УДК 517.9

Использование динамических симметрий к интегрированию ОДУ второго порядка

© **М.И. Тимошин**[1]

Аннотация. Выделяется класс динамических симметрий обладающих инвариантами, обеспечивающими понижение порядка дифференциального уравнения и содержащий в себе весь класс точечных симметрий. Предлагается процедура нахождения динамических симметрий обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Приведены примеры использования динамических симметрий. Рассмотрено применение найденных решений к исследованию нелинейного уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: динамические симметрии, инварианты, обыкновенное дифференциальное уравнение, каноническое уравнение Абеля второго рода, нелинейное уравнение теплопроводности.

1. Введение

Понятие динамических симметрий приведено, например, в [1]. Дифференциальное уравнение в этом случае заменяется системой дифференциальных уравнений первого порядка:

$$y'' = f\left(x, y, y'\right) \;\; \Leftrightarrow \;\; \frac{dy}{dx} = z, \;\; \frac{dz}{dx} = f\left(x, y, z\right). \tag{1.1}$$

Затем рассматривается вопрос об инфинитезимальном преобразовании

$$X = \xi\left(x, y, z\right)\frac{\partial}{\partial x} + \eta\left(x, y, z\right)\frac{\partial}{\partial y} + \mu\left(x, y, z\right)\frac{\partial}{\partial z}, \tag{1.2}$$

переводящем решение системы (1.1) в решение этой же системы. Для этого оператор (1.2) должен удовлетворять условию

$$[X, A] = \lambda\left(x, y, z\right) A, \tag{1.3}$$

где $A = \frac{\partial}{\partial x} + z\frac{\partial}{\partial y} + f\left(x, y, z\right)\frac{\partial}{\partial z}$. Важно отметить, что компоненты оператора (1.2) не удовлетворяют предложенной С.Ли формуле продолжения

$$\mu = \frac{d\eta}{dx} - z\frac{d\xi}{dx} \;\; .$$

У оператора динамической симметрии (1.2) компоненты ξ, η, μ определяются только условием (1.3).

При использовании точечных симметрий ОДУ по найденному оператору строятся инварианты, применяемые для понижения порядка исходного дифференциального уравнения. Для этого приходится решать обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Известно, что в некоторых случаях задача нахождения инвариантов равносильна задаче интегрирования первоначального дифференциального уравнения. В случае динамических симметрий в общем случае пришлось бы решать динамическую систему.

[1]Ульяновский Технический Университет, Ульяновск; midvolga@mail.ru

В работе [2] предлагается начинать процедуру нахождения симметрий с инвариантов, при этом компоненты соответствующего оператора выписываются непосредственно с помощью дифференцирования и арифметических действий. Недостатком такого подхода является то, что линейная в классическом случае определяющая система дифференциальных уравнений, становится нелинейной. Однако такой подход, в случае динамических симметрий, позволяет заранее побеспокоится о свойствах найденных симметрий. В частности естественно потребовать, что если функции $u = u\left(x, y, y'\right)$, $v = v\left(x, y, y'\right)$ являются инвариантами оператора (1.2), то выражение $\frac{du}{dv} = \frac{u'_x + u'_y y' + u'_{y'} y''}{v'_x + v'_y y' + v'_{y'} y''}$ также является инвариантом один раз продолженной динамической симметрии (1.2). Удобнее записать компоненты оператора динамической симметрии в виде

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \mu \frac{\partial}{\partial y'} + \mu_1\left(x, y, y', y''\right) \frac{\partial}{\partial y'}, \tag{1.4}$$

