УДК 517.926.7

Условия простоты систем линейных дифференциальных уравнений

© Э. В. Мусафиров[1]

Аннотация. В работе получены необходимые, достаточные, а также необходимые и достаточные условия простоты обыкновенных линейных дифференциальных систем. Установлена взаимосвязь свойства простоты линейной дифференциальной системы со свойствами решений системы с удвоенной матрицей коэффициентов.

Ключевые слова: система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, отражающая функция, отражающая матрица, простые системы.

1. Введение

Многие процессы, происходящие в реальных системах, моделируются с помощью систем дифференциальных уравнений. Однако, как правило, эти дифференциальные системы не интегрируются в конечном виде, что приводит к необходимости изучать свойства решений этих систем по виду самих систем. На качественное поведение семейств решений существенное влияние оказывает наличие, количество и расположение периодических решений. При этом для выяснения вопросов о существовании и количестве периодических решений можно использовать отображение Пуанкаре (отображение за период) (см., например, [1]), знание которого позволяет решить вопросы существования и устойчивости периодических решений. Учитывая, что отображение за период определяется через общее решение системы, кажется, что найти явное выражение для отображения за период для неинтегрируемых в конечном виде систем невозможно. Однако иногда это можно сделать с помощью отражающей функции (ОФ) Мироненко В.И. (см. [2, 3]).

Далее приведем сведения из теории ОФ, необходимые для дальнейшего изложения.

Рассмотрим систему

$$\dot{x} = X(t,x), \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1}$$

решения которой однозначно определяются начальными условиями. Пусть общее решение этой системы в форме Коши имеет вид $x = \varphi(t; t_0, x_0)$.

Для каждой такой системы определяется (см. [2, 3]) *отражающая функция* $F(t,x) := \varphi(-t; t, x)$, определенная в некоторой области, содержащей гиперплоскость $t = 0$.

Функция $F(t,x)$ есть ОФ системы (1.1) тогда и только тогда, когда эта F является решением системы уравнений в частных производных, называемой *основным соотношением* (ОС), $\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial F(t,x)}{\partial x} X(t,x) + X(-t, F(t,x)) = 0$, с начальным условием $F(0,x) \equiv x$.

Любая непрерывно дифференцируемая функция $F(t,x)$, удовлетворяющая условию $F(-t, F(t,x)) \equiv F(0,x) \equiv x$, является ОФ целого класса систем вида (см. [3])

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}(-t, F(t,x)) \left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} - 2S(t,x) \right) - S(-t, F(t,x)), \tag{1.2}$$

[1]Заведующий кафедрой высшей математики и информационных технологий, Полесский государственный университет, г. Пинск, Беларусь; musafirov@bk.ru.

где $S(t,x)$ — произвольная вектор–функция, при которой решения системы (1.2) однозначно определяются начальными условиями.

Поэтому все системы вида (1.1) разбиваются на классы эквивалентности вида (1.2) так, что каждый класс характеризуется своей ОФ, называемой *отражающей функцией класса*.

Таким образом, при изучении вопросов существования и устойчивости периодических решений, а также существования решений краевых задач у некоторой дифференциальной системы эту систему можно заменить эквивалентной (в смысле совпадения ОФ). Это легко сделать, когда ОФ данной системы известна. Однако иногда можно построить дифференциальную систему, эквивалентную данной, и в том случае, когда ОФ неизвестна. Например, если система (1.1) эквивалентна некоторой стационарной системе, то эта система совпадает с системой $\dot{x} = X(0,x)$. Таким образом, в том классе эквивалентности, в котором существует стационарная система, эта стационарная система может играть роль такой системы. В других классах роль стационарной системы выполняет *простая система* (см. [4, 5]), получающаяся из системы (1.2) при $S(t,x) \equiv 0$,

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x}\left(-t, F(t,x)\right)\frac{\partial F(t,x)}{\partial t} \equiv -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F(t,x)}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial F(t,x)}{\partial t},$$

где $F(t,x)$ — ОФ этой системы.

