

УДК 534.113

## О задаче сохранения частот осесимметричных колебаний трубы

© Г. Ф. Сафина<sup>1</sup>

**Аннотация.** В статье исследовано влияние жесткостей закреплений на частоты осесимметричных колебаний трубы. Предложен метод, с помощью которого можно определять закрепления трубы, позволяющие сохранять заданные частоты ее колебаний.

**Ключевые слова:** колебания, закрепления, труба, собственные частоты, сохранение частот.

### 1. Введение

Рассматриваемая нами проблема относится к классу задач акустической диагностики. Решение задачи сохранения заданных частот колебаний трубы важно в связи с увеличением техногенных катастроф и опасностями, связанными с изношенностью основных фондов. Исследования подобной проблемы тесно связаны с прямой задачей по влиянию закреплений трубы на частоты ее колебаний и обратной задачей по диагностированию закреплений трубы. Трубы являются важнейшими составляющими топливных конструкций автомобилей, тракторов, судов, самолетов и т.п. Их колебания приводят часто к дребезжанию, вызывающему неприятные ощущения экипажа и пассажиров, что связано с нахождением частот в опасном для здоровья человека диапазоне. Для сохранения безопасных частот колебаний трубопровода не всегда бывает целесообразно менять его длину или же прикреплять сосредоточенные массы. Поэтому возникает задача определения таких закреплений трубы, которые обеспечивали бы заданные частоты ее колебаний. Именно подобной проблеме посвящена представленная работа. Прямые задачи по колебательным процессам в механических системах рассмотрены во многих классических учебниках, таких как [1] – [8]. Обратные задачи акустической диагностики по частотам колебаний закреплений струн, мембран, стержней, пластин, полых труб, труб с жидкостью рассматривались в работах [9] – [16]. В продолжение исследований работ [6], [7], [11] в данной работе проводится исследование зависимости частот осесимметричных колебаний трубы от жесткостей ее закреплений, и решается задача сохранения безопасных частот.

### 2. Прямая задача по осесимметричным колебаниям оболочки

Прямая задача по осесимметричным колебаниям полой трубы известна и сводится к решению краевой задачи с дифференциальным уравнением [6]

$$y^{IV}(x) - \lambda^4 y(x) = 0 \quad (2.1)$$

и краевыми условиями

$$\begin{aligned} y''(0) = 0; \quad y'''(0) + B_0 l^{-3} y(0) = 0, \\ y''(l) = 0; \quad y'''(l) - B_l l^{-3} y(l) = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

<sup>1</sup>Доцент кафедры математического моделирования, Нефтекамский филиал государственного университета, г. Нефтекамск; Safinagf@mail.ru

Здесь

$$\lambda^4 = \omega^2 \frac{\rho h_\Sigma}{D_1} - \frac{E_2 h_2}{D_1 R^2}, \quad (2.3)$$

$R$ ,  $l$ ,  $D$  — радиус, длина, цилиндрическая жесткость трубы;  $E$ ,  $\rho$  — модуль упругости и плотность материала;  $h_\Sigma$  — толщина трубы с учетом каркаса  $\omega_i$  — частота свободных колебаний  $i$ -го тона;  $x$  — осевая координата;  $E I$  — изгибная жесткость краевого ребра, причем величины, характеризующие трубу в осевом направлении, имеют индекс "1" в кольцевом направлении — "2".

В краевых условиях (2.2):  $B$  — относительная жесткость ребер, причем в сечении  $x = 0$  имеем  $B_0$ , в сечении  $x = l$  —  $B_l$ . Поскольку  $\lambda^4 > 0$ , то при двух мнимых и двух действительных корнях характеристического уравнения общее решение уравнения (2.1) можно представить в виде

$$y(x) = C_1 \operatorname{ch} \lambda x + C_2 \cos \lambda x + C_3 \operatorname{sh} \lambda x + C_4 \sin \lambda x, \quad (2.4)$$

где  $C_i$  — произвольные постоянные, зависящие от краевых условий.

