УДК 539.214; 539.375

Прохождение предельных состояний упругопластических тел

© **Е. Б. Кузнецов**[1]

Аннотация. Рассматривается задача квазистатического деформирования тел из упругопластического материала. После дискретизации уравнений методом конечных элементов по пространственной переменной задача определения равновесных конфигураций сводится к интегрированию системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В предельном состоянии тела из идеального упругопластического материала задача становится сингулярной. В качестве регуляризации применяется метод продолжения решения по наилучшему параметру, что позволяет находить решение задачи в предельных состояниях тел.

Ключевые слова: предельное состояние, метод продолжения, наилучший параметр, конечный элемент.

1. Регуляризация одномерной задачи

Многие задачи, возникающие в прикладной и вычислительной математике, а так же при проектировании изделий авиационной и ракетнокосмической техники, сводятся к исследованию квазистатического деформирования тел из идеального упругопластического материала [1] - [3]. В этом случае при некотором значении внешних сил достигаются предельные состояния – равновесные конфигурации, в которых деформации обращаются в бесконечность. Соответствующая нагрузка называется предельной.

Универсальным и эффективным методом решения задач по упругопластическому деформированию тел произвольной геометрии является метод конечных элементов (МКЭ) [4], [5]. После дискретизации исходной системы дифференциальных уравнений МКЭ проблема определения равновесных конфигураций тела сводится к пошаговому интегрированию начальной задачи для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), которая в предельном состоянии тела из идеального упругопластического материала является сингулярной. В стандартных программах пошагового интегрирования системы ОДУ в качестве параметра деформирования используется внешняя нагрузка. В этом случае в окрестности предельной нагрузки для определения равновесных конфигураций необходимо применять мелкие шаги по нагрузке. При этом итерационные процессы уточнения решения сходятся очень медленно или даже расходятся. Для преодоления этих трудностей при определении равновесных конфигураций в окрестности предельной нагрузки разумно применить наилучшую параметризацию [6], [7], согласно которой наилучшим параметром деформирования будет длина дуги интегральной кривой задачи. Этот параметр использовался в работах [1], [8]. Здесь обращается внимание на еще один более эффективный способ применения этого параметра.

Рссмотрим модельную задачу, при решении которой продемонстрируем те трудности, которые возникают в задачах о деформировании тел из идеального упругопластического материала в предельном состоянии, и приведем один из алгоритмов регуляризации.

Изучим одноосное однородное деформирование прямолинейного стержня с площадью поперечного сечения A, один конец которого защемлен, а к другому приложена растягивающая или сжимающая продольная сила P, см. [1]. Материал стержня является упругопластическим с билинейной диаграммой одноосного растяжения. Деформацию будем

[1]Профессор кафедры дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (государственный технический университет), г. Москва; kuznetsov@mai.ru

отмечать буквой ε, а напряжение σ. Начальное значение предела текучести обозначается через $\sigma_y^0 > 0$. $E > 0$ – модуль Юнга, $E_t \geq 0$ – касательный модуль Юнга. При использовании теории пластического течения с изотропным упрочнением определяющее соотношение материала стержня может быть записано в виде

$$\dot{\sigma} = b\dot{\varepsilon}, \tag{1.1}$$

где

$$b = \begin{cases} E, & |\sigma| < \sigma_y \ \bigcup \ |\sigma| = \sigma_y, \quad \sigma\dot{\varepsilon} \leq 0, \\ E_t, & \qquad\qquad\quad\ \ |\sigma| = \sigma_y, \quad \sigma\dot{\varepsilon} > 0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Здесь $\sigma_y = \max\limits_{0 \leq \tau \leq t}\{|\sigma(\tau)|, \sigma_y^0\}$ – текущее значение предела текучести; t – монотонно возрастающий параметр дифференцирования (с начальным значением $t = 0$), точка обозначает производную по t.