Знание свойств простых систем позволяет использовать обширные результаты исследований стационарных систем, полученных в различных областях математического моделирования, для качественного изучения эквивалентных (в смысле совпадения ОФ) нестационарных систем, учитывая, что любая стационарная система является простой.

Для линейной системы

$$\dot{x} = P(t)x, \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.3}$$

где $P(t)$ — непрерывная $n \times n$–матрица, ОФ также линейна и имеет вид $F(t,x) \equiv F(t)x$. Матрица $F(t)$, согласно [2], называется отражающей матрицей (ОМ) системы (4). Если $X(t)$ — фундаментальная матрица решений (ФМ) системы (4), то $F(t) \equiv X(-t)X^{-1}(t)$. Поэтому для любой ОМ $F(t)$ справедливы соотношения $F(-t)F(t) \equiv F(0) = E$, где E — единичная $n \times n$–матрица. ОС в линейном случае имеет вид $\dot{F}(t) + F(t)P(t) + P(-t)F(t) = 0, \quad F(0) = E$. Всякая линейная система с ОМ $F(t)$ может быть записана в виде $\dot{x} = \left(-\frac{1}{2}F(-t)\dot{F}(t) + F(-t)R(t) - R(-t)F(t)\right)x$, где $R(t)$ — произвольная $n \times n$–матрица. При $R(t) \equiv 0$ получим *простую линейную систему* $\dot{x} = -\frac{1}{2}F(-t)\dot{F}(t)x$.

Заметим, что в одном классе эквивалентности с линейной системой (4) находятся и нелинейные системы обладающие линейной ОФ, поэтому система (4) представляет интерес не только как линейное приближение системы (1.1).

Если матрица $P(t)$ — 2ω–периодическая и $F(t)$ — ОМ системы (1.3), то $F(-\omega)$ — *матрица монодромии* (см. [6]) этой системы на периоде $[-\omega;\omega]$. При этом решения μ_i, $i = \overline{1,n}$ уравнения $\det\left(F(-\omega) - \mu E\right) = 0$ являются *мультипликаторами* (см. [6]) системы (1.3).

2. Условия простоты линейных систем

Л е м м а 2.1. *Для простоты системы (1.3) с ОМ $F(t)$ необходимо и достаточно выполнения тождества*

$$F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t). \tag{2.1}$$

Доказательство. Необходимость. Пусть данная система простая, $F(t,x)$ — ее ОФ. Тогда по лемме 1 из [4] верно тождество $F'_x(t,x)P(t)x \equiv P(-t)F(t,x)$. Так как $F(t,x) \equiv F(t)x$, то $F(t)P(t)x \equiv P(-t)F(t)x$. Тогда $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$.

Достаточность. Пусть выполняется тождество (2.1). Умножим его обе части на x, получим $F(t)P(t)x \equiv P(-t)F(t)x$. Так как $F(t,x) \equiv F(t)x$, то последнее тождество можно записать в виде $F'_x(t,x)P(t)x \equiv P(-t)F(t,x)$. Тогда по лемме 1 из [4] данная система простая.

Доказательство закончено.

Из доказанной леммы вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Система (1.3) проста тогда и только тогда, когда матрицы $P(t)$ и $P(-t)$ подобны и существует дифференцируемая матрица подобия $S(t)$, для которой $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$, $S(0)=E$ и $\dot S(t) \equiv -2P(-t)S(t)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть система (1.3) проста, тогда по лемме 2.1. $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$, где $F(t)$ — ОМ системы (1.3). Т.е. матрицы $P(t)$ и $P(-t)$ подобны с матрицей подобия $F(t)$. Так как $F(t)$ — ОМ, то она дифференцируемая, $F(0)=E$ и $\dot F(t)+F(t)P(t)+P(-t)F(t) \equiv 0$. А так как $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$, то $\dot F(t) \equiv -2P(-t)F(t)$. Т.е. роль $S(t)$ играет ОМ системы (1.3).