Частотное уравнение к задаче (2.1), (2.2) найдем стандартным способом, приравнявая к нулю определитель

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix}.$$

Здесь  $y_1 = \operatorname{ch} \lambda x$ ,  $y_2 = \cos \lambda x$ ,  $y_3 = \operatorname{sh} \lambda x$ ,  $y_4 = \sin \lambda x$ . Подставляя  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ ,  $y_4$  и их производные в уравнение  $\Delta(\omega) = 0$ , получим

$$\begin{vmatrix} \lambda^2 & -\lambda^2 & 0 & 0 \\ \frac{B_0}{l^3} & \frac{B_0}{l^3} & \lambda^3 & -\lambda^3 \\ \lambda^2 \operatorname{ch} \lambda l & -\lambda^2 \cos \lambda l & \lambda^2 \operatorname{sh} \lambda l & -\lambda^2 \sin \lambda l \\ \lambda^3 \operatorname{sh} \lambda l + \frac{B_l \operatorname{ch} \lambda l}{l^3} & \lambda^3 \sin \lambda l + \frac{B_l \cos \lambda l}{l^3} & \lambda^3 \operatorname{ch} \lambda l + \frac{B_l \operatorname{sh} \lambda l}{l^3} & -\lambda^3 \cos \lambda l + \frac{B_l \sin \lambda l}{l^3} \end{vmatrix}.$$

Раскрывая и упрощая определитель, получим следующее частотное уравнение для осесимметричных колебаний трубы

$$\alpha^6(1 - \operatorname{ch} \alpha \cos \alpha) + \alpha^3(B_0 + B_l)(\operatorname{sh} \alpha \cos \alpha - \operatorname{ch} \alpha \sin \alpha) + 2 B_0 B_l \operatorname{sh} \alpha \sin \alpha = 0, \quad (2.5)$$

где  $\lambda l = \alpha$  — безразмерный параметр, зависящий от краевых условий.

### 3. Влияние упругих закреплений оболочки на частоты ее осесимметричных колебаний

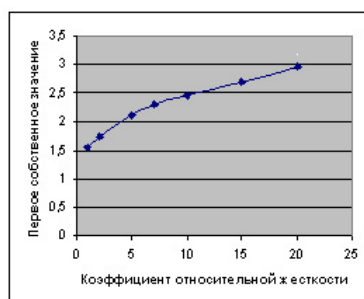
В продолжение исследований работ [6], [7] рассмотрим зависимость собственных частот колебаний трубы от коэффициентов  $B_0$  и  $B_l$  относительных жесткостей ее упругих закреплений.

По результатам решения прямой задачи с дифференциальным уравнением (2.1) и краевыми условиями (2.2) установлено, что при увеличении коэффициентов  $B_0$  и  $B_l$  относительной жесткости краевых ребер оболочки значения собственных частот ее осесимметричных колебаний также увеличиваются.

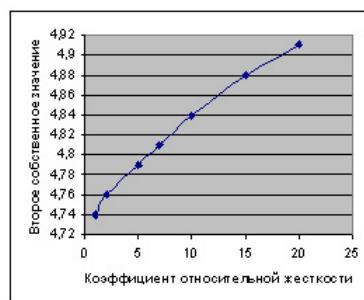
Проведены вычисления собственных значений  $\lambda_k$  при увеличении коэффициента относительной жесткости закрепления на одном конце трубы и фиксированном значении коэффициента на другом ее конце. Например, на рисунке 3.1 для задачи (2.1), (2.2) при параметрах

$$\begin{aligned} \rho &= 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, & h_{\Sigma} &= 0,05 \text{ м}, & D_1 &= 10^7 \text{ Н/м}, \\ E_2 &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, & h_2 &= 0,03 \text{ м}, & R &= 0,2 \text{ м}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

трубы приведен график зависимости собственного значения  $\lambda_1$  колебаний оболочки от коэффициента  $B_l$  при фиксированном коэффициенте  $B_0 = 1$  краевых условий. На рисунке 3.2 показана подобная зависимость от коэффициента  $B_l$  (при  $B_0 = 1$ ) собственного значения  $\lambda_2$ .