и определить их, разрешая систему уравнений

$$X\, u = 0, \quad X\, v = 0, \quad X\, \frac{du}{dv} = 0\,. \tag{1.5}$$

При нахождении симметрий ОДУ второго порядка $F\left(x, y, y', y''\right) = 0$, можно использовать критерий инвариантности

$$XF\,|_{F=0} \equiv 0, \tag{1.6}$$

В общем случае критерий инвариантности (1.6), также как и критерий инвариантности (1.3) не допускает расщепления. Преимуществом критерия (1.6) является то, что он позволяет говорить о динамической симметрии (1.4) удовлетворяющей уравнениям (1.5) с точностью до функционального множителя. Отметим, что все точечные симметрии можно рассматривать как ansatz динамических симметрий когда $u = \frac{\beta'_x + \beta'_y y'}{\alpha'_x + \alpha'_y y'}$, $v = \beta\left(x, y\right)$, где $\alpha\left(x, y\right), \beta\left(x, y\right)$ произвольные функции.

В этой связи, желая сохранить свойство расщепления критерия (1.6), естественно ставить вопрос о динамических симметриях как о расширении множества точечных симметрий, ограничиваясь функциями двух переменных. Рассмотрим вопрос о динамических симметриях натянутых на три функции двух переменных, содержащих в себе всё множество точечных симметрий. Прежде всего, отметим, что оператор точечной симметрии $X = \xi\left(x, y\right) \frac{\partial}{\partial x} + \eta\left(x, y\right) \frac{\partial}{\partial y}$, обладающий инвариантом $v = \tau\left(x, y\right)$, в переменных $\left(v, y\right)$, принимает вид $X = \chi\left(v, y\right) \frac{\partial}{\partial y}$.

Представив функцию $\chi\left(v, y\right)$ в виде $\chi\left(v, y\right) = \frac{1}{\alpha'_y}$, можно выписать первый дифференциальный инвариант $u = \alpha'_v + \alpha'_y \frac{dy}{dv}$.

Таким образом, взяв первый дифференциальный инвариант в виде $u = \alpha + \beta \frac{dy}{dv}$, можно расширить множество точечных симметрий с помощью трёх функций $\tau\left(x, y\right), \alpha\left(v, y\right), \beta\left(v, y\right)$.

Практическое нахождение динамических симметрий рассматриваемого типа целесообразно осуществлять в несколько этапов:

A. Выполнив точечную замену переменных $t = \tau\left(x, y\right), y = y$, перейти от уравнения $F\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = 0$ к уравнению $\Phi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) = 0$.

B. По инвариантам $v = x$, $u = \alpha\left(x, y\right) + \beta\left(x, y\right) \frac{dy}{dx}$, разрешив систему (1.5), построить оператор динамической симметрии.

C. Расщепив по y' критерий инвариантности $X\Phi\,|_{\Phi=0}\equiv 0$ выписать определяющую систему дифференциальных уравнений.

D. Найти решения определяющей системы уравнений.

В работе [2], на примере уравнения

$$y''=y'+f\left(y\right), \tag{1.7}$$

рассмотрена реализация этапов B, C, D. Показано, что дифференциальное уравнение (1.7) допускает динамические симметрии, если функция $f\left(y\right)$ имеет вид $f\left(y\right)=Ay+\frac{B}{y}-\frac{B^2}{y^3}$. Указаны явные решения соответствующих уравнений.

В следующем разделе на примере уравнения (1.7) рассматривается реализация всех четырёх этапов.

2. Пример нахождения динамических симметрий ОДУ второго порядка

Возьмём уравнение (1.7) в виде $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+f(y)$. Выполнив точечную замену переменных $t=\tau(x,y)$, придём к дифференциальному уравнению

$$\begin{gathered}\tau'_x y''-f(y){\tau'_x}^3-\left(\tau''_{xx}+{\tau'_x}^2+3f(y){\tau'_x}^2\tau'_y\right)y'-\left(2\tau''_{xy}+2\tau'_x\tau'_y+3\tau'_x{\tau'_y}^2f(y)\right){y'}^2-\\-\left(\tau''_{yy}+{\tau'_y}^2+f(y){\tau'_y}^3\right){y'}^3=0.\end{gathered} \tag{2.1}$$

