УДК 517.938

О структуре пространства блуждающих орбит диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством

© **Т. М. Митрякова**[1], **О.В. Починка**[2], **А. Е. Шишенкова**[3]

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс Φ диффеоморфизмов поверхности M^2 с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Каждой периодической орбите $\mathcal{O}_i$, $i = 1, \ldots, k_f$ диффеоморфизма $f \in \Phi$ соответствует представление динамики диффеоморфизма f в виде "источник–сток", где источник (сток) — это репеллер R_i (аттрактор A_i) диффеоморфизма f. Устанавливается, что пространство орбит блуждающего множества $V_i = M^2 \setminus (A_i \cup R_i)$ представляет собой набор конечного числа двумерных торов. Откуда, в частности, следует, что ограничение диффеоморфизма f на множество V_i топологически сопряжено с линейным сжатием

Ключевые слова: цепно рекуррентное множество, пространство орбит, аттрактор, репеллер.

1. Определения и формулировка результатов

В настоящей работе рассматривается класс Φ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов f с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством, заданных на гладких ориентируемых замкнутых поверхностях M^2 с метрикой d.

Напомним, что *ε-цепью длины n, соединяющей точку $x \in M^2$ с точкой $y \in M^2$ для каскада f* называется последовательность $x = x_0, \ldots, x_n = y$ точек в M^2 такая, что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \leq i \leq n$. Точка $x \in M^2$ называется *цепно рекуррентной для* f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует n, зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε-цепь длины n, соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно рекуррентных точек f называется *цепно рекуррентным множеством* f и обозначается $\mathcal{R}_f$. *Цепной компонентой* называется класс эквивалентности точки $x \in \mathcal{R}_f$ относительно отношения эквивалентности $\sim$: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь, соединяющая точку x с точкой y и ε-цепь, соединяющая точку y с точкой x.

Пусть $f \in \Phi$. Из того, что цепно рекуррентное множество $\mathcal{R}_f$ конечно, следует, что оно состоит из периодических точек ($\mathcal{R}_f = Per_f$) и каждая цепная компонента совпадает с периодической орбитой. Периодическая точка $p \in Per_f$ является гиперболической, если среди собственных чисел матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f^{per(p)}}{\partial x}\right)\big|_p$ нет чисел, по модулю равных 1. Гиперболическая структура множества $\mathcal{R}_f$ приводит к существованию у каждой точки $p \in \mathcal{R}_f$ *устойчивого* W^s_p и *неустойчивого* W^u_p многообразий, которые определяются следующим образом: $W^s_p = \{x \in M : d(f^{kper(p)}(x), p) \to 0$ при $k \to +\infty\}$, $W^u_p = \{x \in M : d(f^{-kper(p)}(x), p) \to 0$ при $k \to +\infty\}$.

Заметим, что в общем случае диффеоморфизмы из класса Φ не являются структурно устойчивыми, но любой диффеоморфизм $f \in \Phi$ является Ω-устойчивым (см., напри-

[1]Ассистент кафедры теории функций, Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; tatiana.mitryakova@yandex.ru.

[2]Доцент кафедры теории функций, Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru.

[3]Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная селскохозяйственная академия, г. Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

мер, [3]), в силу чего периодические орбиты диффеоморфизма f допускают нумерацию $\mathcal{O}_1,\ldots,\mathcal{O}_{k_f}$, согласующуюся с отношением С. Смейла, то есть $i\le j$, если $W^s_{\mathcal{O}_i}\cap W^u_{\mathcal{O}_j}\neq\emptyset$. Не уменьшая общности будем считать, что нумерация орбит выбрана так, что номер любой седловой орбиты больше номера любой стоковой и меньше номера любой источниковой орбиты. Для $i=1,\ldots,k_f$ положим $W^s_i=W^s_{\mathcal{O}_i}$, $W^u_i=W^u_{\mathcal{O}_i}$ и для $i=1,\ldots,k_f-1$ положим $A_i=\bigcup\limits_{j=1}^{i}W^u_j,\ R_i=\bigcup\limits_{j=i+1}^{k_f}W^s_j$.

В настоящей работе устанавливаются следующие свойства диффеоморфизмов $f\in\Phi$.

