УДК 517.9

Численное решение плоских контактных задач для неоднородных стареющих вязкоупругих оснований

© **А. Н. Тында**[1] **А. Е. Романов**[2]

Аннотация. Построен эффективный итерационный численный метод решения двумерного интегрального уравнения смешанного типа, являющегося основным при описании контактных задач в теории вязкоупругости.

Ключевые слова: контактные задачи, вязкоупругие механические системы, интегральные уравнения Вольтерра-Фредгольма.

1. Математическая модель

Основное интегральное уравнение плоской контактной задачи, в рамках которой физические свойства слоев могут меняться лишь вдоль слоя, имеет вид [1]

$$c(t)\,(I+L_1^*)\,q(x,t) + (I+L_2^*)\,A^*q(x,t) = \delta(t)+\alpha(t)-g(x), |x| \le 1, \tag{1.1}$$

где $c(t) > 0$, L_1^*, L_2^* - интегральные операторы Вольтерра по времени с неразностными ядрами, A^* - интегральный оператор по координате; q, δ, α, g - безразмерные контактные давления, осадка, угол поворота и форма основания штампа соответственно. Замыкают задачу условия, определяемые приложенной силой P, не разрушающей систему контактов, а также главный момент M приложенной силы [1].

В случае неоднородной (слоистой, градиентно-функциональной) среды физические свойства материалов способны меняться со временем, а также и под воздействием климатических условий (температура, давление, влажность и др.). С течением времени совокупное действие времени и климатических условий способно формировать анизотропность свойств материалов, что приводит необратимому изменению свойств - старению. В связи с этим постановка и решение динамического, пространственно одномерного интегрального уравнения (1.1) ограничивает применимость полученных результатов в рамках многих прикладных направлений. Для того, чтобы выяснить корректирующие уравнение (1.1) соотношения, необходимые для перехода к двумерной пространственной задаче, проясним физическую сущность слагаемых правой части уравнения.

Известно 4 типа постановки контактных задач, в которых пары известных определяют тройку неизвестных (включая q) путем неповторяющихся комбинаций пар из δ, α, P и M [1]. В двумерном пространственном случае равновесие слоев и штампа удовлетворяет соотношениям

$$P(y,t) = \int_{-1}^{1} q(x,y,t)dx, M(y,t) = \int_{-1}^{1} xq(x,y,t)dx, \tag{1.2}$$

[1]Доцент кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет, г. Пенза; tynda@pnzgu.ru

[2]Старший преподаватель кафедры ФТТиНС, Самарский государственный университет, г. Самара; rom-alex@mail.ru

где координата y идентифицирует вертикальное положение слоя (включения и т.п.), на границе которого действует контактное давление, в толще неоднородной среды.

Осадка и поворот являются видами перемещений систем тел, а форма основания штампа определяет границу раздела тела с неоднородной средой. В задачах, где осадка включена в исходные данные, поиск $\delta = \delta(x, y, t)$ обычно представляет собой самостоятельную задачу, решаемую при естественных условиях (климатические, силы гравитации и др.). При этом в процессе осадки в неоднородной среде могут появиться градиенты плотности, делающие процесс осадки необратимым. Поворот $\alpha = \alpha(x, y, t)$ в неоднородной среде возникает под действиераспределенных вдоль слоя сил, инициирующих неравномерное распределение контактного давления и возникновение момента приложенных сил. В рамках математической постановки контактной задачи δ, α и g являются гладкими непрерывными функциями, поскольку осадка и поворот деформируют слои без разрывов сплошности, а форма штампа $g = g(x, t)$ по причине превосходящей жесткости по сравнению с жесткостью неоднородной среды остается неизменной в любом пространственном положении, в том числе и при поворотах.