Достаточность. Пусть матрицы $P(t)$ и $P(-t)$ подобны с дифференцируемой матрицей подобия $S(t)$, причем $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$, $S(0)=E$ и $\dot S(t) \equiv -2P(-t)S(t)$. Тогда $\dot S(t)+S(t)P(t)+P(-t)S(t) \equiv 0$. Таким образом, для системы (1.3) и дифференцируемой матрицы $S(t)$ выполнено ОС. Значит, $S(t)$ — ОМ системы (1.3). А так как для нее $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$, то по лемме 2.1. система (1.3) проста.

Доказательство закончено.

Замечание 2.1. *Из доказательства теоремы 2.1. следует, что матрица $S(t)$ из формулировки теоремы является ОМ системы (1.3).*

Теорема 2.1. в некоторых случаях позволяет выяснить: является ли данная система простой. Покажем это на примере.

Пример 2.1. *Рассмотрим систему (1.3) с матрицей системы*

$$P(t) \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos t+\sin^3 t & \left(\cos t+\sin^2 t+\sin^3 t\right)\mathrm{e}^{-\cos t} \\ -\left(\cos t-\sin^2 t+\sin^3 t\right)\mathrm{e}^{\cos t} & -\cos t-\sin^3 t \end{pmatrix}.$$

Для этой системы рассмотрим матрицу

$$S(t) \equiv \begin{pmatrix} 1-\sin t & -\mathrm{e}^{-\cos t}\sin t \\ \mathrm{e}^{\cos t}\sin t & 1+\sin t \end{pmatrix}.$$

Проверкой убедимся, что $S(0)=E$, $S(t)P(t) \equiv P(-t)S(t)$ и $\dot S(t) \equiv -2P(-t)S(t)$. Тогда по теореме 2.1. рассматриваемая система является простой. Заметим также, что $S(t)$ — ОМ рассматриваемой системы.

Таким образом, если система (1.3) проста, то по теореме 2.1. матрицы $P(t)$ и $P(-t)$ подобны. Это позволяет получить следующие утверждения.

Следствие 2.1. *Если система (1.3) проста, то собственные числа $\lambda_1(t),\lambda_2(t),\ldots,\lambda_n(t)$ матрицы $P(t)$ можно определить так, чтобы функции $\lambda_i : t \mapsto \lambda_i(t)$ были четными.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система (1.3) проста. Тогда по теореме 2.1. матрицы $P(t)$ и $P(-t)$ подобны. Значит (см. [7]), эти матрицы имеют одни и те же собственные числа при каждом значении переменной t. Пусть $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)$ — собственные числа матрицы $P(t)$, тогда $\lambda_1(-t), \lambda_2(-t), \ldots, \lambda_n(-t)$ — собственные числа матрицы $P(-t)$. Так как при каждом значении переменной t множества $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)\}$ и $\{\lambda_1(-t), \lambda_2(-t), \ldots, \lambda_n(-t)\}$ совпадают, то собственные числа матрицы $P(t)$ можно переопределить так, чтобы они были четными функциями.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 2.2. *Пусть система (1.3) проста, тогда коэффициенты многочлена* $\det(P(t) - \lambda E)$ *— четные функции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система (1.3) проста, тогда по теореме 2.1. матрицы $P(t)$ и $P(-t)$ подобны. Значит, при каждом значении переменной t множества $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)\}$ и $\{\lambda_1(-t), \lambda_2(-t), \ldots, \lambda_n(-t)\}$ совпадают, где $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)$ — собственные числа матрицы $P(t)$.