Теорема 1.1. *Пусть $f\in\Phi$. Тогда*

1) $M^2=\bigcup\limits_{i=1}^{k_f}W^u_i$;

2) W^u_i является гладким подмногообразием многообразия M^2;

3) множество A_i является аттрактором[4] диффеоморфизма $f\in\Phi$;

4) $(cl\ W^u_{i+1}\setminus W^u_{i+1})\subset A_i$.

Для $i=1,\ldots,k_f-1$ положим $V_i=M^2\setminus(A_i\cup R_i)$. Обозначим через $\hat V_i=V_i/f$ пространство орбит действия диффеоморфизма f на множестве V_i и через $\rho_i:V_i\to\hat V_i$ — естественную проекцию.

Теорема 1.2. *Пусть $f\in\Phi$. Тогда*

1) проекция $\rho_i:V_i\to\hat V_i$ является накрытием, индуцирующим структуру гладкого замкнутого 2-многообразия на пространстве орбит $\hat V_i$ и отображение η_i, состоящее из нетривиальных гомоморфизмов $\eta_{\hat v_i}:\pi_1(\hat v_i)\to\mathbb{Z}$ на каждой компоненте связности $\hat v_i$ многообразия $\hat V_i$;

2) многообразие $\hat V_i$ состоит из конечного числа компонент связности, каждая из которых гомеоморфна двумерному тору.

2. Динамика диффеоморфизмов класса Φ

В работе [1] была доказана лемма 2.1., которая понадобится для доказательства теоремы 1.1.

Лемма 2.1. *Пусть σ — гиперболическая седловая неподвижная точка диффеоморфизма $f:M^2\to M^2$, $N_\sigma\subset W^s_\sigma$ — компактная окрестность точки σ и $r\in N_\sigma$. Тогда, для любой последовательности точек $\{r_n\}\subset(M^2\setminus N_\sigma)$, сходящейся к точке r, существует подпоследовательность $\{r_{n_j}\}$, последовательность целых чисел $k_j\to+\infty$ и точка $q\in(W^u_\sigma\setminus\sigma)$ такие, что последовательность точек $\{f^{k_j}(r_{n_j})\}$ сходится к точке q.*

Теорема 1.1. Пусть $f\in\Phi$. Тогда

1) $M^2=\bigcup\limits_{i=1}^{k_f}W^u_i$;

2) W^u_i является гладким подмногообразием многообразия M^2;

[4]Пусть f — гомеоморфизм многообразия M^2. Замкнутое f-инвариантное множество $A\subset M^2$ называется *аттрактором* дискретной динамической системы f, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A)\subset int\ U_A$ и $A=\bigcap\limits_{k\ge0}f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется захватывающей или изолирующей. Репеллер определяется как аттрактор для f^{-1}.

3) множество A_i является аттрактором[5] диффеоморфизма $f \in \Phi$;

4) $(cl\ W^u_{i+1} \setminus W^u_{i+1}) \subset A_i$.

Доказательство.

1) Соотношение $M^2 = \bigcup\limits_{i=1}^{k_f} W^u_i$ следует из теоремы о спектральном разложении (см., например, [3]).

2) Докажем, что W^u_i является гладким подмногообразием многообразия M^2. Не уменьшая общности будем считать, что множество $\mathcal{R}_f$ диффеоморфизма f состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек, в противном случае можно провести аналогичные рассуждения для подходящей степени диффеоморфизма f.

Возможны три случая: a) $\dim W^u_i = 0$; b) $\dim W^u_i = 1$; c) $\dim W^u_i = 2$.

В случае a) W^u_i является точкой и, следовательно, гладким подмногообразием многообразия M^2.

В случае c) W^u_i является открытым и двумерным, и, следовательно, гладким подмногообразием многообразия M^2.