По инвариантам $v=x,\quad u=\alpha(x,y)+\beta(x,y)y',\quad \frac{du}{dv}=\alpha'_x+\left(\beta'_x+\alpha'_y\right)y'+\beta'_y{y'}^2+\beta y''$ строим оператор динамической симметрии (1.4) с компонентами

$$\xi(x,y,y')=0,\quad \eta(x,y,y')=1,\quad \mu(x,y,y')=-\frac{\alpha'_y+\beta'_y y'}{\beta},$$

$$\mu_1(x,y,y',y'')=-\frac{\beta'_y}{\beta}y''+\frac{-\beta''_{yy}\beta+2{\beta'_y}^2}{\beta^2}{y'}^2+\frac{-\alpha''_{yy}\beta+3\alpha'_y\beta'_y+\beta'_x\beta'_y-\beta''_{xy}\beta}{\beta^2}y'+\frac{-\alpha''_{xy}\beta+\beta'_x\alpha'_y+{\alpha'_y}^2}{\beta^2}.$$

Расщепив по y' критерий инвариантности $X\Phi\,|_{\Phi=0}\equiv 0$, получим определяющую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}-\beta^2\left(\tau'''_{xxy}\tau'_x+\tau''_{xy}{\tau'_x}^2+3f'(y){\tau'_x}^3\tau'_y+3f(y){\tau'_x}^2\tau'_y\tau''_{xy}+\ +3f(y){\tau'_x}^3\tau''_{yy}-\tau''_{xy}\tau''_{xx}\right)+4\alpha'_y\beta\tau'_x\tau''_{xy}+\\+{\tau'_x}^2\left(4\alpha'_y\beta\tau'_y+\ 6\alpha'_y\beta f(y){\tau'_y}^2-\alpha''_{yy}\beta+3\beta'_y\alpha'_y-\beta''_{xy}\beta+\beta'_x\beta'_y\right)=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\beta^2\left(-2\tau'''_{xyy}\tau'_x-2\tau''_{yy}{\tau'_x}^2-3f'(y){\tau'_x}^2{\tau'_y}^2-6f(y){\tau'_x}^2\tau'_y\tau''_{yy}+2\,{\tau''_{xy}}^2\right)+\\+\beta\tau'_x\left(3\alpha'_y\tau''_{yy}+3\alpha'_y{\tau'_y}^2+3\alpha'_y f(y){\tau'_y}^3+2\beta'_y\tau''_{xy}\right)+\\+{\tau'_x}^2\left(2\beta\beta'_y\tau'_y+3f(y)\beta\beta'_y{\tau'_y}^2-\beta''_{yy}\beta+2{\beta'_y}^2\right)=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\beta\left(\tau''_{xy}\tau''_{yy}+\tau''_{xy}{\tau'_y}^2+\tau''_{xy}f(y){\tau'_y}^3-\tau'''_{yyy}\tau'_x\ -2\tau'_x\tau'_y\tau''_{yy}-f'(y){\tau'_y}^3\tau'_x-3f(y)\tau''_{yy}\tau'_x{\tau'_y}^2\right)+\\+2\tau'_x\beta'_y\left(\tau''_{yy}+{\tau'_y}^2+f(y){\tau'_y}^3\right)=0,\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}-\beta^2{\tau'_x}^3f'(y)-2{\tau'_x}^2\beta^2f(y)\tau''_{xy}+\alpha'_y\beta\tau''_{xx}+\\+\alpha'_y\beta{\tau'_x}^2+3\alpha'_y\beta{\tau'_x}^2f(y)\tau'_y-f(y)\beta\beta'_y{\tau'_x}^3-\alpha''_{xy}\beta\tau'_x+\alpha'_y\beta'_x\tau'_x+\tau'_x{\alpha'_y}^2=0.\end{gathered}$$