Пусть $\det(P(t) - \lambda E) \equiv (-1)^n\lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(t)\lambda + a_n(t)$. Тогда по теореме Виета при каждом значении переменной t

$$\begin{aligned}
a_n &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,\\
a_{n-1} &= -(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1} + \lambda_1\cdots\lambda_{n-2}\lambda_n + \cdots + \lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_2 &= (-1)^{n-2}(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n),\\
a_1 &= (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n).
\end{aligned}$$

Таким образом, каждое слагаемое коэффициента a_k представляет собой произведение элементов различных сочетаний из n элементов λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n по k элементов. Причем этих слагаемых ровно столько, сколько и сочетаний. Откуда, учитывая совпадение множеств $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \ldots, \lambda_n(t)\}$ и $\{\lambda_1(-t), \lambda_2(-t), \ldots, \lambda_n(-t)\}$ при каждом значении переменной t, получим $a_k(t) = a_k(-t)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Из леммы 2.2., в частности, вытекает следующее утверждение.

С л е д с т в и е 2.2. *Если система (1.3) проста, то* $\det P(t)$ *и* $\mathrm{Tr}P(t)$ *— четные функции.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из леммы 2.2., учитывая, что у многочлена $\det(P(t)-\lambda E)$ коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}P(t)$, а коэффициент при λ^0 равен $\det P(t)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Если матрица системы (1.3) непрерывно дифференцируема, то справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 2.3. *Пусть система (1.3) с непрерывно дифференцируемой матрицей* $P(t)$ *проста и* $F(t)$ *— ее ОМ, тогда*

$$F(t)\dot{P}(t) \equiv -\dot{P}(-t)F(t), \tag{2.2}$$
$$F(t)P(t)\dot{P}(t) \equiv -P(-t)\dot{P}(-t)F(t). \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть система проста, тогда по лемме 2.1. для ее ОМ $F(t)$ верно тождество (2.1). Продифференцируем его, получим $\dot F(t)P(t) + F(t)\dot P(t) \equiv -\dot P(-t)F(t) + P(-t)\dot F(t)$. Заменив $\dot F(t)$ на $-F(t)P(t) - P(-t)F(t)$ (используя ОС), а также используя тождество (2.1), получим тождество (2.2).

Умножив тождество (2.2) на матрицу $P(-t)$ слева, получим $P(-t)F(t)\dot P(t) \equiv -P(-t)\dot P(-t)F(t)$. Используя тождество (2.1), получим тождество (2.3).
Доказательство закончено.

Из доказанной выше леммы (тождества (2.2)) вытекают следующие утверждения.

Следствие 2.3. *Если система (1.3) с непрерывно дифференцируемой матрицей $P(t)$ проста, то собственные числа $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, ..., $\lambda_n(t)$ матрицы $\dot P(t)$ можно определить так, чтобы функции $\lambda_i:\ t \mapsto \lambda_i(t)$ были нечетными.*

Доказательство. Пусть система (1.3) проста. Тогда по лемме 2.3. матрицы $\dot P(t)$ и $-\dot P(-t)$ подобны. Значит, (см. [7]) эти матрицы имеют одни и те же собственные числа при каждом значении переменной t. Пусть $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ — собственные числа матрицы $\dot P(t)$, тогда $-\lambda_1(-t), -\lambda_2(-t), \dots, -\lambda_n(-t)$ — собственные числа матрицы $-\dot P(-t)$. Так как при каждом значении переменной t множества $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)\}$ и $\{-\lambda_1(-t), -\lambda_2(-t), \dots, -\lambda_n(-t)\}$ совпадают, то собственные числа матрицы $\dot P(t)$ можно переопределить так, чтобы они были нечетными функциями.
Доказательство закончено.

Лемма 2.4. *Пусть система (1.3) с непрерывно дифференцируемой матрицей $P(t)$ проста. И пусть $\det(\dot P(t) - \lambda E) \equiv (-1)^n\lambda^n + a_1(t)\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(t)\lambda + a_n(t)$. Тогда функции $a_{2k-1}(t)$, $k = \overline{1, \left[\frac{n+1}{2}\right]}$ — нечетные, а функции $a_{2k}(t)$, $k = \overline{1, \left[\frac{n}{2}\right]}$ — четные. ($[r]$ означает целую часть числа r).*