Уравнение равновесия в скоростях можно записать в виде

$$\dot{\sigma} = \frac{\dot{P}}{A}. \tag{1.3}$$

Из (1.1) и (1.3) получаем, принимая во внимание (1.2), нелинейное ОДУ

$$k\dot{\varepsilon} = \dot{P}, \tag{1.4}$$

которое следует решать с начальным условием

$$\varepsilon(0) = 0. \tag{1.5}$$

В уравнении (1.4) введен касательный коэффициент жесткости (аналог касательной матрицы жесткости [4])

$$k(\sigma, \dot{\varepsilon}) = bA.$$

Начальная задача (1.4), (1.5) описывает деформирование стержня из упругопластического материала. Причем уравнение (1.4) является аналогом системы уравнений, которая получается при дискретизации МКЭ дифференциальных уравнений, описывающих деформирование тела из упругопластического материала.

Очевидно, что равновесные конфигурации стержня определяются интегрированием начальной задачи (1.4), (1.5). Причем при монотонном пластическом деформировании стержня равновесные конфигурации в плоскости (ε, σ) соответствуют диаграмме одноосного деформирования.

Разрешимость же задачи (1.4), (1.5) зависит от значения касательного модуля E_t.

Если $E_t > 0$ (упругопластический материал с упрочнением), то задача (1.4), (1.5) регулярна как при упругом ($k = EA$), так и при упругопластическом ($k = E_tA$) деформировании. Решение задачи единственно и предельные состояния не достигаются.

Если $E_t = 0$ (идеальный упругопластический материал), то задача (1.4), (1.5) регулярна при упругом ($k = EA$) и сингулярна при упругопластическом ($k = 0$) деформировании. В последнем случае при $\dot{P} \neq 0$ решение не существует, а при $\dot{P} = 0$ решение существует, но не единственно. Предельное состояние стержня достигается при $P_{lim} = \sigma_y^0 A$.

Для стержня из упругопластического материала с упрочнением задачу (1.4), (1.5) можно решать, используя в качестве параметра деформирования силу $P(\dot{P} = 1)$. Для стержня из идеального упругопластического материала при деформировании за пределом упругости силу P в качестве параметра деформирования использовать нельзя, так как при $\dot{P} = 1$ решение задачи (1.4), (1.5) не существует. Таким образом, стандартный алгоритм решения задачи о деформированиии упругопластического тела с заданной внешней силой для определения равновесных конфигураций в предельном состоянии использовать нельзя.

Чтобы начальную задачу (1.4), (1.5) решить каким - нибудь численным методом, уравнение (1.4) предварительно следует представить в нормальной форме Коши, т.е. разрешить относительно производной $\dot{\varepsilon}$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{P}}{k}, \tag{1.6}$$

Видно, что в предельном состоянии правая часть уравнения (1.6) теряет смысл, так как $k = 0$.

В монографиях [6], [7] показано, что параметр нагрузки P не всегда является удачным при решении задачи и можно поставить вопрос о выборе наилучшего, в некотором смысле параметра. Доказано, что если решать задачу при помощи метода продолжения по параметру, то наилучшим парметром, доставляющим наилучшую обусловленность соответствующей линейной системе уравнений продолжения, будет длина дуги интегральной кривой задачи.

Преобразуем задачу (1.6), (1.5) к наилучшему параметру - аргументу, обозначив его через λ. Предварительно в уравнении (1.6) дифференцирование по переменной t заменим на дифференцирование по переменной λ, тогда уравнение (1.6) примет вид

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \frac{1}{k}\frac{dP}{d\lambda}. \tag{1.7}$$

Учитывая смысл параметра λ, как элемента длины дуги, имеем еще одно уравнение

$$\left(\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dP}{d\lambda}\right)^2 = 1. \tag{1.8}$$

Разрешая систему уравнений (1.7), (1.8) относительно производных, получаем уравнения, записанные в нормальной форме Коши

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \frac{dP}{d\lambda} = \pm\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}. \tag{1.9}$$

Если длину дуги λ отсчитывать от начальной точки задачи (1.6), (1.5) и нагружение стержня производить из недеформированного состояния, то начальные условия для системы уравнений (1.9) примут вид

$$\varepsilon(0) = 0, \qquad P(0) = 0. \tag{1.10}$$

Таким образом, получена начальная задача (1.9), (1.10), преобразованная к наилучшему аргументу, правая часть которой уже не теряет смысл и при значении $k = 0$, поэтому эту задачу можно проинтегрировать любым численным методом решения начальных задач для ОДУ.

Знак плюс или минус в системе (1.9) выбирается в зависимости от направления движения вдоль интегральной кривой задачи.

