$, обращающихся в нуль на $\overset{0}{\gamma}{}^{(1)} \subseteq \gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus S_\xi$. Далее, на множестве сеточных функций $y_1(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}^{(1)}$ и обращающихся в нуль на $\partial\omega^{(1)} \setminus S_\xi = \gamma^{(1)}$, определим скалярное произведение

$$\begin{gathered}(y_1, \vartheta_1)_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)} = \sum_{x \in \omega^{(1)}} y_1(x)\vartheta_1(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{x \in S_\xi} y_1(x)\vartheta_1(x)h_1h_2 = \\ = (y_1, \vartheta_1)_{L_2(\omega^{(1)+} \times \omega_2)}, \quad y_1, \vartheta_1 \in H^{(1)}(\omega^{(1)}, \gamma^{(1)}).\end{gathered} \tag{3.27}$$

Далее, скалярное произведение (3.27) индуцирует норму

$$\|y_1\|_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)} = \|y_1\|_{L_2(\omega^{(1)+} \times \omega_2)} = (y_1, \vartheta_1)^{1/2}_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)}. \tag{3.28}$$

Норма (3.28), порождаемая скалярным произведением (3.27), превращает это множество в нормированное пространство, которое обозначим через $L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi) \equiv L_2(\omega^{(1)+} \times \omega_2)$. Аналогично вводятся $H^{(2)}(\overline{\omega}^{(2)})$, $H^{(2)}(\overline{\omega}^{(2)}, \overset{0}{\gamma}{}^{(2)})$, где $\overset{0}{\gamma}{}^{(2)} \subseteq \gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus S_\xi$, $L_2(\omega^{(2)} \cup S_\xi) = L_2(\omega_1^{(2)-} \times \omega_2)$.

Умножим теперь (3.17) скалярно $(\cdot,\cdot)_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)}$ на сеточную функцию $\vartheta_1(x) \in H^{(1)}(\omega^{(1)}, \gamma^{(1)})$. Тогда получим

$$\left(A^{(1)}y_1, \vartheta_1\right) = \left(A_1^{(1)}y_1, \vartheta_1\right) + \left(A_2^{(1)}y_1, \vartheta_1\right) = (\varphi_1, \vartheta_1), \quad \forall \vartheta_1 \in H^{(1)}(\omega^{(1)}, \gamma^{(1)}). \tag{3.29}$$

Аналогично имеем

$$\left(A^{(2)}y_2, \vartheta_2\right) = \left(A_1^{(2)}y_2, \vartheta_2\right) + \left(A_2^{(2)}y_2, \vartheta_2\right) = (\varphi_2, \vartheta_2), \quad \forall \vartheta_2 \in H^{(2)}(\omega^{(2)}, \gamma^{(2)}). \tag{3.30}$$

Используя соотношения (3.17) – (3.21), (3.22) – (3.26), а также разностные формулы Грина, после довольно длинных преобразований, найдем, что для соотношений (3.29), (3.30) справедливы представления:

$$\begin{gathered}\sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} a_{1h}^{(1)}\, y_{1\overline{x}_1}\, \vartheta_{1\overline{x}_1} h_1h_2 + \Bigg[\sum_{\omega_1^{(1)} \times \omega_2^+} a_{2h}^{(1)}\, y_{1\overline{x}_2}\, \vartheta_{1\overline{x}_2} h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2)\, y_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) \times \\ \times \vartheta_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2)h_1h_2\Bigg] - \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2)\left(y_2(\xi, x_2) - y_1(\xi, x_2)\right)\vartheta_1(\xi, x_2)h_2 + \\ + \Bigg[\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)\, q_1(y_1(x))\, \vartheta_1(x)h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2)\, q_1(y_1(\xi, x_2))\, \vartheta_1(\xi, x_2)h_1h_2\Bigg] - \\ = \Bigg[\sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x)\, \vartheta_1(x)\, h_1h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi, x_2)\, \vartheta_1(\xi, x_2)\, h_1h_2\Bigg], \qquad \forall \vartheta_1 \in H^{(1)}(\omega^{(1)}, \gamma^{(1)}),\end{gathered} \tag{3.31}$$