Докажем утверждение в случае b). Пусть $x \in W^u_i$ и $N_x \subset W^u_i$ — компактное множество, содержащее x. Согласно обобщенной теореме об устойчивом многообразии гиперболической точки (см., например, [5], теорема 7.3), W^u_i является образом $\mathbb{R}^1$ относительно инъективной иммерсии. Следовательно, существует карта $\psi : U_x \to \mathbb{R}^2$ многообразия M^2 такая, что $\psi(U_x \cap N_x) = \mathbb{R}^1$. Если W^u_i не является гладким подмногообразием M^2, то существует последовательность $\{x_n\} \subset (W^u_i \setminus N_x)$ такая, что $x_n \to x$ при $n \to +\infty$. Из леммы 2.1. следует, что существует подпоследовательность $\{x_{n_j}\}$, последовательность целых чисел $k_j \to +\infty$ и точка $y \in W^s_i$ такие, что последовательность точек $\{y_j = f^{-k_j}(x_{n_j})\}$ сходится к точке y. Так как $M^2 = \bigcup\limits_{i=1}^{k_f} W^u_i$, то $y \in W^u_l$ для некоторого $l \in \{1, \dots, k_f\}$. Рассмотрим три возможных случая: [a] $\dim W^u_l = 0$; [b] $\dim W^u_l = 1$; [c] $\dim W^u_l = 2$.

[a] Если $\dim W^u_l = 0$, то $y_j \in W^u_l$ для всех j, начиная с некоторого. Следовательно, $i = l$. Получили противоречие, откуда следует, что случай [a] невозможен.

[c] Если $\dim W^u_l = 2$, то $W^u_l = \mathcal{O}_l$, $y = \mathcal{O}_l$. Следовательно $\mathcal{O}_l \subset W^s_i$. Получили противоречие, откуда следует, что случай [c] невозможен.

[b] Если $\dim W^u_l = 1$, то $l \neq i$, так как диффеоморфизм $f \in \Phi$ не имеет гомоклинических точек в силу конечности множества $\mathcal{R}_f$. Следовательно, из леммы 2.1. следует, что существует подпоследовательность $\{y_{j_r}\}$, последовательность целых чисел $m_r \to +\infty$ и точка $z \in W^s_l$ такие, что последовательность точек $\{f^{m_r}(y_{j_r})\}$ сходится к точке z. Так как $M^2 = \bigcup\limits_{i=1}^{k_f} W^u_i$, то $z \in W^u_t$ для некоторого $t \in \{1, \dots, k_f\}$. Рассуждая как выше, получаем, что $\dim W^u_t = 1$ и $t \neq l$. Так как, в силу Ω-устойчивости, диффеоморфизм $f \in \Phi$ не имеет циклов, то $t \neq i$. Повторяя вышеприведенные рассуждения и учитывая, что множество $\mathcal{R}_f$ конечно получаем, что случай [b] невозможен.

Таким образом, W^u_i — гладкое подмногообразие многообразия M^2 для каждого $i \in \{1, \dots, k_f\}$.

3) В силу теоремы о фильтрации (см., например, [3]), для диффеоморфизма $f \in \Phi$ существует *фильтрация*, то есть последовательность $M_1, \dots, M_{k_f - 1}$ 2-подмногообразий с

[5] Пусть f — гомеоморфизм многообразия M^2. Замкнутое f-инвариантное множество $A \subset M^2$ называется ***аттрактором*** дискретной динамической системы f, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset int\ U_A$ и $A = \bigcap\limits_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется захватывающей или изолирующей. Репеллер определяется как аттрактор для f^{-1}.

гладкой границей многообразия M^2 таких, что $M^2 = M_{k_f} \supset M_{k_f-1} \supset \dots \supset M_1 \supset M_0 = \emptyset$ и для каждого $i = 1, \dots, k_f$ выполняются условия:

1) $f(M_i) \subset int\ M_i$;
2) $\mathcal{O}_i \subset int\ (M_i \setminus M_{i-1})$;
3) $\mathcal{O}_i = \bigcap\limits_{l\in\mathbb{Z}} f^l(M_i \setminus M_{i-1})$;
4) $\bigcap\limits_{l\geq 0} f^l(M_i) = \bigcup\limits_{j\leq i} W^u_{\mathcal{O}_j} = \bigcup\limits_{j\leq i} cl(W^u_{\mathcal{O}_j})$.

Тогда утверждение о том, что множество A_i (R_i) является аттрактором (репеллером) диффеоморфизма f непосредственно следует из свойств 1) — 4) фильтрации.

4) Не уменьшая общности будем считать, что множество $\mathcal{R}_f$ состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек, в противном случае можно провести аналогичные рассуждения для подходящей степени диффеоморфизма f.