В [6], [7] отмечаются некоторые свойства преобразованной начальной задачи (1.9), (1.10). В частности доказывается, что правая часть преобразованной задачи имеет наименьшую квадратичную норму, которая, как видно из системы (1.9), равна единице, поэтому задача (1.9), (1.10) может быть проинтегрирована даже в сингулярном случае, когда касательный коэффициент жесткости k равен нулю.

Задача (1.9), (1.10) интегрировалась методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности в случае идеального упругопластического материала при следующих значениях механических констант [7]: $E = 1\,\text{ГПа}$, $E_t = 0$, $\sigma_y^0 = 10\,\text{МПа}$. Диаграмма одноосного растяжения воспроизводится при численном решении с высокой точностью.

2. Регуляризация системы конечноэлементных уравнений

Предложенная выше процедура регуляризации одномерной задачи положена в основу численного алгоритма решения задачи о деформировании тел из идеального упругопластического материала в предельных состояниях.

Система уравнений квазистатического деформирования упругопластического тела после дискретизации МКЭ по пространственным переменным запишется в виде [1], [4]

$$K\dot{U} = \dot{R}. \tag{2.1}$$

Здесь $K = ||k_{ij}||$ – симметричная касательная матрица жесткости порядка n; $U = (u_1, u_2, \ldots, u_n)^T$ – вектор узловых перемещений; R – вектор внешних сил. Остальные обозначения совпадают с принятыми ранее. Систему ОДУ следует решать при начальных условиях

$$U(0) = U_0. \tag{2.2}$$

В [1] приводятся определяющие соотношения, обобщающие соотношения (1.1), (1.2) для одноосного деформирования стержня на пространственные тела, в силу чего матрица $K = K(\dot{U})$, поэтому соотношения (2.1), (2.2) представляют собой начальную задачу для системы нелинейных ОДУ.

Пусть вектор внешних сил R зависит только от параметра P, характеризующего интенсивность действия внешних сил:

$$R = PF. \tag{2.3}$$

Здесь вектор $F = (F_1, F_2, \ldots, F_n)^T$ характеризует распределение внешних сил. С учетом (2.3) систему (2.1) можно переписать в виде

$$K\dot{U} = \dot{P}F. \tag{2.4}$$

Предельная нагрузка (параметр P принимает значение P_{lim}) соответствует вырождению матрицы K. Это возможно только для тела из идеального упругопластического материала. Очевидно, что стандартные алгоритмы интегрирования нелинейной начальной задачи (2.4), (2.2) в окретности предельных нагрузок работать не будут.

Проведем регуляризацию задачи (2.4), (2.2), используя вышеприведенный алгоритм для одноосного случая. Тогда систему уравнений (2.4), преобразованную к наилучшему аргументу λ, можно записать в виде

$$K\frac{dU}{d\lambda} = \frac{dP}{d\lambda}F. \tag{2.5}$$

Аргумент λ, как элемент длины дуги интегральной кривой задачи (2.4), (2.2), должен удовлетворять равенству

$$\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)^T \frac{dU}{d\lambda} + \left(\frac{dP}{d\lambda}\right)^2 = 1. \tag{2.6}$$

Решение системы линейных уравнений (2.5), полученное при помощи правила Крамера, будет иметь вид

$$\frac{du_i}{d\lambda} = \frac{\Delta_i}{\Delta}\frac{dP}{d\lambda}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.7}$$

Здесь Δ – определитель матрицы K; Δ_i – определитель, получаемый из определителя Δ, после замены в нем i – го столбца вектор-столбцом F.

Принимая во внимание равенства (2.7), система уравнений (2.5), (2.6) может быть разрешена относительно производных и мы получаем систему уравнений, преобразованную к наилучшему аргументу

$$\frac{du_i}{d\lambda} = \pm\frac{\Delta_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_i^2+\Delta^2}}, \quad \frac{dP}{d\lambda} = \pm\frac{\Delta}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_i^2+\Delta^2}}, \tag{2.8}$$
$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Если аргумент λ отсчитывать от начальной точки задачи (2.4), (2.2) и нагружение тела происходит из недеформированного состояния, то систему уравнений (2.8) надо интегрировать при следующих начальных условиях

$$U(0) = U_0, \qquad P(0) = 0. \tag{2.9}$$

Преобразованная к наилучшему аргументу начальная задача (2.8), (2.9) выгодно отличается от непреобразованной начальной задачи (2.1), (2.2). В самом деле, в вырожденом случае определитель Δ касательной матрицы жесткости K равен нулю, поэтому задачу (2.1), (2.2) невозможно преобразовать к нормальной форме Коши и, следовательно, численно проинтегрировать. Преобразованная задача лишена этого недостатка. Из системы уравнений (2.8) видно, что правые части ее не теряют смысл и в том случае, когда определитель Δ обращается в ноль.