Р и с у н о к 3.1



Р и с у н о к 3.2

Такое изменение касается не только первых собственных значений  $\lambda_k$  (а следовательно и  $\omega_k$ ) рассматриваемой задачи, но и всех последующих частот колебаний трубы. Результаты вычислений, например, первых пяти собственных значений  $\lambda_k$  спектральной задачи (2.1), (2.2) при различных коэффициентах  $B_l$  относительной жесткости упругого закрепления на конце  $x = l$  трубы при фиксированном коэффициенте  $B_0 = 1$  на конце  $x = 0$ , приведены в таблице 1.

Аналогичную зависимость между величинами относительной жесткости и соответствующими собственными значениями спектральной задачи можно получить при одновременном изменении коэффициентов относительной жесткости закреплений трубы. Соответствующие результаты решения прямой задачи (2.1), (2.2) при увеличении обоих коэффициентов относительных жесткостей закреплений трубы представлены рисунке 2 (а), 2 (б) и таблице 2.

Таким образом, по решениям прямой спектральной задачи установлено, что увеличение коэффициентов относительной жесткости упругих закреплений краев оболочки ведет к увеличению собственных значений спектральной задачи, и соответственно к увеличению собственных частот осесимметричных колебаний трубы.

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$B_0 = 1, B_l = 1$	1,5641	4,7488	7,8573	10,9971	14,1378
$B_0 = 1, B_l = 2$	1,7501	4,7583	7,8594	10,9978	14,1379
$B_0 = 1, B_l = 5$	2,1249	4,7869	7,8656	11,0001	14,1392
$B_0 = 1, B_l = 7$	2,2908	4,8062	7,8698	11,0016	14,1400
$B_0 = 1, B_l = 10$	2,4779	4,8355	7,8769	11,0039	14,1410
$B_0 = 1, B_l = 20$	2,8661	4,9348	7,8975	11,0115	14,1446

Таблица 1: зависимость значений  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ) спектральной задачи (2.1), (2.2) от коэффициента  $B_l$  ( $B_0 = 1$ ) краевых условий при параметрах (3.1) трубы

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$
$B_0 = 2, B_l = 2$	1,8589	4,7676	7,8614	10,9986	14,1385
$B_0 = 3, B_l = 3$	2,0560	4,7862	7,8656	11,0001	14,1392
$B_0 = 5, B_l = 5$	2,0560	4,8231	7,8739	11,0031	14,1407
$B_0 = 7, B_l = 7$	2,5351	4,8596	7,8822	11,0061	14,1421
$B_0 = 10, B_l = 10$	2,7666	4,9133	7,8946	11,0107	14,1442
$B_0 = 20, B_l = 20$	2,8961	5,0004	7,9155	11,0182	14,1478

Таблица 2: зависимость значений  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ) задачи (2.1), (2.2) от коэффициентов  $B_0$  и  $B_l$  краевых условий при параметрах (3.1) трубы

Заметим, что такое соответствие между коэффициентами относительной жесткости упругих краевых ребер оболочки и собственными частотами ее осесимметричных колебаний справедливы при любых, отличных от (3.1), физических параметрах трубы.

Проведенное выше исследование влияния краевых условий на значения собственных частот осесимметричных колебаний цилиндрической важно для решения проблемы сохранения заданных частот ее колебаний при изменениях физических параметров оболочки или при изменениях жесткости закрепления на одном из ее краев. Последняя же проблема разрешима при решении обратной задачи к данной прямой задаче.

#### 4. Задача сохранения заданных частот колебаний

В работе [11] поставлена к прямой спектральной задаче обратная: по собственным частотам свободных осесимметричных колебаний трубы найти коэффициенты ее упругих закреплений.