Пусть $x \in (cl\ W^u_{i+1} \setminus W^u_{i+1})$. Тогда существует последовательность $\{x_k\} \subset W^u_{i+1}$ такая, что $d(x_k, x) \to 0$ при $k \to +\infty$. Из того, что $M^2 = \bigcup\limits_{i=1}^{k_f} W^u_i$, следует, что $x \in W^u_j$ для некоторого $j \in \{1, \dots, k_f\}$.

Возможны три случая: a) $\dim W^u_j = 0$; b) $\dim W^u_j = 1$; c) $\dim W^u_j = 2$.

a) Если $\dim W^u_j = 0$, то $W^u_j = \mathcal{O}_j$, $x = \mathcal{O}_j$ и $x_k \in W^s_j$ для всех k, начиная с некоторого. Тогда, $W^u_{i+1} \cap W^s_j \neq \emptyset$ и, следовательно, $j < i+1$. Таким образом, $x \in A_i$.

c) Если $\dim W^u_j = 2$, то $x_k \in W^u_j$ для всех k, начиная с некоторого. Откуда $i+1 = j$ и $x \in W^u_{i+1}$. Получили противоречие с условием $x \in (cl\ W^u_{i+1} \setminus W^u_{i+1})$, откуда следует, что случай c) невозможен.

b) Если $\dim W^u_j = 1$, то, согласно лемме 2.1., существует подпоследовательность x_{k_l}, последовательность целых чисел $m_l \to +\infty$ и точка $z \in W^s_j$ такие, что последовательность точек $z_l = f^{-m_l}(x_{k_l})$ сходится к точке z. Так как $M^2 = \bigcup\limits_{i=1}^{k_f} W^u_i$, то $z \in W^u_t$ для некоторого $t \in \{1, \dots, k_f\}$. Возможны три случая: [a] $\dim W^u_t = 0$; [b] $\dim W^u_t = 1$; [c] $\dim W^u_t = 2$.

[a] Если $\dim W^u_t = 0$, то $W^u_t = \mathcal{O}_t$, $z = \mathcal{O}_t$. Следовательно, $\mathcal{O}_t \in W^s_j$. Получили противоречие, откуда следует, что случай [a].

[c] Если $\dim W^u_t = 2$, то $z_l \in W^u_t$ для всех l, начиная с некоторого. Тогда $\mathcal{O}_t = \mathcal{O}_{i+1}$, откуда $j < i+1$ и, следовательно, $x \in A_i$.

[b] Если $\dim W^u_t = 1$, то $t > j$. Если $t = i+1$, то $x \in A_i$. Если $t \neq i+1$, то повторяя вышеприведенные рассуждения и учитывая конечность $\mathcal{R}_f$ и отсутствие циклов, получим, что $x \in A_i$.

Доказательство закончено.

3. Структура пространства блуждающих орбит диффеоморфизмов класса Φ

Для описания пространства орбит диффеоморфизмов класса Φ, нам понадобится следующая конструкция. Рассмотрим линейный диффеоморфизм $b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданный формулой $b(x, y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{2})$. Заметим, что пространство орбит $\mathbb{T}^2 = (\mathbb{R}^2 \setminus O)_b$ действия диффеоморфизма b на $\mathbb{R}^2 \setminus O$ является стандартным двумерным тором и естественная проекция $p_{\mathbb{T}} : \mathbb{R}^2 \setminus O \to \mathbb{T}^2$ является накрытием. Обозначим через $\eta_{\mathbb{T}} : \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \mathbb{Z}$ — эпиморфизм, соответствующий накрытию $p_{\mathbb{T}}$.

В дальнейшем пара $(\hat{P}, \eta)$ будет обозначать многообразие $\hat{P}$, состоящее из конечного числа двумерных торов $\mathbb{T}^2_1, \dots, \mathbb{T}^2_r$ и отображение η, составленное из эпиморфизмов

$\eta_{\mathbb{T}_1^2}, \ldots, \eta_{\mathbb{T}_r^2}$. Пусть $\hat{\gamma}$ — пара гладких замкнутых кривых на $\hat{P}$, таких, что $\eta([\hat{\ell}]) = 1$ для каждого узла $\hat{\ell}$ пары $\hat{\gamma}$. Обозначим через $N(\hat{\gamma}) \subset \hat{P}$ — трубчатую окрестность узлов $\hat{\gamma}$, которую будем отождествлять с множеством $\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1$. Определим диффеоморфизм $\mu : \partial N(\hat{\gamma}) \to \mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0$ формулой $\mu(x, y, z) = (z, y, x)$. Положим $\hat{P}_{\hat{\gamma}} = (\hat{P} \setminus int\ N(\hat{\gamma})) \bigcup_\mu (\mathbb{S}^0 \times \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1)$ и будем говорить, что пространство $\hat{P}_{\hat{\gamma}}$ получено *перестройкой многообразия* $\hat{P}$ *вдоль* $\hat{\gamma}$.