Найденная определяющая система состоит из четырёх уравнений относительно трёх неизвестных функций $\alpha(x,y), \beta(x,y), \tau(x,y)$. Будем искать решения этой системы методами группового анализа дифференциальных уравнений с частными производными. Метод нахождения инвариантных решений изложен, например, в [3][4]. Рассматривая определяющую систему как систему дифференциальных уравнений относительно функции $\tau(x,y)$, найдём, что эта система обладает симметрией $X = \frac{\partial}{\partial x} + a\frac{\partial}{\partial \tau}$, когда функции $\alpha(x,y), \beta(x,y)$ принимают вид $\alpha(x,y) = \alpha_1(x)+\alpha_2(y)\beta_1(x)$, $\beta(x,y) = \beta_1(x)\beta_2(y)$.

Найденная симметрия предписывает искать инвариантное решение в виде $\tau(x,y) = ax + \tau_1(y)$.

Используя выписанные представления для функций $\tau(x,y)$, $\alpha(x,y)$, $\beta(x,y)$, преобразуем определяющую систему к виду

$$-3a{\beta_2}^2 f'(y){\tau_1'}^2 + 3\beta_2 f(y)\tau_1'\left(a\beta_2'\tau_1' - 2a\beta_2\tau_1'' + \alpha_2'{\tau_1'}^2\right) + 2a\left({\beta_2'}^2 - {\beta_2}^2\tau_1'' + \beta_2\beta_2'\tau_1'\right) + \\ +\beta_2\left(3\alpha_2'\left({\tau_1'}^2 + \tau_1''\right) - a\beta_2''\right) = 0,$$

$$-\beta_2 f'(y){\tau_1'}^3 + f(y){\tau_1'}^2\left(2\beta_2'\tau_1' - 3\beta_2\tau_1''\right) - \beta_2\tau_1''' - 2\beta_2\tau_1'\tau_1'' + 2\beta_2'{\tau_1'}^2 + 2\beta_2'\tau_1'' = 0,$$

$$-3a{\beta_2}^2 f'(y)\tau_1' - 3\beta_2 f(y)\left(a\beta_2\tau_1'' - 2\alpha_2'{\tau_1'}^2\right) - \left(\alpha_2''\beta_2 - 3\alpha_2'\beta_2' - 4\alpha_2'\tau_1'\beta_2\right) = 0,$$

$$a^2{\beta_2}^2 f'(y) + a\beta_2 f(y)\left(a\beta_2' - 3\alpha_2'\tau_1'\right) - \alpha_2'\left(\alpha_2' + a\beta_2\right) = 0.$$

Анализируя полученную определяющую систему, найдём функции $f(y)$ при которых уравнение $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} + f(y)$ допускает динамическую симметрию искомого типа.

Укажем несколько искомых функций $f(y)$ заданных параметрически

1.

$$f(p) = -\frac{e^{-\frac{1}{2p+1}}(2p+3)^2}{8f_1(2p+1)}, \qquad y(p) = \frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p+1)}{f_1(2p+1)} + f_2;$$

2.

$$f(p) = -\frac{e^{-\frac{1}{2p+1}}\left((3f_1 + 2f_1p)^2 - (2p+1)^2\right)f_2}{8{f_1}^3(2p+1)}, \qquad y(p) = \frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p+1)f_2}{f_1(2p+1)} + f_4;$$

3.

$$f(p) = -\frac{e^{-\frac{1}{2p+1}}\left((3f_1 + 2f_1p)^2 + (2p+1)^2\right)f_2}{8{f_1}^3(2p+1)}, \qquad y(p) = \frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p+1)f_2}{f_1(2p+1)} + f_3;$$

4.

$$f(p) = \frac{p^{k_1}\left(-k_1p^2 + p + 2pk_1 + 2f_1f_2\right)}{2f_2(p-1)}, \qquad y(p) = -\frac{(2k_1+1)^2(k_1 - pk_1 + 1)p^{k_1}}{2f_2k_1(k_1+1)} + f_3;$$