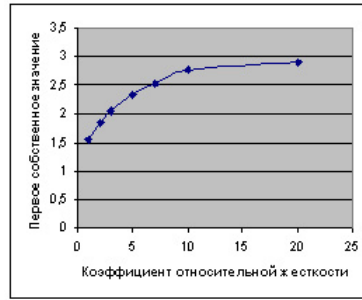
Задача решена по известным двум собственным частотам колебаний. Поскольку учитывается и абсолютно жесткое закрепление, то краевые условия (2.2) задачи записаны в виде:

$$\begin{aligned}
 U_1 &= y''(0) = 0; \\
 U_2 &= a_1 y'''(0) + a_0 y(0) = 0; \\
 U_3 &= y''(l) = 0; \\
 U_4 &= b_1 y'''(l) - b_0 y(l) = 0.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

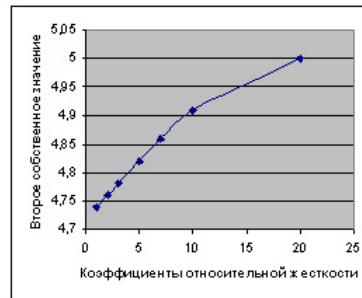
Здесь

$$B_0 l^{-3} = a_0 a_1^{-1}; \quad B_1 l^{-3} = b_0 b_1^{-1}. \tag{4.2}$$

При абсолютно жестком закреплении ребер оболочки в краевых условиях (2.2) остаются только вторые слагаемые. Этому же соответствует случай  $a_1 = 0$ ,  $b_1 = 0$  в



Р и с у н о к 3.3



Р и с у н о к 3.4

Рис. 2 – Зависимость первого собственного значения  $\lambda_1$  (а), второго собственного значения  $\lambda_2$  (б) задачи (2.1), (2.2) от коэффициентов  $B_0$  и  $B_l$  краевых условий при параметрах (3.1) трубы

краевых условиях (4.1).

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов форм  $U_2$  и  $U_4$  краевых условий (4.1) через:

$$A = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_0 & b_1 \end{vmatrix}, \quad (4.3)$$

а миноры, составленные из  $i$ -го и  $j$ -го столбцов этой матрицы — через  $M_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 4$ ). Введем также в рассмотрение векторы

$$\mathbf{a} = (a_0, a_1, 0, 0)^T, \quad \mathbf{b} = (0, 0, -b_0, b_1)^T, \quad (i = 1; 2).$$

В таких обозначениях задача диагностирования формулируется следующим образом. Известны отличные от нуля собственные значения  $\lambda_i$  задачи (2.1), ранг матрицы  $A$  равен 2, миноры  $M_{12}$  и  $M_{34}$  этой матрицы равны нулю; неизвестны коэффициенты краевых условий (4.1). Требуется восстановить матрицу  $A$  с точностью до линейной эквивалентности.

Частотное уравнение для краевой задачи (2.1), (4.1) находим стандартными методами:

$$M_{13} f_1(\lambda_i) + (M_{14} - M_{23}) f_2(\lambda_i) + M_{24} f_4(\lambda_i) = 0; \quad (i = 1, 2). \quad (4.4)$$

в котором функции  $f_i(\lambda_i)$  выражаются следующим образом

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_i) &= 2 \operatorname{sh}(\lambda_i l) \sin(\lambda_i l); \\ f_2(\lambda_i) &= \lambda_i^3 (\operatorname{ch}(\lambda_i l) \sin(\lambda_i l) - \operatorname{sh}(\lambda_i l) \cos(\lambda_i l)); \\ f_3(\lambda_i) &= \lambda_i^6 (\operatorname{ch}(\lambda_i l) \cos(\lambda_i l) - 1). \end{aligned}$$

Пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — два собственных значения спектральной задачи (2.1), (4.1), соответствующие первым двум частотам осесимметричных колебаний трубы. Тогда равенства (4.4) представляют собой систему двух уравнений от трех неизвестных  $M_{13}$ ,  $(M_{14} - M_{23})$ ,  $M_{24}$ . Если ранг матрицы системы уравнений (4.4) равен двум, то система имеет единственное решение с точностью до постоянного множителя. Определив все неизвестные миноры  $M_{ij}$ , можно найти матрицу  $A$  с точностью до линейных эквивалентных матриц, т.е. восстановить краевые условия спектральной задачи.

Применение найденного метода рассмотрим на примере (для определенности примем, что  $l = 1$ ).

**Пример 1.** Известны собственные значения задачи (2.1), (4.1)  $\lambda_1 = 1,5615$ ,  $\lambda_2 = 4,7488$ , соответствующие первым двум собственным частотам осесимметричных колебаний трубы. Определить коэффициенты относительной жесткости упругих закреплений.