Предложение 3.1. *Пространство $\hat{P}_{\hat{\gamma}}$ состоит из конечного числа двумерных торов.*

Доказательство. Поскольку множество $\hat{\gamma}$ состоит из двух непересекающихся узлов, то каждая компонента связности множества $\hat{P} \setminus int\ N(\hat{\gamma})$ является цилиндром (см., например, [4]). По построению, гомеоморфизм μ склеивает граничные окружности множества $\hat{P} \setminus int\ N(\hat{\gamma})$ с граничными окружностями двумерных колец. Таким образом, каждая компонента связности множества $\hat{P}_{\hat{\gamma}}$ есть двумерный тор.
Доказательство закончено.

На рис. 3.1 изображена перестройка двумерного тора вдоль пары узлов. Результатом такой перестройки является многообразие $\hat{P}_{\hat{\gamma}}$, гомеоморфное паре двумерных торов.

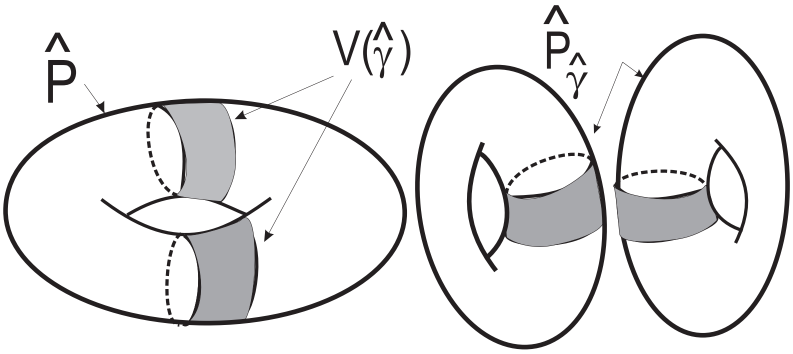


Рисунок **3.1**

Перестройка двумерного тора вдоль пары узлов

Напомним, что ранее для $i = 1, \ldots, k_f - 1$ были введены следующие обозначения: $A_i = \bigcup\limits_{j=1}^{i} W_j^u$, $R_i = \bigcup\limits_{j=i+1}^{k_f} W_j^s$, $V_i = M^2 \setminus (A_i \cup R_i)$, $\hat{V}_i = V_i / f$.

Теорема 1.2. Пусть $f \in \Phi$. Тогда

1) естественная проекция $\rho_i : V_i \to \hat{V}_i$ является накрытием, индуцирующим структуру гладкого замкнутого 2-многообразия на пространстве орбит $\hat{V}_i$ и отображение η_i, состоящее из нетривиальных гомоморфизмов $\eta_{\hat{v}_i} : \pi_1(\hat{v}_i) \to \mathbb{Z}$ на каждой компоненте связности $\hat{v}_i$ многообразия $\hat{V}_i$;

2) многообразие $\hat{V}_i$ состоит из конечного числа компонент связности, каждая из которых гомеоморфна двумерному тору.

Доказательство.

1) Покажем, что группа $F = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действует свободно и разрывно на V_i.

По построению все неблуждающие точки диффеоморфизма f принадлежат объединению $A_i \cup R_i$. Откуда следует, что многообразие V_i состоит из блуждающих точек и, следовательно, группа F действует свободно на V_i.

В силу теоремы 1.1. множество A_i является аттрактором диффеоморфизма f и, следовательно, обладает окрестностью M_i такой, что $f(M_i) \subset int\ M_i$ и $\bigcap\limits_{l \geq 0} f^l(M_i) = \bigcup\limits_{j \leq i} W^u_{\mathcal{O}_j} =$

$\bigcup\limits_{j\leq i} cl(W^u_{\mathcal{O}_j})$. Покажем, что множество $K_i = M_i \setminus int\ f(M_i)$ является фундаментальной областью ограничения диффеоморфизма f на V_i. Для этого достаточно показать, что $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} f^k(K_i) = V_i$. Поскольку $K_i \subset V_i$, то $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} f^k(K_i) \subset V_i$. Предположим, что обратное включение не имеет места: то есть существует точка $x \in V_i$ такая, что $x \notin \bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} f^k(K_i)$.