Доказательство. Пусть система (1.3) проста, тогда по лемме 2.3. матрицы $\dot P(t)$ и $-\dot P(-t)$ подобны. Значит, при каждом значении переменной t множества $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)\}$ и $\{-\lambda_1(-t), -\lambda_2(-t), \dots, -\lambda_n(-t)\}$ совпадают, где $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)$ — собственные числа матрицы $\dot P(t)$. По теореме Виета при каждом значении переменной t

$$\begin{aligned} a_n &= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \\ a_{n-1} &= -(\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_{n-1} + \lambda_1\cdots\lambda_{n-2}\lambda_n + \cdots + \lambda_2\lambda_3\cdots\lambda_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_2 &= (-1)^{n-2}(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \cdots + \lambda_{n-1}\lambda_n), \\ a_1 &= (-1)^{n-1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n). \end{aligned}$$

Т.е. каждое слагаемое коэффициента a_k представляет собой произведение элементов различных сочетаний из n элементов λ_1, λ_2, ..., λ_n по k элементов. Причем этих слагаемых ровно столько, сколько и сочетаний. Откуда, учитывая совпадение множеств $\{\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)\}$ и $\{-\lambda_1(-t), -\lambda_2(-t), \dots, -\lambda_n(-t)\}$ при каждом значении переменной t, а также количество сомножителей в каждом из слагаемых, получим требуемое утверждение.
Доказательство закончено.

Следствие 2.4. *Пусть система (1.3) с непрерывно дифференцируемой матрицей $P(t)$ проста, тогда $\mathrm{Tr}\,\dot P(t)$ — нечетная функция. Если при этом размерность n системы — четное число, то $\det \dot P(t)$ — четная функция, если же размерность системы — нечетное число, то $\det \dot P(t)$ — нечетная функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следует из леммы 2.4., учитывая, что у многочлена $\det(\dot{P}(t)-\lambda E)$ коэффициент при λ^{n-1} равен $(-1)^{n-1}\mathrm{Tr}\dot{P}(t)$, а коэффициент при λ^0 равен $\det\dot{P}(t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Аналогичные утверждения можно доказать и для матрицы $P(t)\dot{P}(t)$. Так из тождества (2.3) вытекают следующие утверждения.

С л е д с т в и е 2.5. *Если система (1.3) с непрерывно дифференцируемой матрицей $P(t)$ проста, то собственные числа $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, ..., $\lambda_n(t)$ матрицы $P(t)\dot{P}(t)$ можно определить так, чтобы функции $\lambda_i: t\mapsto\lambda_i(t)$ были нечетными.*

Л е м м а 2.5. *Пусть система (1.3) с непрерывно дифференцируемой матрицей $P(t)$ проста. И пусть $\det(P(t)\dot{P}(t)-\lambda E)\equiv(-1)^n\lambda^n+a_1(t)\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(t)\lambda+a_n(t)$. Тогда функции $a_{2k-1}(t)$, $k=\overline{1,\left[\frac{n+1}{2}\right]}$ — нечетные, а функции $a_{2k}(t)$, $k=\overline{1,\left[\frac{n}{2}\right]}$ — четные. ($[r]$ означает целую часть числа r).*

С л е д с т в и е 2.6. *Пусть система (1.3) с непрерывно дифференцируемой матрицей $P(t)$ проста, тогда $\mathrm{Tr}\Big(P(t)\dot{P}(t)\Big)$ — нечетная функция. Если при этом размерность n системы — четное число, то $\det\Big(P(t)\dot{P}(t)\Big)$ — четная функция, если же размерность системы — нечетное число, то $\det\Big(P(t)\dot{P}(t)\Big)$ — нечетная функция.*

Может показаться, что совокупность необходимых условий простоты из следствий 2.1., 2.3. и 2.5. является достаточным условием. Следующий пример показывает, что это не так.