Поясним ситуацию, при которой предложенный алгоритм будет работоспособным. Для этого наряду с матрицей жесткости K введем в рассмотрение расширенную матрицу $\overline{K}$, получающуюся, если к матрице K приписать справа вектор-столбец F, т.е. $\overline{K} = (KF)$. Пусть при некотором значении аргумента матрица K вырождается и ее ранг становится равным не n, а $r < n$. Такая точка на интегральной кривой задачи называется особой.

Если вектор-столбец F будет линейно зависимым со столбцами матрицы K, то ранг расширенной матрицы тоже будет равен r, т.е.

$$rank(\overline{K}) = rank(K) = r.$$

Если вектор-столбец F будет линейно независимым со столбцами матрицы K, то ранг расширенной матрицы будет равен $r+1$, т.е.

$$rank(\overline{K}) = rank(K) + 1 = r + 1.$$

В нашем случае при достижении предельной нагрузки $P = P_{lim}$ тела из идеального упругопластического материала матрица K вырождается и ее ранг становится равным не n, а $n-1$. Если вектор-столбец F будет линейно независимым со столбцами матрицы K, то ранг расширенной матрицы будет равен n, т.е.

$$rank(\overline{K}) = rank(K) + 1 = n.$$

Такая точка на интегральной кривой задачи называется предельной точкой. В этом случае среди определителей $\Delta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ найдется, по крайней мере, один определитель отличный от нуля и преобразованная задача (2.8), (2.9) может быть успешно проинтегрирована любым численным методом решения начальных задач для ОДУ.

Если вектор-столбец F будет линейно зависимым со столбцами матрицы K, то ранг расширенной матрицы будет тоже равен $n-1$, т.е.

$$rank(\overline{K}) = rank(K) = n - 1.$$

Такая точка на интегральной кривой задачи называется точкой бифуркации. В этом случае правые части системы ОДУ (2.8) теряют смысл и численно проинтегрировать уже не удастся даже задачу, преобразованную к наилучшему аргументу (2.8), (2.9), однако метод продолжения решения по наилучшему параметру позволяет преодолевать также точки таких типов, но алгоритм их прохождения является более сложным.

3. Численная реализация алгоритма регуляризации

При построении решения задачи о растяжении прямолинейного стержня, изготовленного из идеального упругопластического материала, воспользуемся регуляризацией, предложенной выше.

Система уравнений (2.4), записанная в развернутом виде, может быть представлена следующим образом

$$k\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \\ \vdots \\ \dot{u}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\dot{P}. \tag{3.1}$$

Здесь k, введенный ранее касательный коэффициент жесткости. Коэффициенты k_{ij} вычислялись по формулам

$$k_{ij} = \int\limits_{x_{j-1}}^{x_j} N_i(x)\frac{dN_j(x)}{dx}dx + \int\limits_{x_j}^{x_j+1} N_i(x)\frac{dN_j(x)}{dx}dx,$$

где базисные функции $N_m(x)$ являются кусочно линейными и имеют вид

$$N_m(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{m-1}}{x_m - x_{m-1}}, & x \in [x_{m-1,x_m}]; \\ \dfrac{x_{m+1} - x}{x_{m+1} - x_m}, & x \in [x_m, x_{m+1}]; \\ 0, & x < x_{m-1} \bigcup x > x_{m+1}. \end{cases}$$

Систему ОДУ (3.1) следует решать при начальных условиях

$$u_i(0) = u_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \tag{3.2}$$

Начальная задача (3.1), (3.2) для идеального упругопластического стержня является сингулярной при достижении усилием P предельного значения, так как в этом случае касательный коэффициент жесткости k принимает нулевое значение. Согласно алгоритму регуляризации преобразуем систему ОДУ (3.1) к наилучшему аргументу λ, переписав ее в виде