При заданных собственных значениях решение системы уравнений (4.4), найденное с помощью ЭВМ, имеет вид:

$$\begin{aligned} M_{13} &= -0,5000 C; \\ M_{24} &= -0,5000 C; \\ M_{14} - M_{23} &= C. \end{aligned}$$

Так как  $M_{13} \neq 0$ , то  $a_0 \neq 0$  и  $b_0 \neq 0$ . Разделим первую и вторую строки матрицы  $A$  соответственно на  $a_0$  и  $b_0$ . После этих преобразований (с точностью до эквивалентных матриц) матрицу  $A$  можно представить в виде:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & a_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & b_1 \end{array} \right\|.$$

Отсюда  $M_{13} = -1$ ,  $M_{14} - M_{23} = 2$ ,  $M_{24} = 1$ . Поскольку  $M_{14} - M_{23} = a_1 + b_1$ ,  $M_{24} = a_1 b_1$ , то из равенств  $a_1 + b_1 = 2$  и  $a_1 b_1 = 1$  по обратной теореме Виета имеем, что  $a_1 = 1$  и  $b_1 = 1$ . Значит

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right\|.$$

Далее по формулам (4.2) определим коэффициенты относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки:  $B_0 = 1$ ,  $B_l = 1$ . Заметим, что относительные жесткости упругих краевых ребер определены верно, по-другому, определены верно коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ . Числа  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , приведенные выше, совпадают с первыми двумя корнями частотного уравнения (4.4) при значениях  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $b_0 = 1$ ,  $b_1 = 1$ , т.е. при  $M_{13} = -1$ ,  $M_{14} = 1$ ,  $M_{23} = -1$ ,  $M_{24} = 1$ .

В продолжение исследований поставим и решим задачу сохранения заданных частот колебаний при изменениях в закреплениях трубы.

Пусть по практической надобности необходимо изменить закрепление трубы на одном из ее концов. При этом по исследованиям прямой задачи показано, что частоты осесимметричных колебаний трубы изменятся. Возникает вопрос: как при этом сохранить прежние безопасные частоты колебаний? Эту проблему мы предлагаем решить с помощью изменения коэффициента относительной жесткости на другом конце трубы.

Действительно, если известны первые две собственные частоты колебаний  $\omega_i$ , а значит соответствующие им значения  $\alpha_i$ , то подставляя значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в уравнение (2.5) получим систему однородных уравнений

$$\begin{aligned} f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_1)x + f_3(\alpha_1)y &= 0, \\ f_1(\alpha_2) + f_2(\alpha_2)x + f_3(\alpha_2)y &= 0, \end{aligned} \tag{4.5}$$

в которой

$$\begin{aligned} f_1(\alpha_i) &= \alpha_i^6(1 - \operatorname{ch} \alpha_i \cos \alpha_i), \\ f_2(\alpha_i) &= \alpha_i^3(\operatorname{sh} \alpha_i \cos \alpha_i - \operatorname{ch} \alpha_i \sin \alpha_i), \\ f_3(\alpha_i) &= 2 \sin \alpha_i \operatorname{sh} \alpha_i, \\ x &= B_0 + B_l, y = B_0 B_l, i = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Пусть определитель матрицы системы уравнений (4.5) отличен от нуля. Тогда по теореме Крамера система имеет решение, определяемое по формулам:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta_x &= f_1(\alpha_2) f_3(\alpha_1) - f_1(\alpha_1) f_3(\alpha_2), \\ \Delta_y &= f_1(\alpha_2) f_2(\alpha_1) - f_1(\alpha_1) f_2(\alpha_2), \\ \Delta &= f_2(\alpha_1) f_3(\alpha_2) - f_2(\alpha_2) f_3(\alpha_1). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Полученные значения  $x$  и  $y$  приводят к следующей системе уравнений

$$\begin{aligned} B_0 + B_l &= x, \\ B_0 B_l &= y, \end{aligned}$$

из которой по обратной теореме Виета определяются коэффициенты  $B_0, B_l$ :

$$\begin{aligned} B_0 &= \frac{1}{2}(x \pm \sqrt{x^2 - 4y}), \\ B_l &= \frac{1}{2}(x \mp \sqrt{x^2 - 4y}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Формулы (4.9) показывают двойственность получаемых значений  $B_0, B_l$ .