Поскольку M_i — окрестность A_i, то M_i содержит фундаментальную область ограничения диффеоморфизма f на $\bigcup\limits_{j=1}^{i} W^s_j$ и, следовательно, $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} f^k(M_i) \supset \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^s_j$. Так как $M_i \subset \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^s_j$, то $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} f^k(M_i) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^s_j$ и, следовательно, $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} f^k(M_i) = \bigcup\limits_{j=1}^{i} W^s_j$. Откуда $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} f^k(M_i) \setminus A_i = V_i$. Таким образом, $x \in f^{k_*}(M_i)$ для некоторого $k_* \in \mathbb{Z}$. Поскольку $x \notin A_i$ и $A_i = \bigcap\limits_{k\geq 0} f^k(M_i)$, то существует $k^* > k_*$ такое, что $x \in f^{k^*}(M_i)$ и $x \notin f^{k^*+1}(M_i)$. Таким образом, $x \in f^{k^*}(K_i)$. Получили противоречие.

Если K — компактное подмножество множества V_i, то оно ограничено и, следовательно, существует число $N \in \mathbb{N}$ такое, что $K \subset \bigcup\limits_{|k|\leq N} f^k(K_i)$. Тогда $f^k(K) \cap K = \emptyset$ для $|k| > 2N$. Откуда следует, что действие группы F является разрывным.

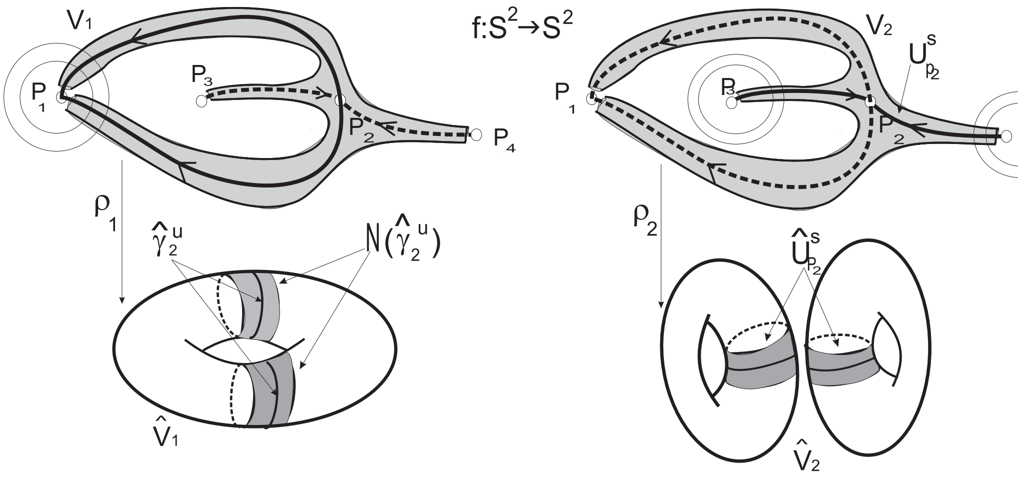
Из доказанного следует, что естественная проекция $\rho_i : V_i \to \hat{V}_i$ является накрытием, индуцирует структуру 2-многообразия на пространстве орбит $\hat{V}_i$ и отображение η_i, состоящее из нетривиальных гомоморфизмов $\eta_{\hat{V}^j_i} : \pi_1(\hat{V}^j_i) \to \mathbb{Z},\ j = 1,\dots,r_i$. По построению $\hat{V}_i$ гомеоморфно многообразию, полученному из K_i отождествлением его границ в силу диффеоморфизма f. Откуда следует замкнутость многообразия $\hat{V}_i$.

2) Не уменьшая общности будем считать, что множество $\mathcal{R}_f$ неподвижно, в противном случае можно провести аналогичные рассуждения для подходящей степени m диффеоморфизма f, а так как пространство V_i/f^m является m-листным накрытием для пространства V_i/f, то из того, что многообразие V_i/f^m состоит из конечного числа двумерных торов, аналогичное верно и для многообразия V_i/f.