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} du_1/d\lambda \\ du_2/d\lambda \\ \vdots \\ du_n/d\lambda \end{bmatrix} = \frac{1}{k}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}\frac{dP}{d\lambda}. \tag{3.3}$$

Аргумент λ, как элемент длины дуги интегральной кривой задачи (3.1), (3.2), должен удовлетворять равенству

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{du_i}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dP}{d\lambda}\right)^2 = 1. \tag{3.4}$$

Решение системы, линейных относительно производных уравнений (3.3), полученное по правилу Крамера, можно записать в виде

$$\frac{du_i}{d\lambda} = \frac{1}{k}\frac{\Delta_i}{\Delta}\frac{dP}{d\lambda}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5}$$

Здесь Δ – определитель матрицы системы уравнений (3.3); Δ_i – определитель, получаемый из определителя Δ, после замены в нем i – го столбца вектор-столбцом, состоящим из единиц.

Принимая во внимание равенства (3.5), система уравнений (3.3), (3.4) может быть разрешена относительно производных и мы получаем систему уравнений, преобразованную к наилучшему аргументу

$$\frac{du_i}{d\lambda} = \pm\frac{\Delta_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_i^2 + k^2\Delta^2}}, \quad \frac{dP}{d\lambda} = \pm\frac{k\Delta}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\Delta_i^2 + k^2\Delta^2}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.6}$$

которую нужно решать при следующих начальных условиях

$$u_i(0) = u_{i0}, \quad P(0) = P_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.7}$$

Здесь предполагается, что аргумент λ отсчитывается от начальной точки задачи (3.1), (3.2).

Преобразованная к наилучшему аргументу начальная задача (3.6), (3.7) выгодно отличается от непреобразованной начальной задачи (3.1), (3.2). В самом деле, в вырожденом случае задача (3.1), (3.2) является сингулярной и ее невозможно преобразовать к нормальной форме Коши и, следовательно, численно проинтегрировать. Преобразованная задача лишена этого недостатка. Из системы уравнений (3.6) видно, что правые части ее не теряют смысл и в том случае, когда касательный коэффициент жесткости k принимает нулевое значение, а значит эта задача может быть с успехом проинтегрирована.

Правило Крамера становится непригодным при решении систем уравнений большой размерности, однако для решения системы уравнений (3.3) можно применить любой численный метод решения систем линейных алгебраических уравнений. В самом деле, если в системе уравнений (3.3) положить $k = dP/d\lambda = 1$, то решение этой системы, полученное любым методом, можно представить в виде $du_i/d\lambda = k_i, i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда, в силу линейности, решение системы уравнений (3.3) примет вид

$$\frac{du_i}{d\lambda} = \frac{k_i}{k}\frac{dP}{d\lambda}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.8}$$

Учитывая смысл наилучшего параметра λ, получаем систему уравнений, преобразованную к наилучшему аргументу

$$\frac{du_i}{d\lambda} = \pm\frac{k_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i^2 + k^2}}, \quad \frac{dP}{d\lambda} = \pm\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}k_i^2 + k^2}}, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.9}$$

которую следует решать при начальных условиях (3.7).

В качестве тестового примера исследуем задачу, рассмотренную в [1], т.е. изучим растяжение прямолинейного стержня длиной 0.1 м, квадратного поперечного сечения (сторона квадрата равна 0.01 м). Один конец стержня защемлен, а к свободному концу приложена сила P . Стержень изготовлен из идеального упругопластического материала с механическими константами $E = 1$ ГПа, $E_t = 0$, $\sigma_y^0 = 10$ МПа. Решение для стержневой (одномерной) модели строится при помощи формы Бубнова - Галеркина МКЭ, при этом стержень вдоль своей оси разбивается на десять элементов, т.е. $n = 10$. Решение линейной задачи (3.3) отыскивалось при помощи метода Гаусса, а начальная задача (3.9), (3.7) с однородными начальными условиями интегрировалась методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности. Диаграмма одноосного растяжения воспроизводится при численном решении с высокой точностью. При этом, в отличии от алгоритма, предложенного в работе [1], никаких дополнительных итерационных процессов организовывать не требуется.