5.

$$f(p) = \frac{p^{k_1}\left(2p^2f_3 + 2pk_1 + p - 1 - k_1\right)}{2f_2(p-1)}, \qquad y(p) = -\frac{(2k_1+1)^2(k_1 - pk_1 + 1)p^{k_1}}{2f_2k_1(k_1+1)} + f_4;$$

6.

$$f(p) = \frac{f_1(p+2)^2}{(p+1)}, \qquad y(p) = -4f_1\left(\ln\frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1}\right) + f_3;$$

7.

$$f(p) = \frac{f_1(ph+2+p)(ph-2-p)}{(p+1)\left(h^2-1\right)}, \qquad y(p) = \frac{4f_1}{\left(h^2-1\right)}\left(\ln\frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1}\right) + f_3;$$

8.

$$f(p) = \frac{f_1\left(p^2h^2+p^2+4p+4\right)}{(p+1)\left(h^2+1\right)}, \qquad y(p) = -\frac{4f_1}{\left(h^2-1\right)}\left(\ln\frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1}\right) + f_3;$$

9.

$$f(p) = f_1\,(p+1) - f_2, \qquad y(p) = f_2\left(\ln\frac{p}{p+1} + \frac{1}{p+1}\right) + f_3;$$

где p, g -параметры, $f_1, f_2, f_3, f_4, k_1, h$ - произвольные константы. Интересно отметить, что варианты 4., 5., при некоторых значениях произвольных констант, допускают явные представления функции $f(y)$. Таким образом можно получать как известные, так и новые случаи интегрируемости уравнения (1.7).

Использование динамических симметрий, а также общие решения указанных девяти случаев приводятся в следующем разделе.

3. Пример использования динамических симметрий к интегрированию ОДУ второго порядка

Рассмотрим процедуру использования динамических симметрий на примере уравнения (1.7) с функцией $f(y)$ первого типа. Учитывая, что функция $\tau_1(y)$ в этом случае представима в параметрическом виде

$$\tau_1(p) = -\frac{2}{2p+1}, \quad y(p) = \frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p+1)}{f_1\,(2p+1)} + f_2,$$

перейдём в уравнении (2.1) от функции $y(x)$ к функции $p(x)$. После преобразования получим уравнение

$$\begin{gathered}32a(2p+1)^2p'' + 64p'^3 + 48a(2p+1)^2p'^2 + 4a^2\left(12p^2+36p+19\right)(2p+1)^2p' + \\ +a^3(2p+3)^2(2p+1)^4 = 0.\end{gathered} \tag{3.1}$$

Инвариант u принимает при этом вид

$$u = \frac{2af_1{}^2(2p+1)^2 - 2a^2p + 8f_1{}^2p' - a^2}{a\,(2p+1)}. \tag{3.2}$$

Используя инвариант (3.2) в качестве новой переменной, понизим порядок уравнения (3.1), получив уравнение

$$32f_1{}^4u' + au^3 + a\left(8f_1{}^2+3a\right)u^2 + a\left(a+4f_1{}^2\right)\left(3a+4f_1{}^2\right)u + a^2\left(a+4f_1{}^2\right)^2 = 0. \tag{3.3}$$

Проинтегрировав уравнение (3.3), легко выписать общее решение уравнения (3.1)

$$p = \frac{e^{-\frac{2}{g}}}{2\int\frac{e^{-\frac{2}{g}}(g-1)}{g^2}dg + C_2} - \frac{1}{2}, \qquad x = \frac{2-2g+2g\ln g}{ag} + C_1. \tag{3.4}$$

Учитывая связь между переменными (p,x) и переменными (y,t)

$$y=\frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p+1)}{f_1\,(2p+1)}+f_2,\quad t=ax-\frac{2}{2p+1},$$

можно говорить об общем решении уравнения $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+f(y)$ с функцией $f(y)$ первого типа.

