УДК 517.938

О топологической классификации А-диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами

© В. З. Гринес[1], Ю. А. Левченко[2]

Аннотация. В работе выделен класс структурно устойчивых диффеоморфизмов трехмерных многобразий, неблуждающее множество которых состоит из поверхностных двумерных базисных множеств. При некоторых предположениях на структуру пересечения двумерных инвариантных многобразий точек базисных множеств, получена тологическая классификация диффеоморфизмов из рассматриваемого класса.

Ключевые слова: диффеоморфизм, базисное множество, аттрактор, топологическая классификация.

Напомним, что под A-диффеоморфизмом трехмерного многобразия $f : M^3 \to M^3$ понимается диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A, введенной С. Смейлом [5]:

1. множество неблуждающих точек $\Omega(f)$ является гиперболическим;

2. периодические точки плотны в $\Omega(f)$.

Согласно спектральной теореме С. Смейла [5] неблуждающее множество $\Omega(f)$ A-диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств, называемых базисными множествами, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию.

Определение 1.1. *Базисное множество $\mathcal{B}$ A-диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ называется поверхностным базисным множеством, если $\mathcal{B}$ принадлежит f-инвариантной замкнутой поверхности $M^2_{\mathcal{B}}$ топологически вложенной в 3-многообразие M^3.*

Будем называть f-инвариантную поверхность $M^2_{\mathcal{B}}$ *носителем* для $\mathcal{B}$.

Напомним, что базисное множество $\mathcal{B}$ A-диффеоморфизма $f : M \to M$ называется аттрактором, если существует замкнутая окрестность U множества $\mathcal{B}$ такая, что $f(U) \subset int\ U$, $\bigcap\limits_{j\geq 0} f^j(U) = \mathcal{B}$.

Если $\mathcal{B}$ является двумерным базисным множеством A-диффеоморфизма f, заданного на замкнутом 3-многобразии M^3, то согласно [1] (теорема 3), $\mathcal{B}$ является либо аттрактором либо репеллером.

Согласно [7], [8] аттрактор $\mathcal{B}$ A-диффеоморфизма, f заданного на трехмерном замкнутом многобразии M^n, называется *растягивающимся аттрактором* если топологическая размерность $\dim \mathcal{B}$ равна размерности $\dim(E^u_{\mathcal{B}})$ неустойчивого подрасслоения $E^u_{\mathcal{B}}$. Репеллер диффеоморфизма f называется сжимающимся, если он является растягивающимся, аттрактором для f^{-1}.

---

[1]Заведующий кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

[2]Старший преподаватель кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; ulev4enko@gmail.com.

Согласно [1] (теорема 2) растягивающийся двумерный аттрактор диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ состоит из двумерных неустойчивых многообразий $W^u(x)$, $x \in \mathcal{B}$, и локально гомеоморфен прямому произведению двумерного Евклидового пространства и канторовского множества. Аналогичную структуру имеет сжимающийся двумерный репеллер.

Напомним, что пару (a, b) называют типом базисного множества $\mathcal{B}$, если $a = dimE^s_x$, $b = dimE^u_x$, где $x \in \mathcal{B}$. В [2] доказано, что поверхностный аттрактор (репеллер) $\mathcal{B}$ размерности два A-диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ имеет тип $(2, 1)$ $((1, 2))$ и не является ни растягивающимся аттрактором, ни сжимающимся репеллером. Более того, установлено, что любое поверхностное двумерное базисное множество является объединением конечного числа многообразий, каждое из которых гомеоморфно двумерному тору, ручно вложенному в M^3, а ограничение некоторой степени диффеоморфизма f на несущее многообразие сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора.

Из работы [6] следует, что любое двумерное базисное множество A-диффеоморфизма трехмерного многообразия является в точности одним из следующих: растягивающимся аттрактором, сжимающимся репеллером, поверхностным аттрактором, поверхностным репеллером.

В работе [4] получена топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов трехмерных многообразий, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор (сжимающийся репеллер). Там же доказано, что в этом случае несущее многообразие диффеомофрно трехмерному тору и неблуждающее множество содержит в точности одно нетривальное (отличное от периодической орбиты) базисное множество.