$$\begin{gathered}\sum_{\omega_1^{(2)+}\times\omega_2} a_{1h}^{(2)}\, y_{2\overline{x}_1}\, \vartheta_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \Bigg[\sum_{\omega_1^{(2)}\times\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}\, y_{2\overline{x}_2}\, \vartheta_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2)\, y_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2)\times \\ \times\vartheta_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2\Bigg] + \sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)\,(y_2(\xi, x_2) - y_1(\xi, x_2))\,\vartheta_2(\xi, x_2) h_2 + \\ +\Bigg[\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)\, q_2(y_2(x))\,\vartheta_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2)\, q_2(y_1(\xi, x_2))\,\vartheta_2(\xi, x_2) h_1 h_2\Bigg] + \\ = \Bigg[\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x)\,\vartheta_2(x)\, h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi, x_2)\,\vartheta_2(\xi, x_2)\, h_1 h_2\Bigg], \qquad \forall\vartheta_2 \in H^{(2)}(\omega^{(2)}, \gamma^{(2)}).\end{gathered} \tag{3.32}$$

Соотношения (3.31) и (3.32) позволяют определить решение сеточной задачи A_h или (3.17) - (3.26) следующим образом.

Определение 3.1. *Под решением сеточной краевой задачи A_h понимаем сеточную функцию $y(x) = y^-(x) \equiv y_1(x) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)})$, $y(x) = y^+(x) \equiv y_2(x) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(2)}, \gamma^{(2)})$, удовлетворяющую сумматорным тождествам (3.31) - (3.32) для всех функций $\vartheta = \vartheta^-(x) \equiv \vartheta_1(x) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)})$, $\vartheta = \vartheta^+(x) \equiv \vartheta_2(x) \in W_2^1(\overline{\omega}^{(2)}, \gamma^{(2)})$.*

Сумматорные тождества (3.31), (3.32) можно переписать в следующем компактном виде:

$$\begin{gathered}\Bigg\{\sum_{\omega_1^{(1)+}\times\omega_2} a_{1h}^{(1)}\, y_{1\overline{x}_1}\, \vartheta_{1\overline{x}_1} h_1 h_2 + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(1)}\times\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}\, y_{1\overline{x}_2}\, \vartheta_{1\overline{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2)\; y_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2)\times \\ \times\vartheta_{1\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2\Bigg)\Bigg\} + \Bigg\{\sum_{\omega_1^{(2)+}\times\omega_2} a_{1h}^{(2)}\, y_{2\overline{x}_1}\, \vartheta_{2\overline{x}_1} h_1 h_2 + \Bigg(\sum_{\omega_1^{(2)}\times\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}\, y_{2\overline{x}_2}\, \vartheta_{2\overline{x}_2} h_1 h_2 + \\ +\frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2)\, y_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2)\vartheta_{2\overline{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \Bigg)\Bigg\} + \Bigg\{\sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)\,[y(\xi, x_2)]\,[\vartheta_1(\xi, x_2)]\, h_2\Bigg\} + \\ +\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x)\, q_1(y_1(x))\,\vartheta_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2)\, q_1(y_1(\xi, x_2))\,\vartheta_1(\xi, x_2) h_1 h_2\Bigg) + \\ +\Bigg\{\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x)\, q_2(y_2(x))\,\vartheta_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2)\, q_2(y_2(\xi, x_2))\,\vartheta_2(\xi, x_2) h_1 h_2\Bigg) = \\ = \Bigg(\sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x)\,\vartheta_1(x)\, h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi, x_2)\,\vartheta_1(\xi, x_2)\, h_1 h_2\Bigg) + \\ +\Bigg(\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x)\,\vartheta_2(x)\, h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi, x_2)\,\vartheta_2(\xi, x_2)\, h_1 h_2\Bigg)\Bigg\}.\end{gathered} \tag{3.33}$$

Из (3.33) при $\vartheta^+(x) = \vartheta_2(x) = 0$ следует (3.31), а при $\vartheta^-(x) = \vartheta_1(x) = 0$ следует соотношение (3.32).