Оператор A^* в двумерной вариации уравнения (1.1) имеет следующий вид

$$A^*q(x, y, t) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} q(\xi, \psi, t)k(x, y, \xi, \psi)d\xi d\psi, \tag{1.3}$$

где ядро плоской контактной задачи определено при толщине подстилающего слоя d как

$$k(z) = k\left(d^{-1}\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\psi)^2}\right). \tag{1.4}$$

В общем случае оно определяется как [1]

$$k(z) = \int_{0}^{\infty} \Sigma(\eta) J_0(\eta z)\, d\eta. \tag{1.5}$$

Форма записи (1.5) определяется постановкой контактной задачи, разделяемой по типам контакта — гладкому и идеальному. Для гладкого контакта нижнего слоя с недеформируемым основанием

$$\Sigma(\eta) = \frac{ch(2\eta) - 1}{sh(2\eta) + 2\eta}, \tag{1.6}$$

а при идеальном контакте

$$\Sigma(\eta) = \frac{(3 - 4\nu_s)sh(2\eta) - 2\eta}{(3 - 4\nu_s)ch(2\eta) + 2\eta^2 + 8\nu_s^2 - 12\nu_s + 5}, \tag{1.7}$$

где ν_s — коэффициент Пуассона подстилающего слоя. Все остальные данные об операторах и функциях в интегральном уравнении (1.1) приведены в [4].

Одним из примеров неоднородной слоистой среды является асфальт. Самый нижний слой асфальта находится на подстилающем грунте, образуя вверх по вертикали дорожное покрытие. Чередование слоев начинается со слоя основания покрытия и заканчивается поверхностным слоем, который наиболее сильно подвергается силовому воздействию со стороны транспортных средств и пешеходов, а также воздействию климатических условий. Силовое воздействие на поверхность асфальта способствует уплотнению асфальта и постепенному изменению его вязкоупругих свойств. Последние способствуют релаксации остаточных деформаций в толще покрытия, но при достаточно высокой интенсивности и регулярности воздействия — старению асфальта. Решение пространственной одномерной задачи для асфальта корректно, если силовое воздействие транспортного средства или пешехода, идентифицируемого в абстрактном понимании со штампом, распределяется неравномерно лишь в одном направлении.

Уравнения вида (1.1) также хорошо описывают, в частности, механическое поведение бетона, полимеров, стеклопластиков [1].

2. Описание алгоритма

Во всех классических постановках контактных задач неизвестными являются контактные давления $q(x,t)$. Для построения метода приближенного решения уравнения типа (1.1) относительно $q(x,t)$, где x — радиус-вектор точки деформируемого вязкоупругого тела, запишем это уравнение в развернутом виде:

$$
\begin{gathered}
c(t)q(x,t) + c(t)\int\limits_{t_0}^{t} K_1(t,\tau)q(x,\tau)d\tau + \int\limits_{-1}^{1} k(x,\xi)q(\xi,t)d\xi + \\
+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{-1}^{1} k(x,\xi)K_2(t,\tau)q(\xi,\tau)d\xi d\tau = \delta(t) + \alpha(t)x - g(x), \quad t\in[t_0,T],\ |x|\leqslant 1.
\end{gathered} \tag{2.1}
$$

Учитывая условие $c(t) > 0$, будем без ограничения общности рассматривать далее уравнение

$$
\begin{gathered}
q(x,t) + \int\limits_{t_0}^{t} H_1(t,\tau)q(x,\tau)d\tau + \int\limits_{a}^{b} K(x,\xi)q(\xi,t)d\xi + \\
+\int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{a}^{b} K(x,\xi)H_2(t,\tau)q(\xi,\tau)d\xi d\tau = f(x,t), \quad t\in[t_0,T],\ x\in[a,b].
\end{gathered} \tag{2.2}
$$

Уравнение (2.2) представляет собой линейное двумерное интегральное уравнение смешанного типа и носит название Вольтерра-Фредгольма. Ядра $H_1(t,\tau)$ и $H_2(t,\tau)$ в левой части уравнения могут иметь слабые степенные особенности. Численному решению подобных уравнений посвящены работы [3, 7, 8]. Однако при построении численных методов решения интегральных уравнений с особенностями возникает ряд практических сложностей, связанных, в частности, с серьезными ошибками округления [2]. Некоторые подходы, позволяющие уменьшить их влияние, изложены в работе [8].