Таким образом, если известны первые две собственные частоты колебаний  $\omega_i$  спектральной задачи (а значит соответствующие им значения  $\alpha_i$ ), которые необходимо сохранить при изменении коэффициента жесткости на одном конце трубы, то используя аналитические формулы (4.6) — (4.9) можно определить необходимое для этого изменение в значении коэффициента жесткости на другом конце трубы.

При этом в формулы (4.6) — (4.9) подставляются значения частот  $\alpha_i$ , соответствующие сохраняемым частотам  $\omega_i$ , а также измененное значение коэффициента относительной жесткости одного из краев оболочки, определяя тем самым соответствующее изменение в коэффициенте жесткости на другом ее краю.

Рассмотрим задачу сохранения заданных безопасных частот осесимметричных колебаний оболочки на конкретных примерах.

**Пример 2.** Известны физические параметры (3.1) цилиндрической оболочки. Оболочка закреплена пружинами с коэффициентами относительной жесткости, равными двум. Определить необходимые для сохранения частот осесимметричных колебаний оболочки изменения в ее закреплениях, если по практической надобности коэффициент относительной жесткости пружины, с которой закреплён левый конец оболочки увеличивается до трех.

При коэффициентах  $B_0 = 2$  и  $B_l = 2$  по решению прямой задачи (2.1), (2.2) получим, что частоты осесимметричных колебаний оболочки следующие:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 19611,667; \\ \omega_2 &= 19612,013; \\ \omega_3 &= 19613,144; \\ \omega_3 &= 19615,792. \end{aligned} \quad (4.10)$$

При этом соответствующие собственные значения таковы:

$$\lambda_1 = 4,7676; \quad \lambda_2 = 7,8614; \quad \lambda_3 = 10,9986; \quad \lambda_4 = 14,1385.$$

По условию на левом конце оболочки необходимо усилить жесткость закрепления, а именно, увеличить коэффициент жесткости  $B_0$  с двух до трех, оставляя частоты колебаний прежними. Определим соответствующее закрепление на правом конце оболочки и ответим на вопрос: сохраняются ли заданные частоты (4.10)?

По проведенным исследованиям влияния коэффициентов относительной жесткости на частоты осесимметричных колебаний трубы имеем, что если коэффициент  $B_0$  увеличить, то частоты также увеличатся. Наша задача — оставить частоты прежними, т. е. неизменными.

Для этого значения  $\alpha_1 = 4,7676$  и  $\alpha_2 = 7,8614$ , соответствующие двум частотам  $\omega_1$  и  $\omega_2$  из (4.10), поставим в систему уравнений (4.5) и получим при  $l = 1$  следующую систему

$$\begin{aligned} -26397,96874 + 6716,943709 \cdot x - 117,4520412 \cdot y &= 0; \\ 0,2530379755 \cdot 10^7 - 635190,2256 \cdot x + 2595,263294 \cdot y &= 0; \end{aligned}$$

Решив с помощью ЭВМ последнюю систему уравнений находим, что

$$\begin{aligned} x &= 3,9999; \\ y &= 3,9999. \end{aligned}$$

Эти же результаты получаются, если использовать для определения  $x, y$  аналитические формулы (4.6) — (4.9). По найденным значениям  $x, y$  и формулам (4.9) при  $B_0 = 3$  получим, что  $B_l$  должно быть равно 0,999999713.

Получили, что для сохранения заданных частот при увеличении коэффициента жесткости  $B_0$  с 2 до 3 необходимо коэффициент  $B_l$  уменьшить с 2 до 0,99.

Заметим, что такое же изменение коэффициента жесткости  $B_l$  необходимо провести для сохранения не только первых двух частот, но последующих, например, третьей и четвертой собственной частоты осесимметричных колебаний оболочки при параметрах (3.1).