Введем в рассмотрение скалярные произведения:

$$\big(y_\alpha, \vartheta_\alpha\big]_2^{(\alpha)} = \sum_{\omega_1^{(\alpha)}}\sum_{\omega_2^+} y_\alpha(x)\,\vartheta_\alpha(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2}\sum_{\omega_2^+} y_\alpha(\xi, x_2)\,\vartheta_\alpha(\xi, x_2) h_1 h_2, \quad \alpha = 1, 2. \tag{3.34}$$

Нетрудно видеть,что (3.34) можно записать в виде:

$$\big(y_\alpha, \vartheta_\alpha\big]_2^{(1)} = \sum_{\omega_1^{(1)+}}\sum_{\omega_2^+} y_1(x)\,\vartheta_1(x)\hbar_1 h_2, \qquad \big(y_2, \vartheta_2\big]_2^{(2)} = \sum_{\omega_1^{(1)-}}\sum_{\omega_2^+} y_2(x)\,\vartheta_2(x)\hbar_1 h_2. \tag{3.35}$$

С учетом (3.27), (3.34) сумматорное тождество (3.33) перепишем в следующем виде:

$$\Big\{\sum_{\omega_1^{(1)+}\times\omega_2} a_{1h}^{(1)}\, y_{1\overline{x}_1}\,\vartheta_{1\overline{x}_1} h_1h_2 + \Big(a_{2h}^{(1)} y_{1\overline{x}_2},\vartheta_{1\overline{x}_2}\Big]_2^{(1)}\Big\} + \Big\{\sum_{\omega_1^{(2)+}\times\omega_2} a_{1h}^{(2)}\, y_{2\overline{x}_1}\,\vartheta_{2\overline{x}_1} h_1h_2 +$$
$$+\Big(a_{2h}^{(2)} y_{2\overline{x}_2},\vartheta_{2\overline{x}_2}\Big]_2^{(2)}\Big\} + \Big\{\big(d_{1h}q_1(y_1),\vartheta_1\big)_{L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)} + \big(d_{2h}q_2(y_2),\vartheta_2\big)_{L_2(\omega^{(2)}\cup S_\xi)}\Big\} + \tag{3.36}$$
$$+\sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)\,[y(\xi,x_2)]\,[\vartheta_1(\xi,x_2)]\,h_2 = \Big\{\big(f_{1h},\vartheta_1\big)_{L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)} + \big(f_{2h},\vartheta_2\big)_{L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)}\Big\}.$$

или в виде

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\Big\{\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2} a_{1h}^{(\alpha)}\, y_{\alpha\overline{x}_1}\,\vartheta_{\alpha\overline{x}_1} h_1h_2 + \big(a_{2h}^{(\alpha)} y_{\alpha\overline{x}_2},\vartheta_{\alpha\overline{x}_2}\big]_2^{(\alpha)}\Big\} + \sum_{\alpha=1}^{2}\big(d_{\alpha h}\,q_\alpha(y_\alpha),\vartheta_\alpha\big)_{L_2(\omega^{(\alpha)}\cup S_\xi)} +$$
$$+\sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)\,[y(\xi,x_2)]\,[\vartheta(\xi,x_2)]\,h_2 = \sum_{\alpha=1}^{2}\big(f_{\alpha h}(x),\vartheta_\alpha(x)\big)_{L_2(\omega^{(\alpha)}\cup S_\xi)}. \tag{3.37}$$

В силу тождества (3.37), решение сеточной краевой задачи A_h можно сформулировать в следующем более компактном виде.

Определение 3.2. *Под решением сеточной краевой задачи A_h будем понимать сеточную функцию $y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in \overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$, которая удовлетворяет сумматорному тождеству:*

$$Q_h(y,\vartheta) = \sum_{\alpha=1}^{2}\Big\{\sum_{\omega_1^{(\alpha)+}\times\omega_2} a_{1h}^{(\alpha)}\, y_{\alpha\overline{x}_1}\,\vartheta_{\alpha\overline{x}_1} h_1h_2 + \big(a_{2h}^{(\alpha)} y_{\alpha\overline{x}_2},\vartheta_{\alpha\overline{x}_2}\big]_2^{(\alpha)}\Big\} +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\big(d_{\alpha h}\,q_\alpha(y_\alpha(x)),\vartheta_\alpha(x)\big)_{L_2(\omega^{(\alpha)}\cup S_\xi)} + \sum_{\omega_2}\theta_h(x_2)\,[y(\xi,x_2)]\,[\vartheta(\xi,x_2)]\,h_2 = \tag{3.38}$$
$$= \sum_{\alpha=1}^{2}\big(f_{\alpha h},\vartheta_\alpha\big)_{L_2(\omega^{(\alpha)}\cup S_\xi)} = l_h(\vartheta), \qquad \forall\vartheta = (\vartheta_1,\vartheta_2) \in \overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}).$$