Приведём общие решения уравнения $\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{dy}{dt}+f(y)$ с функциями $f(y)$ других типов:

2.

$$y=\frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p+1)\,f_2}{f_1\,(2p+1)}+f_4,\qquad t=x-\frac{2}{2p+1},$$

где

$$p=-\frac{1}{2}+\frac{g^{f_1}}{C_2-\int\frac{g^{f_1}(g+f_1g+1-f_1)}{g(g-1)}dg},\qquad x=-f_1\ln g-\ln\frac{(g-1)^2}{g}+C_1.$$

3.

$$y=\frac{4e^{-\frac{1}{2p+1}}(p+1)\,f_2}{f_1\,(2p+1)}+f_3,\qquad t=x-\frac{2}{2p+1},$$

где

$$p=-\frac{1}{2}+\frac{e^{-2f_1\arctan g}}{C_2+2({f_1}^2+1)\int\frac{e^{-2f_1\arctan g}}{(f_1-g)(1+g^2)}dg},\qquad x=\ln\frac{(1+g^2)}{(g-f_1)^2}+2f_1\arctan g+C_1.$$

4.

$$y=-\frac{(2k_1+1)^2\,(k_1-pk_1+1)\,p^{k_1}}{2f_2k_1\,(k_1+1)}+f_3,\qquad t=x+(2k_1+1)\ln p,$$

обозначим $m=2k_1+1$, тогда выражения для $p,\,x$ можно представить в виде

$$p=\frac{e^{8{f_2}^2\int\frac{mg-4{f_2}^2}{gB}dg}}{8m{f_2}^2\int\frac{e^{8{f_2}^2\int\frac{mg-4{f_2}^2}{gB}dg}}{B}dg+C_2},\qquad x=32{f_2}^4m\int\frac{dg}{gB}+C_1,$$

где

$$B=g^2m^2(m+1+4f_1f_2)-8m{f_2}^2g-16{f_2}^4(m-1).$$

5.

$$y=-\frac{(2k_1+1)^2\,(k_1-pk_1+1)\,p^{k_1}}{2f_2k_1\,(k_1+1)}+f_4,\qquad t=x+(2k_1+1)\ln p,$$

обозначим $m=2k_1+1$, тогда выражения для $p,\,x$ можно представить в виде

$$p=-\left(8m{f_2}^2\int\frac{e^{-8{f_2}^2\int\frac{mg+4{f_2}^2}{gB}dg}}{B}dg+C_2\right)\times e^{8{f_2}^2\int\frac{mg+4{f_2}^2}{gB}dg},$$

$$x=-32{f_2}^4m\int\frac{dg}{gB}+C_1,$$

где

$$B=g^2m^2(-m+1-4f_3)+8m{f_2}^2g+16{f_2}^4(m+1).$$

6.
$$y = -4f_1\left(\ln\frac{p}{p+1}+\frac{1}{p+1}\right)+f_3, \qquad t = x+\ln\frac{p}{p+1},$$
где
$$p = -1+\frac{8{f_1}^2e^g}{(1-g)\left(8{f_1}^2\int\frac{ge^g}{(g-1)^2}dg+C_2\right)}, \qquad x = C_1-g-\ln(1-g).$$

7.
$$y = \frac{4f_1}{(h^2-1)}\left(\ln\frac{p}{p+1}+\frac{1}{p+1}\right)+f_3, t = x+\ln\frac{p}{p+1},$$
где
$$p = -1-\frac{16hg^{\frac{h+1}{2h}}{f_1}^2}{B\left(8{f_1}^2(h^2-1)\int\frac{g^{\frac{1-h}{2h}}(1+g)}{B^2}dg+C_2\right)}, \qquad x = C_1+\frac{(1-h^2)\int\frac{1+g}{gB}dg}{2h},$$
$$B = gh-h-1-g.$$