Отметим также, что определяя частоты колебаний трубы при коэффициентах  $B_0 = 3$  и  $B_l = 0,9999$  по решению задачи (2.1), (2.2) получим те же частоты (4.10) ее осесимметричных колебаний.

Пример 3. Труба закреплена пружинами с коэффициентами относительной жесткости на правом конце равным двенадцати и на левом — одному. Известны также параметры (3.1) цилиндрической оболочки. Необходимо увеличить коэффициент относительной жесткости пружины на левом конце трубы с единицы до шести, сохраняя прежние частоты колебаний оболочки. Определить необходимые для этого изменения в закреплении на правом конце трубы.

По решению прямой задачи (2.1), (2.2) при  $B_0 = 1$  и  $B_l = 12$  получим следующие собственные частоты осесимметричных колебаний трубы

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 19686,801; \\ \omega_2 &= 20127,523; \\ \omega_3 &= 21508,482; \\ \omega_4 &= 24439,134, \end{aligned} \tag{4.11}$$

и соответствующие им собственные значения

$$\lambda_1 = 4,8552; \quad \lambda_2 = 7,8803; \quad \lambda_3 = 11,0054; \quad \lambda_4 = 14,1417.$$



На левом конце трубы усилим жесткость закрепления с  $B_0 = 1$  до  $B_0 = 6$ , оставляя прежние частоты (4.11) колебаний.

Подставляя  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в систему уравнений (4.5) получим:

$$\begin{aligned} -106636,4315 + 8320,120329 \cdot x - 127,0945912 \cdot y &= 0; \\ 0,8600692576 \cdot 10^7 - 664032,3747 \cdot x + 2643,968036 \cdot y &= 0; \end{aligned}$$

Из последней системы находим неизвестные  $x$  и  $y$ :

$$\begin{aligned} x &= 13,0000; \\ y &= 11,9999. \end{aligned}$$

Эти же результаты получаются, если использовать аналитические формулы (4.6) – (4.9). При  $B_0 = 6$  по значениям  $x$  и  $y$  и формулам (4.9) получим:

$$B_l = 7,00000011.$$

Значит, для сохранения заданных частот колебаний при увеличении коэффициента жесткости  $B_0$  на левом конце трубы с 1 до 6 необходимо уменьшить коэффициент жесткости  $B_l$  на правом конце с 12 до 7.

Такая же обратная зависимость между жесткостями закреплений справедлива при сохранении безопасных частот ее осесимметричных колебаний и при других, отличных от параметров (3.1) оболочки.

$\omega_i, \text{с}^{-1}$	$B_0$	$B_l$	$B_0$	$B_l$	$B_0$	$B_l$
$\omega_1=19611,667$	2,5	1,499	3	0,999	3,5	0,499
$\omega_2=19612,013$						
$\omega_3=19613,144$						
$\omega_4=19615,792$						
$\omega_1=20298,504$	27	12,99	32	7,999	35	4,999
$\omega_2=23396,260$						
$\omega_3=31479,336$						
$\omega_4=45054,811$						
$\omega_1=43324,270$	60	39,99	75	24,999	80	19,999
$\omega_2=84610,649$						
$\omega_3=156424,625$						
$\omega_4=255043,261$						

Таблица 3: значения коэффициентов  $B_0$ ,  $B_l$ , соответствующие неизменным значениям собственных частот для задачи (2.1), (2.2) при параметрах (4.12) системы

Например, в следующей таблице 3 для задачи (2.1), (2.2) приведены зависимости между коэффициентами  $B_0$ ,  $B_l$  относительной жесткости краевых ребер оболочки, необходимые для сохранения заданных частот ее колебаний при параметрах оболочки:

$$\begin{aligned} \rho &= 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, & h_\Sigma &= 0,04 \text{ м}, & D_1 &= 9^7 \text{ Н/м}, \\ E_2 &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, & h_2 &= 0,03 \text{ м}, & R &= 0,25 \text{ м}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Приведенные примеры показывают, что для сохранения заданных (безопасных) частот осесимметричных колебаний трубы необходимо провести соответствующие изменения в

упругих закреплениях ее краев. Причем, при увеличении коэффициента жесткости на одном конце трубы для сохранения прежних частот необходимо уменьшить коэффициент жесткости на другом ее конце, и наоборот. Формулы (4.6)–(4.9) позволяют определять соответствующие значения коэффициентов  $B_0$ ,  $B_l$  относительной жесткости краевых ребер оболочки, при которых частоты осесимметричных колебаний остаются заданными.