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (2.8), (2.9). *Тогда существует единственное решение сеточной задачи* (3.38). *Задача о нахождения решения разностной схемы из сумматорного тождества* (3.38) *эквивалентна решению операторного уравнения $A_h y = F_h$, где A_h – разностный оператор, действующий из $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ в $\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ и сеточная функция $F \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$ определяются равенствами $(A_h y,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = Q_h(y,\vartheta)$, $(F_h,\vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} = l_h(\vartheta)$, $\forall y,\vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)})$, причем справедлива априорная оценка $\|y\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}} \le C\sum_{k=1}^{2}\|f_{kh}\|_{L_2(\omega^{(k)}\cup S_\xi)}$.*

4. Постановка задач оптимального управления. Корректность постановок

Пусть управляемый процесс описывается в $\overline{\Omega}$ краевой задачей A с разрывными коэффициентами и решением, в которой $k_\alpha(x)$, $d(x)$, $q(\xi)$, $\theta(x_2)$, $f_2(x)$ – заданные функции, а функция $g(x) = f_1(x)$, $x \in \Omega_1 = \Omega^-$ выступает в качестве управления. Будем предполагать, что заданные функции удовлетворяют условиям (2.8), (2.9).

Введем множество допустимых управлений

$$U = \{g(x) = f_1(x) \in L_2(\Omega_1): \ \xi_1 \le f_1(x) \le \overline{\xi}_1 \text{ п.в. на } \Omega_1\}, \qquad \text{или} \tag{4.1}$$

$$U = \{g(x) = f_1(x) \in L_2(\Omega_1) : \|g\|_{L_2(\Omega_1)} \le R_1\}, \tag{4.2}$$

где ξ_1, $\overline{\xi}_1$, R_1 – заданные константы, п.в. - почти всюду.

Зададим функционалы цели $g \to J(g)$ следующих видов

$$J(g) = \int\limits_{\Omega_1} \left|u(x,g) - u_0^{(1)}(x)\right|^2 d\Omega_1, \qquad \text{или} \tag{4.3}$$

$$J(g) = \int\limits_{\Omega_2} \left|u(x,g) - u_0^{(2)}(x)\right|^2 d\Omega_2, \qquad \text{или} \tag{4.4}$$

$$J(g) = \int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} |u(x,g) - u_0(x)|^2 \, d\Omega_0, \tag{4.5}$$

где $u_0^{(k)}(x) \in L_2(\Omega_k)$, $k = 1, 2$, $u_0(x) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$ – заданные функции.

Задачи оптимального управления состоят в том, чтобы найти такие управления $g_* \in U$ в соответствующих задачах, которые минимизируют на множестве U функционал цели $g \to J(g)$ одного из видов (4.3), (4.4), (4.5). Точнее, на решениях $u(x) = u(x,g)$ задачи A_h, отвечающих всем допустимым управлениям $f_1 = g \in U$, требуется минимизировать один из функционалов цели (4.3) - (4.5).

Теорема 4.1. *Пусть множество допустимых управлений U задано соотношением (4.1), $u(x,g) \equiv u(x,f_1)$ – решение задачи A, отвечающее управлению $g(x) = f_1(x) \in U$, а функционал цели $g \to J(g)$ задается формулой (4.3). Тогда существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $g_*(x) = f_{1*}(x) \in U$, т.е. $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \ne \emptyset$, причем U_* слабо компактно в $H = L_2(\Omega_1)$ и любая минимизирующая последовательность $\{g_*^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ функционала $J(g)$ слабо в H сходится ко множеству U_*.*

5. Разностные аппроксимации задач оптимального управления

Рассмотрим следующую постановку задачи оптимального управления.

Задача $\mathbf{F}_1$. На решениях $u(x) = u(x,g)$ задачи A, отвечающих всем допустимым управлениям $g(x) \equiv f_1(x) \in U \subset H = L_2(\Omega_1)$, где множество допустимых управлений U имеет вид (4.1), требуется минимизировать функционал цели $g \to J(g)$, $g \in U$ вида (4.3).