Обозначим через k^s_f, m_f и k^u_f — число стоковых орбит диффеоморфизма $f \in \Phi$, число седловых орбит и число источниковых орбит диффеомофизма $f \in \Phi$, соответственно, и через p_i — период орбиты $\mathcal{O}_i$. Тогда, многообразие $V_i,\ i = 1,\dots,k^s_f$ является объединением бассейнов стоковых орбит без самих орбит. В силу теоремы о локальной топологической классификации гиперболических неподвижных точек диффеоморфизма ([2], теорема 5.5), ограничение диффеоморфизма f^{p_i} на компоненту связности многообразия V_i сопряжено с линейным диффеоморфизмом b, откуда следует, что каждая компонента связности многообразия $\hat{V}_i$ гомеоморфна стандартному двумерному тору $\mathbb{T}^2$ а, следовательно, удовлетворяет заключению теоремы. Аналогично многообразие $\hat{V}_i,\ i = k^s_f + m_f + 1,\dots,k_f$ гомеоморфно стандартному двумерному тору $\mathbb{T}^2$. Осталось рассмотреть многообразия $\hat{V}_i$ для $i = k^s_f + 1,\dots,k^s_f + m_f$. Заметим, что переход от многообразия V_{i-1} к многообразию V_i для $i = k^s_f + 1,\dots,k_f - 1$ состоит в добавлении W^s_i и удалении W^u_i.

Согласно пункту 4) теоремы 1.1., $(W^u_i \setminus \mathcal{O}_i) \subset V_{i-1}$. Из определения множества V_i следует, что $V_i = V_{i-1} \setminus (W^u_i \setminus \mathcal{O}_i) \cup (W^s_i \setminus \mathcal{O}_i)$ и, согласно пункту 1) настоящей теоремы 1.2., пространство орбит $\hat{V}_i$ является гладким замкнутым 2-многообразием, а проекция $\rho_i : V_i \to \hat{V}_i$ является накрытием для любого $i = 1,\dots,k_f - 1$. Для $i = k^s_f + 1,\dots,k^s_f + m_f$ положим $\hat{\gamma}^u_i = \rho_{i-1}(W^u_i \setminus \mathcal{O}_i)$. Тогда в силу пункта 2) теоремы 1.1. и теоремы о локальной топологической классификации гиперболических неподвижных точек диффеоморфизма ([2], теорема 5.5) $\hat{\gamma}^u_i$ является парой гладких замкнутых кривых на многообразии $\hat{V}_{i-1}$

такой, что $\eta[\hat{c}]=1$ для каждого узла $\hat{c}$ пары $\hat{\gamma}_i$.



Р и с у н о к **3.2**

Перестройка пространств $\hat{V}_{i-1}$ и $\hat{V}_i$

Докажем, что для любого диффеоморфизма $f\in\Phi$ пространство $\hat{V}_i$, $i\in\{k_f^s+1,\dots,k_f^s+m_f\}$ получается из пространства $\hat{V}_{i-1}$ перестройкой вдоль замкнутых кривых $\hat{\gamma}_i^u=\rho_{i-1}(W_i^u)$. Для этого выберем трубчатую окрестность $N(\hat{\gamma}_i^u)$ узлов $\hat{\gamma}_i^u$, которую будем отождествлять с множеством $\mathbb{S}^0\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^1$ и обозначим через $\mu_i:\partial N(\hat{\gamma}_i^u)\to\mathbb{S}^0\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^0$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\mu_i(x,y,z)=(z,y,x)$. Положим $U_{p_i}^s=\rho_{i-1}^{-1}(N(\hat{\gamma}_i^u))\setminus W_i^u\cup W_i^s$, $\hat{U}_{p_i}^s=\rho_i(U_{p_i}^s)$ и $\check{V}_{i-1}=\hat{V}_{i-1}\setminus int\ N(\hat{\gamma}_i^u)$.

На рисунке 3.2 введенные объекты изображены для диффеоморфизма $f:\mathbb{S}^2\to\mathbb{S}^2$, неблуждающее множество которого состоит в точности из четырех неподвижных точек, и значения $i=2$. Кроме того, для лучшего понимания топологической структуры пространств $\hat{V}_{i-1}$ и $\hat{V}_i$, изображены фундаментальные области (гомеоморфные двумерным кольцам) ограничения f на V_{i-1} и V_i.