8.
$$y = -\frac{4f_1}{(h^2+1)}\left(\ln\frac{p}{p+1}+\frac{1}{p+1}\right)+f_3, \qquad t = x+\ln\frac{p}{p+1},$$
где
$$p = -1+\frac{8{f_1}^2h\sqrt{1+g^2}e^{-\frac{\arctan g}{h}}}{(1-gh)\left(8(h^2+1){f_1}^2B+C_2\right)}, \; x = C_1+\frac{2\arctan g+h\ln(1+g^2)-2h\ln(gh-1)}{2h},$$
$$B = \int\frac{\sqrt{1+g^2}e^{-\frac{\arctan g}{h}}}{h^2g^4-2hg^3+g^2-2hg+1+h^2g^2}dg.$$

9.
$$y = f_2\left(\ln\frac{p}{p+1}+\frac{1}{p+1}\right)+f_3, \qquad t = x+\ln\frac{p}{p+1},$$
где
$$p = -\frac{g^{\frac{f_1}{f_2}-1}e^{-\frac{1+f_1g}{f_2g}}}{\int\frac{(1+f_1g)g^{\frac{f_1}{f_2}}e^{-\frac{1+f_1g}{f_2g}}}{f_2g^3}dg-C_2} \qquad x = C_1+\frac{1+f_1g(1-\ln g)}{f_2g}.$$

Возможности практического применения предъявленных решений приведены в следующем разделе.

4. Решения типа бегущей волны нелинейного уравнения теплопроводности

В работе [5] отмечается, что уравнение (1.7) связано с уравнением диффузии Колмогорова-Петровского-Пискунова, с уравнением Семёнова (Фитц-Хью-Нагумо) используемым в теории цепных химических реакций.

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - F(u) = 0. \tag{4.1}$$

Если функция $F(u)$ удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F'(0) = \alpha > 0, \quad F'(u) < \alpha, \quad 0 < u < 1, \tag{4.2}$$

то говорят об уравнении Колмогорова-Петровского-Пискунова.

Если функция $F(u)$ удовлетворяет условиям

$$F(0) = F(1) = 0, \quad F(a_1) = 0, \quad 0 < a_1 < 1, \quad F'(0) \le 0, \quad F'(1) < 0, \quad F'(a_1) > 0, \tag{4.3}$$

то говорят об уравнении Семёнова.

Будем искать решение уравнения (4.1) типа бегущей волны $u(x,\tau) = y(\rho), \quad \rho = x + b\tau$. При этом перейдём от уравнения (4.1) к уравнению

$$\frac{dy}{d\rho} b - \frac{d^2 y}{d\rho^2} - F(y) = 0. \tag{4.4}$$

Сделав в уравнении (4.4) замену $t = b\rho$, получим

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dy}{dt} - \frac{F(y)}{b^2}.$$

Таким образом, пришли к уравнению типа (1.7) при условии, что $f(y) = -F(y)/b^2$. Покажем, что пятый тип представления функции $f(y)$ позволяет выписывать точные решения уравнений Колмогорова-Петровского-Пискунова, Семёнова.

Определив константы равными $k_1 = 1, \; f_2 = 96, \; f_3 = 0.3, \; f_4 = 0.002,$ получим

$$f(p) = \frac{p(3p^2 + 15p - 10)}{960(p-1)}, \quad y(p) = -\frac{3}{64}p + \frac{3}{128}p^2 + \frac{1}{500}.$$