В настоящей работе к решению (2.2) применим метод последовательных приближений.

Для построения приближенного решения уравнения (2.2) введем на прямоугольнике

$$
\Omega : \Big\{(x,t):\ a\leqslant x\leqslant b,\ t_0\leqslant t\leqslant T,\Big\}
$$

сетку точками

$$
(x_j,t_i):\ t_i = t_0 + (T-t_0)\left(\frac{i}{n_1}\right)^{v_1},\ i=\overline{0,n_1},\ x_j = a + (b-a)\left(\frac{j}{n_2}\right)^{v_2},\ j=\overline{0,n_2}.
$$

где v_1 и v_2 — показатели неравномерности сетки, зависящие от гладкости ядер по каждой переменной и порядка особенности. В случае если ядра H_1, H_2 и K не имеют особенностей, принимаем $v_1 = v_2 = 1$. Обозначим через Δ_i сегменты-полосы

$$\Delta_i : \Big\{(x,t): \ a \leqslant x \leqslant b, \ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \Big\}, \ i = \overline{1, n_1}.$$

Каждый сегмент Δ_i покроем прямоугольниками

$$\Delta_i^j : \Big\{(x,t): \ x_{j-1} \leqslant x \leqslant x_j, \ t_{i-1} \leqslant t \leqslant t_i, \Big\}, \ i = \overline{1, n_1}, \ \ j = \overline{1, n_2}.$$

На каждом прямоугольнике Δ_i^j, $i = \overline{1, n_1}$, $j = \overline{1, n_2}$, неизвестная функция аппроксимируется интерполяционным полиномом $P^{j,i}(x,t)$ степени $(r_2 - 1) \times (r_1 - 1)$, построенным по узлам

$$t_i^l = \frac{t_i + t_{i-1}}{2} + \frac{t_i - t_{i-1}}{2} y_l, \ l = \overline{1, r_1 - 2}, \ t_i^0 = t_{i-1}, \ t_i^{r_1 - 1} = t_i, \ r_1 > 2;$$

$$x_j^k = \frac{x_j + x_{j-1}}{2} + \frac{x_j - x_{j-1}}{2} y_k, \ k = \overline{1, r_2}, \ r_2 \geqslant 2,$$

где r_1 и r_2 — показатели гладкости ядер по переменным t и x, y_l и y_k — нули полиномов Лежандра степени $r_1 - 2$ и r_2, соответственно. Таким образом, используется замкнутая система узлов по переменной t и незамкнутая по x.

Приближенное решение уравнения (2.2) будем искать в виде сплайна $q^*(x,t)$, составленного из таких интерполяционных полиномов

$$P^{k,l}(x,t) = \sum_{i=1}^{r_2} \sum_{j=0}^{r_1 - 1} C_{i,j}^{k,l} \Psi_{i,j}^{k,l}(x,t), \tag{2.3}$$

где $C_{i,j}^{k,l} = q(x_k^i, t_l^j)$, а фундаментальные многочлены $\Psi_{i,j}^{k,l}(x,t)$ определяются следующим образом

$$\Psi_{i,j}^{k,l}(x,t) = \prod_{\substack{p=1 \\ p \neq i}}^{r_2} \frac{(x - x_k^p)}{(x_k^i - x_k^p)} \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq j}}^{r_1 - 1} \frac{(t - t_l^m)}{(t_l^j - t_l^m)}.$$