Заметим, что $\hat{U}_{p_i}^s$ гомеоморфно паре двумерных колец. Построим гомеоморфизм между множествами $(\hat{V}_{i-1})_{\hat{\gamma}_i^u}=\check{V}_{i-1}\bigcup_{\mu_i}(\mathbb{S}^0\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^1)$ и $\hat{V}_i$. Обозначим через $q:\check{V}_{i-1}\bigcup(\mathbb{S}^0\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^1)\to(\hat{V}_{i-1})_{\hat{\gamma}_i^u}$ — естественную проекцию. Тогда $(\hat{V}_{i-1})_{\hat{\gamma}_i^u}=q(\check{V}_{i-1})\cup q(\mathbb{S}^0\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^1)$. С другой стороны, $\hat{V}_i=\rho_i(\rho_{i-1}^{-1}(\check{V}_{i-1}))\cup\rho_i(U_{p_i}^s)$. Определим гомеоморфизм $\Phi_i:q(\check{V}_{i-1})\to\rho_i(\rho_{i-1}^{-1}(\check{V}_{i-1}))$ формулой $\Phi_i(x)=\rho_i(\rho_{i-1}^{-1}(q^{-1}(x)))$. По построению, гомеоморфизм Φ_i переводит границы колец $q(\mathbb{S}^0\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^1)$ в границы колец $\hat{U}_{p_i}^s$ и, следовательно, продолжается на множество $q(\mathbb{S}^0\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{D}^1)$ до гомеоморфизма $\Phi_i:(\hat{V}_{i-1})_{\hat{\gamma}_i^u}\to\hat{V}_i$.

Так как $\hat{V}_{k_f^s}$ является дизъюнктным объединением конечного числа двумерных торов и для $i=k_f^s+1,\dots,k_f$ многообразит $\hat{V}_i$ гомеоморфно $(\hat{V}_{i-1})_{\hat{\gamma}_i^u}$, то согласно предложению 3.1., многообразие $\hat{V}_i$ для любого $i=k_f^s+1,\dots,k_f$ является дизъюнктным объединением конечного числа двумерных торов.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Благодарности. Авторы благодарят В.З. Гринеса за постоянное внимание к работе, а также грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и грант Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 годы (проект НК-13П-13) за частичную финансовую поддержку.

Список литературы

1. Митрякова Т. М., Починка О. В. О необходимых и достаточных условиях топологической сопряженности диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом орбит гетероклинического касания// Труды Математического Института им. В.А. Стеклова. - 2010. - Т. 270. - С. 198-219.

2. Palis J., Melo W. Геометрическая теория динамических систем. - Москва.; Мир.; 1998. - 301 с.

3. Robinson C. Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. - Studies in Adv. Math.; Sec. edition, CRC Press, 1999. - 520 p.

4. Rolfsen D. Knots and links. - University of British Columbia; Math. Lecture Series 7, 1990. - 439 c.

5. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы// Успехи мат. наук. - 1970. - Т. 25, № 1. - С. 113-185.

On a structure of the space wandering orbits of diffeomorphisms on surfaces with the finite hyperbolic chain recurrent set

© **T.M. Mitryakova**[6], **O. V. Pochinka**[7], **A. E. Shishenkova**[8]

Abstract. In the present paper a class Φ of diffeomorphisms on surfaces M^2 with the finite hyperbolic chain recurrent set is considered. To each periodic orbit $\mathcal{O}_i$, $i=1,\dots,k_f$ of $f\in\Phi$ corresponds a representation of the dynamics of a diffeomorphism f in the form "source — sink", where source (sink) is a repeller R_i (an attractor A_i) of diffeomorphism f. It is assigned that the orbit space of the wandering set $V_i=M^2\setminus(A_i\cup R_i)$ is a collection of the finite number of two-dimention torus. It implies, in particular, that the restriction of f to V_i is topologically conjugated with the homothety.

Key Words: chain recurrent set, space of orbits, attractor, repeller.

[6]Assistant of Theory Function Chair, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; tatiana.mitryakova@yandex.ru.

[7]Associate Professor of Theory Function Chair, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru.

[8]Associate Professor of Higher Mathematics, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.