Соответствующая функция $F(y)$ с точностью до растяжения по оси F имеет вид

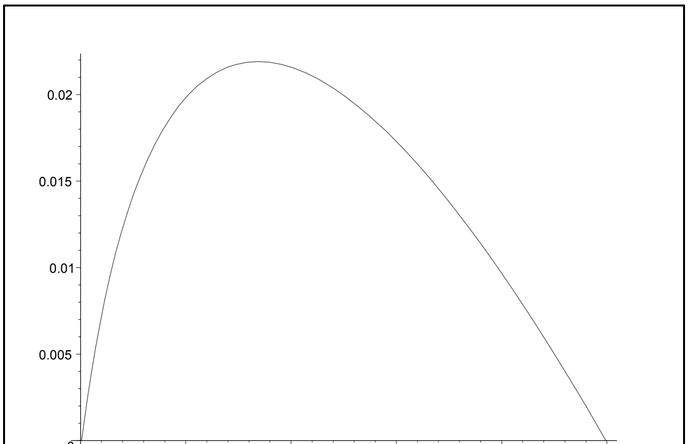

Рисунок **4.1**

Функция $F(u)$ для уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова.

Определив константы равными $k_1 = 1,\ f_2 = 10,\ f_3 = 1.97,\ f_4 = 0.149,$ получим

$$f(p) = \frac{p(197p^2 + 150p - 100)}{1000(p-1)}, \quad y(p) = -\frac{9}{20}p + \frac{9}{40}p^2 + \frac{149}{1000}.$$

Соответствующая функция $F(y)$ с точностью до растяжения по оси F имеет вид

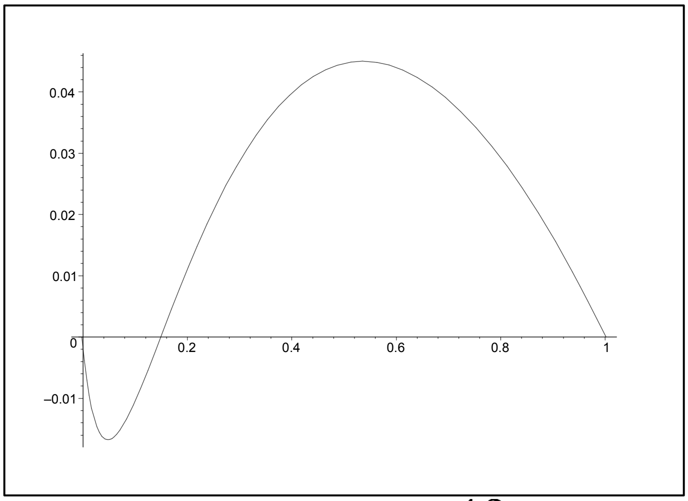

Рисунок **4.2**

Функция $F(u)$ для уравнения Семенова.

В заключение отметим, что пятый тип представления функции $f(y)$, за счёт изменения констант, позволяет описывать достаточно широкий класс решений уравнений Колмогорова-Петровского-Пискунова, и Семёнова.

Список литературы

1. H. Stephani. Differential equations: their solution using symmetries. Cambridge university Press – 1989.

2. Тимошин М.И. Динамические симметрии ОДУ. Уфимский Математический Журнал. 1 (3), 132-138(2009).

3. Н.Х. Ибрагимов. Группы преобразований в математической физике. М. Наука – 1983. – 280 с.

4. Л.В. Овсянников. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М. Наука – 1978.

5. Беркович Л.М. Факторизация как метод нахождения точных инвариантных решений уравнения Колмогорова-Петровского-Пискунова и связанных с ним уравнений Семёнова и Зельдовича. Доклады РАН. Математика 322, №5, 823-827(1992).

Use of dynamic symmetries to integration the ODEs of second order.

© **M.I. Timoshin**[2]

Abstract. There is a class of dynamic symmetries which have invariants providing the lowering of the ODE order and containing the whole class of point symmetries. The procedure of the finding of dynamic symmetries for ODE of second order is suggested. Some examples of the usage of dynamic symmetries are given. The application of the obtained solutions to investigation of the nonlinear heat conduction equation is considered.

Key Words: ordinary differential equations, dynamical symmetries, Abel's equation, nonlinear heat conduction equation.

[2]Ulyanovsk Technical University, Ulyanovsk; midvolga@mail.ru