В настоящей работе мы рассматриваем класс диффеоморфизмов, у которых неблуждающее множество состоит из двумерных поверхностных базисных множеств.

Следующая теорема, доказанная в [3] описывает структуру многообразия, допускающего диффеоморфизмы такого типа.

Теорема 1.1. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ A-диффеоморфизм, неблуждающее множество которого состоит из только из поверхностных двумерных базисных множеств. Тогда M^3 является локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем гомеоморфным двумерному тору.*

Обозначим $\mathcal{A}$ ($\mathcal{R}$) объединение всех поверхностных двумерных аттракторов (репеллеров) диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$.

Тогда на $M^3 \setminus \mathcal{A}$ устойчивые многообразия $W^s(z)$, $z \in \mathcal{A}$ задают двумерное слоение $N^s = \bigcup\limits_z W^s(z)$. Аналогично неустойчивые двумерные многообразия $W^u(z)$, $z \in \mathcal{R}$ задают двумерное слоение $N^u = \bigcup\limits_z W^u(z)$ на $M^3 \setminus \mathcal{R}$.

Пусть G класс структурно устойчивых диффеоморфизмов на M^3, удовлетворяющих следующим условиям:

1) неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит только из связных поверхностных двумерных аттракторов и репеллеров;

2) двумерные слоения N^s и N^u пересекаются по одномерному слоению N^{su}, определенному на $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ такому, что каждая компонента связности любого слоя из N^{su} есть открытая дуга, имеющая ровно две граничные точки одна из которых принадлежит $\mathcal{A}$, а другая $\mathcal{R}$.

Напомним, что два диффеоморфизма $f, f' : M^3 \to M^3$ называются топологически сопряженными, если существует гомеоморфизм $g : M^3 \to M^3$ такой, что $f' = gfg^{-1}$.

Результатом настоящей работы является следующая теорема:

Т е о р е м а 1.2. *Пусть f и f' структурно устойчивые диффеоморфизмы из класса G. Тогда для того, чтобы диффеоморфизмы f и f' были топологически сопряжены необходимо и достаточно, чтобы существовали аттракторы $A \subset \mathcal{A}$, $A' \subset \mathcal{A}'$ и гомеоморфизм $\Psi : A \to A'$ такие, что $f'|_{A'} = \Psi f|_A \Psi^{-1}$.*

Благодарности. Авторы благодарят за финансовую поддержку грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039.

Список литературы

1. Плыкин Р.В. О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С. Смейла// Мат. сб. – 1971. – Т. 84, №2. – С. 301-312.

2. Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В. О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях// Мат. зам. – 2005. – Т. 78, №6. – С. 813-826.

3. Гринес В.З., Медведев В.С., Левченко Ю.А. О структуре 3-многообразия, допускающего А-диффеоморфизм с двумерным поверхностным неблуждающим множеством// Труды СВМО. – 2010. – Т. 12, №2. С. 7-12.

4. Grines V. Z., Zhuzhoma E. V. Expanding attractors// Regular and chaotic dynamics. – 2006. – V. 11, №2. – P. 1-21.

5. Smale S. Differentiable dynamical systems// Bull.Amer. Math. Soc. – 1967. – V. 73, №1. – P. 741-817.

6. Brown A. Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds// Journal of Modern Dynamics. – 2010. – V. 4. – P. 517–548.

7. Williams R.F. One-dimensional non-wandering sets// Topology. – 1967. – V. 6. – P. 473-487.

8. Williams R. F. Expanding attractors// Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. – 1974. – V. 43. – P. 169-203.

On classification of A-diffeomorphisms of 3-manifolds with two-dimensional surface attractors and repellers

© V.Z. Grines[3], Y.A. Levchenko[4]

Abstract. The present paper is devoted to topological classification of structurally stable diffeomorphisms with two-dimensional surface basic sets on 3-manifolds. Topological classification of such diffeomorphisms was obtained under certain conditions on the structure of the intersection of two-dimensional invariant manifolds.
Key Words: A-diffeomorphism, basic set, attractor, topological classification

[3]Head of Higher Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru.
[4]Assistant Professor of Higher Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ulev4enko@gmail.com.