4. Геометрически нелинейный случай

Изучим задачу из п.1 о квазистатическом поведении прямолинейного стержня из идеального упругопластического материала в геометрически нелинейной постановке. Сохраним обозначения, принятые в п.1. Поведение стержня описывается уравнением (1.4), которое после преобразования к наилучшему аргументу λ, примет вид (1.9). После решения начальной задачи (1.9), (1.10), полученные значения деформации ε можно использовать для нахождения перемещений u точек стержня. Для этого, согласно подхода Лагранжа, можно воспользоваться нелинейным соотношением

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2. \tag{4.1}$$

Уравнение (4.1) является квадратным уравнением относительно производной $\frac{du}{dx}$, решая которое получаем следуюшие значения

$$\frac{du}{dx} = -1 \pm \sqrt{1+2\varepsilon}.$$

Знак минус в этом равенстве не соответствует физическому смыслу задачи, поэтому окончательно получаем

$$\frac{du}{dx} = -1 + \sqrt{1+2\varepsilon}. \tag{4.2}$$

Учитывая, что в начальный момент стержень имел нулевые перемещения, интегрируя равенство (4.2), получаем

$$u(x) = (-1 + \sqrt{1+2\varepsilon})x. \tag{4.3}$$

Если до деформирования стержень имел длину, равную l, то согласно (4.3), перемещение его свободного конца будет вычисляться по формуле

$$u(l) = (-1 + \sqrt{1+2\varepsilon})l.$$

В общем же случае для решения данной задачи следует использовать МКЭ. С учетом нелинейного равенства (4.1), уравнение (1.7) можно записать в виде

$$\left(1 + \frac{du}{dx}\right)\frac{d}{d\lambda}\frac{du}{dx} = \frac{1}{k}\frac{dP}{d\lambda}. \tag{4.4}$$

После применения к задаче (4.4) по пространственной переменной x МКЭ, получаем систему уравнений типа (3.3), которая является линейной относительно производных, но коэффициенты ее матрицы являются функциями перемещений. После преобразования к наилучшему аргументу получим начальную задачу, интегрирование которой позволит определить перемещения в физически и геометрически нелинейном случае.

5. Заключение

В работе дан алгоритм регуляризации задач о деформировании тел, изготовленных из идеального упругопластического материала в предельных состояниях. В основе подхода лежит метод продолжения решения по наилучшему параметру [6], [7], которым является длина дуги интегральной кривой задачи. После преобразования исходной сингулярной задачи к наилучшему параметру, задача становится регулярной и может быть успешно проинтегрирована. При этом, в отличии от алгоритма, предложенного в работе [1], никаких дополнительных итерационных процессов организовывать не требуется.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 10-08-00013) и целевой программы Министерства образования и науки РФ 2.1.1/5267.

Автор благодарит студента Филимонова Д.Г. за помощь при проведении численных расчетов.

Список литературы

1. Аннин Б.Д., Алехин В.В., Коробейников С.Н. Определение предельных состояний упругопластических тел // Прикладная механика и техническая физика. – 2000. – Т.41. №5. – С. 196-204.

2. Аннин Б.Д., Черепанов Г.П. Упругопластическая задача. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1983.

3. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М.: Наука, 1969.

4. Bathe K.-J. Finite element procedures in engineering analysis. – Englewood Cliffs (New Jersey): Prentice-Hall, 1982.

5. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The finite element method. – L.:McGraw-Hill, 1991.

6. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. – М.: Эдиториал УРСС, 1999.

7. Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения и наилучшая параметризация. – М.: МАИ-ПРИНТ, 2010.

8. Bathe K.-J., Dvorkin E.N. On the automatic solution of nonlinear finite element equations // Comput. and Structures. – 1983. – V.17. N 5/6. – P. 871-879.

Passage of the limit states of elasticoplastic bodies

© **E. B. Kuznetsov**[2]

Abstract. The problem of quasi static deformation of elasticoplastic bodies is considered. After using of method of finite elements the problem of equilibrium states determination is reduced to the system of nonlinear ordinary differential equations. At the limit state ideal elasticoplastic bodies the problem is singular. The method of solution continuation with respect to the best parameter is used as regularizing.

Key Words: limit state, method of continuation, the best parameter, finite element.

[2]Professor of Differential Equations Department, Moscow Aviation Institute (State Technical University), Moscow; kuznetsov@mai.ru