Задаче F_1 поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$\begin{aligned} J_h(\Phi_h) &= \sum_{x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi} \left|y_1(x,\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\right|^2 \hbar_1 h_2 = \\ &= \sum_{x \in \omega^{(1)}} \left|y_1(x,\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\right|^2 h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in S_\xi} \left|y_1(x,\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\right|^2 h_1 h_2 = \\ &= \left\|y_1(x,\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\right\|^2_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)} = \left\|y_1(x,\Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\right\|^2_{L_2(\omega^{(1)+} \times \omega_2)}, \end{aligned} \tag{5.1}$$

при условиях, что сеточная функция $y(x) = (y_1(x), y_2(x)) = (y_1(x,\Phi_h), y_2(x,\Phi_h)) = y(x,\Phi_h) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\omega^{(1,2)})$, называемая решением разностной краевой задачи, удовлетворяет для любой сеточной функции $\vartheta(x) = (\vartheta_1(x), \vartheta_2(x)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)},\gamma^{(2)}}(\omega^{(1,2)})$ сумматорному тождеству

$$Q_h(y,\vartheta) = \big(\Phi_h, \vartheta_1\big)_{L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)} + \big(f_{2h}, \vartheta_2\big)_{L_2(\omega^{(2)}\cup S_\xi)}, \quad \forall \vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2) \in \overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\overline{\omega}^{(1,2)}), \tag{5.2}$$

а сеточные управления $\Phi_h(x)$ таковы,что

$$\begin{gathered} \Phi_h(x) \in U_h \subset H_h = L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi), \\ U_h = \big\{\Phi_h(x) \in L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi) :\ \xi_1 \le \Phi_h(x) \le \overline{\xi}_1,\ x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi\big\}. \end{gathered} \tag{5.3}$$

Здесь $u_{0h}^{(1)}$ – сеточная аппроксимация функции $u_0^{(1)}$, определяемая через усреднение по Стеклову [2] – [5]. Справедлива следующая

Т е о р е м а 5.1. *Задача для сеточного состояния* (5.2) *однозначно разрешима для* $\forall \Phi_h \in U$, *причем справедлива априорная оценка*

$$\big\|y(x,\Phi_h)\big\|_{\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}} \le C\Big[\big\|\Phi_h(x)\big\|_{L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)} + \big\|f_{2h}(x)\big\|_{L_2(\omega^{(1)}\cup S_\xi)}\Big]. \tag{5.4}$$

Для задачи оптимального управления F_1 *справедливы следующие утверждения:*

$$J_{h*} = \inf\big\{J_h(\Phi_h) :\ \Phi_h \in U_h\big\} > -\infty, \qquad U_{h*} = \big\{\Phi_{h*} \in U_h :\ J_h(\Phi_{h*}) = J_{h*}\big\} \ne \emptyset.$$

Аналогичные утверждения справедливы и при других заданиях функционалов цели вида (4.4), (4.5) и множеств допустимых управлений вида (4.1), (4.2).

Исследованы вопросы сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу. На основе метода А.Н. Тихонова [6], [7], [4] проведена регуляризация аппроксимаций.

Список литературы

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, М.: Наука,1973.

2. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями, М.: Высшая школа, 1987.

3. Лубышев Ф.В. Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1991. Т. 31. №1. С. 17-30.

4. Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных.Уфа: БГУ, 1999.

5. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. О разностной аппроксимации задачи оптимального управления для эллиптического уравнения в произвольной области // Т. СВМО, 2009, Т.11, №1. С. 133-144.

6. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

7. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

Difference approximations of optimal controlling problems for quasi-linear elliptic equation with discontinuous coefficients and solutions

© F. V. Lubyshev[4], A. R. Manapova[5], M. E. Fairuzov[6]

Abstract. Method of difference approximation of optimal controlling problem for quasi-linear elliptic equations with discontinuous coefficients and solution is stated.

Key Words: optimal control, elliptic equation, operator, difference approximation, functional, minimizing sequence.

[4]Full professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; v.lubyshev@mail.ru.

[5]Associate professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; aygulrm@mail.ru.

[6]Associate professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; aygulrm@mail.ru.