Значения $q(x_j^k, t_i^l)$ определяются последовательно для каждого из прямоугольников Δ_i^j, $i = \overline{1, n_1}$, $j = \overline{1, n_2}$ по методу последовательных приближений:

$$\begin{gathered} q_0(x_j^k, t_i^l) = f(x_j^k, t_i^l), \\ q_m(x_j^k, t_i^l) = f(x_j^k, t_i^l) - \int_{t_0}^{t_i^l} H_1(t_i^l, \tau) q_{m-1}(x_j^k, \tau) d\tau - \int_a^b K(x_j^k, \xi) q_{m-1}(\xi, t_i^l) d\xi - \\ - \int_{t_0}^{t_i^l} \int_a^b K(x_j^k, \xi) H_2(t_i^l, \tau) q_{m-1}(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad k = \overline{1, r_2}, \ l = \overline{0, r_1 - 1}, \ m = 1, 2, \ldots. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Преобразуем соотношения (2.4)

$$
\begin{gathered}
q_m(x_j^k,t_i^l)=f(x_j^k,t_i^l)-\sum_{p=1}^{i-1}\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}H_1(t_i^l,\tau)q_{m-1}(x_j^k,\tau)d\tau-\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i^l}H_1(t_i^l,\tau)q_{m-1}(x_j^k,\tau)d\tau- \\
-\sum_{v=1}^{n_2}\int\limits_{x_{v-1}}^{x_v}K(x_j^k,\xi)q_{m-1}(\xi,t_i^l)d\xi-\sum_{p=1}^{i-1}\int\limits_{t_{p-1}}^{t_p}\sum_{v=1}^{n_2}\int\limits_{x_{v-1}}^{x_v}K(x_j^k,\xi)H_2(t_i^l,\tau)q_{m-1}(\xi,\tau)d\xi d\tau- \qquad (2.5) \\
-\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i^l}\sum_{v=1}^{n_2}\int\limits_{x_{v-1}}^{x_v}K(x_j^k,\xi)H_2(t_i^l,\tau)q_{m-1}(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad k=\overline{1,r_2},\ l=\overline{0,r_1-1},\ m=1,2,\ldots.
\end{gathered}
$$

Для аппроксимации каждого из интегралов в (2.5) применяются квадратурные формулы Гаусса, по узлам t_i^l, $l=\overline{1,r_1-2}$ по временной переменой и x_j^k, $k=\overline{1,r_2}$ по пространственной. При этом для вычисления интегралов $\int\limits_{t_{i-1}}^{t_i^l}$ вводятся вспомогательные узлы (узлы квадратурной формулы Гаусса, отображенные на отрезок $[t_{i-1},t_i^l]$), а в качестве значений подинтегральной функции используются значения сплайнов, построенных на предыдущей итерации.

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет определить контактные давления, а следовательно и остальные характеристики системы, с необходимой точностью.

Список литературы

1. Арутюнян Н.Х., Манжиров А.В. Контактные задачи теории ползучести. Ереван: НАК Институт механики, 1990, 320 с.

2. H. Brunner. Collocation methods for Volterra integral and related functional differential equations, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

3. H. Brunner, E. Messina. Time stepping methods for Volterra-Fredholm integral equations. Rendiconti di Matematica, Serie VII, Vol.23 Roma (2003), 329-342.

4. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974, 456 с.

5. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. Москва, Наука, 1984. - 352с.

6. Никольский С.М. Квадратурные формулы. Москва, Наука, 1979. - 544с.

7. A.N. Tynda. Numerical methods for 2D weakly singular Volterra integral equations of the second kind. PAMM, Volume 7, Issue 1 , 2020009 - 2020010.

8. A.N. Tynda. Spline-collocation technique for 2D weakly singular Volterra integral equations. Trudy SVMO, Vol. 10, 2008, 2, 68-78.

Numerical solution of the plane contact problems for heterogeneous senescent viscoelastic foundations.

© A. N. Tynda[3], A. E. Romanov[4]

Abstract. In this paper we discuss the mathematical description of the contact problems in the viscoelasticity theory. We suggest the effective iterative numerical method for twodimensional integral equation of the mixed type which is the basic equation for these problems.

Key Words: contact problems, viscoelastic mechanical systems, Volterra-Fredholm integral equations.

[3]Assistant professor of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University, Penza; tynda@pnzgu.ru

[4]Research fellow of FTT and NS Chair, Samara State University, Samara; rom-alex@mail.ru