## 5. Заключение

Трубы являются составляющими многих механических систем и технических конструкций. Изменения численных значений частот колебаний трубы свидетельствуют об изменениях жесткости закреплений ее краев. Поэтому для обнаружения ненадежности в механической конструкции, связанной с изменением жесткости закреплений труб, можно использовать собственные частоты колебаний, вызванные постукиванием по трубе. Численные значения уже первых двух частот, найденные с помощью частотомера, позволяют по рассмотренному методу оценить необходимость изменений упругих краев трубы в системе. В этом и состоит преимущество рассматриваемого метода.

Таким образом, полученный метод позволяет определять такие закрепления труб, при которых сохраняются заданные частоты ее закреплений, увеличивая тем самым срок безаварийной службы механической системы, составляющими которой являются трубы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д. Введение в акустическую динамику машин. М.: Наука, 1979.
2. Павлов Б. В. Акустическая диагностика механизмов. М.: Машиностроение, 1971.
3. Генкин М. Д., Соколова А.Г. Виброакустическая диагностика машин и механизмов. М.: Машиностроение, 1987.
4. Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. / Ред. совет: В. Н. Челомей (пред.). М.: Машиностроение, 1978. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. 1978.
5. Агеносов Л. Г., Саченков А.В. Устойчивость и свободные колебания тонких цилиндрических оболочек кругового сечения при разных краевых условиях. Сб. «Исследования по теории пластин и оболочек». Вып.2. Изд. Казанск. гос. ун-та, 1964.
6. Антоненко Э. В. Свободные колебания и устойчивость оболочек с упругими краевыми ребрами. Прикладная механика, Т.11. Вып.6, 1975 – С.44–50.
7. Антоненко Э. В. Частоты свободных колебаний гладких подкрепленных цилиндрических оболочек с упруго подкрепленными краями. Прикладная механика, Т 25, Вып.8, 1989 – С.122–126.
8. Гонткевич В. С. Собственные колебания пластин и оболочек. Киев: Наукова думка, 1964, –288с.
9. Ахтямов А. М. Об определении краевого условия по конечному набору собственных значений // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 8. С. 1127–1128.

10. Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М. Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 290–298.
11. Ахтямов А.М., Сафина Г.Ф. Диагностирование относительной жесткости упругих краевых ребер цилиндрической оболочки. //Техническая акустика, №19, 2004.
12. Сафина Г. Ф. Диагностирование относительной жесткости подкрепленных цилиндрических оболочек по собственным частотам их асимметричных колебаний // Контроль. Диагностика. 2005. № 12. – С.55–59.
13. Сафина Г. Ф. Определение закреплений трубопровода с протекающей по нему жидкостью. Обозрение прикладной и промышленной математики". 2005. Т.12. Вып.4. – С. 1079–1080.
14. Сафина Г.Ф. Диагностирование закреплений трубопровода с жидкостью // Приборы и системы. Управление. Контроль. Диагностика. 2006. № 3. – С.59-60.
15. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. № 1. С. 139–147.
16. Ахтямов А. М. Теория идентификации краевых условий. Уфа: Гилем, 2008. 300 с.

## About a problem of preservation of frequencies Pipe fluctuations

© G F. Safina<sup>2</sup>

**Abstract.** In article influence fastenings on frequencies is investigated pipe fluctuations. The method, with the help is offered Which it is possible to define the pipe fastenings, allowing to keep The set frequencies of its fluctuations.

**Key Words:** fluctuations, fastenings, a pipe, Own frequencies, preservation of frequencies.

---

<sup>2</sup>The senior lecturer of chair Mathematical modelling, Neftekamsk branch The Bashkir state university, Neftekamsk; Safinagf@mail.ru