П р и м е р 2.2. *Рассмотрим систему (1.3) с матрицей*

$$P(t)\equiv\begin{pmatrix} t^4 & t^2-t^4 \\ t^4+t^2 & -t^4 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Собственными значениями матрицы $P(t)$ являются четные функции $\pm t^2$, матрицы $\dot{P}(t)$ — нечетные функции $\pm 2t$, а матрицы $P(t)\dot{P}(t)$ — нечетные функции $\nu_{1,2}=2t^3$. Тем не менее система (1.3) с матрицей (2.4) не является простой. Докажем это.

Допустим противное. Пусть рассматриваемая система проста и

$$F(t):\equiv\begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_3(t) & f_4(t) \end{pmatrix}$$

— ее отражающая матрица. Тогда по лемме 2.1. и лемме 2.3. имеем $F(t)P(t)-P(-t)F(t)\equiv 0$, $F(t)\dot{P}(t)+\dot{P}(-t)F(t)\equiv 0$. Откуда при $t\neq 0$ получим, что $f_2(t)\equiv f_3(t)\equiv 0$, $f_1(t)\equiv f_4(t)$, т.е.

$$F(t)\equiv\begin{pmatrix} f_4(t) & 0 \\ 0 & f_4(t) \end{pmatrix}.$$

Проверкой убедимся, что эта $F(t)$ не удовлетворяет ОС. Таким образом, получили противоречие с тем, что $F(t)$ — ОМ рассматриваемой системы.

3. Связь с системой с удвоенной правой частью

Покажем связь условия простоты системы (1.3) со свойствами решений системы с удвоенной матрицей коэффициентов

$$\dot{x} = 2P(t)x. \tag{3.1}$$

Л е м м а 3.1. *Если система (1.3) проста и $F(t)$ — ее ОМ, то $F(-t)$ — ФМ, а $F^2(t)$ — ОМ системы (3.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть система (1.3) проста, тогда из теоремы 2.1. следует, что $\dot{F}(t) \equiv -2P(-t)F(t)$. Умножим это тождество на (-1) и заменим t на $(-t)$, получим $-\dot{F}(-t) \equiv 2P(t)F(-t)$. Таким образом, матрица $F(-t)$ составлена из столбцов–решений системы (3.1). А так как $F(0) = E$, то матрица $F(-t)$ является ФМ для системы (3.1).

Согласно [2], ОМ системы (3.1) $\Phi(t) \equiv X(-t)X^{-1}(t)$, где $X(t)$ — ее ФМ. Т.к. $F(t)$ – ОМ системы (1.3), то $F(-t) \equiv F^{-1}(t)$. Учитывая, что $X(t) \equiv F(-t)$, получим $\Phi(t) \equiv F^2(t)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Доказанную лемму проиллюстрируем следующим примером.

П р и м е р 3.1. *Рассмотрим систему (1.3), где*

$$P(t) \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos t + \sin^3 t & \left(\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t\right) \mathrm{e}^{-\cos t} \\ -\left(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t\right) \mathrm{e}^{\cos t} & -\cos t - \sin^3 t \end{pmatrix}.$$

В примере 2.1. показано, что эта система простая и ее отражающая матрица

$$F(t) \equiv \begin{pmatrix} 1 - \sin t & -\mathrm{e}^{-\cos t} \sin t \\ \mathrm{e}^{\cos t} \sin t & 1 + \sin t \end{pmatrix}.$$

Тогда по лемме 3.1. общее решение системы $\dot{x} = \left(\cos t + \sin^3 t\right) x + \exp(-\cos t)\left(\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t\right) y,\quad \dot{y} = -\exp(\cos t)\left(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t\right) x - \left(\cos t + \sin^3 t\right) y$ *имеет вид* $x = c_1\,(1 + \sin t) + c_2 \exp(-\cos t)\sin t$, $y = -c_1 \exp(\cos t)\sin t + c_2\,(1 - \sin t)$.

Аналогично предыдущей лемме можно сформулировать и доказать следующее утверждение.

Л е м м а 3.2. *Пусть система (1.3) проста и $F(t)$ — ее ОМ. Тогда $F(t)$ — ФМ, а $F^2(-t)$ — ОМ системы*

$$\dot{x} = -2P(-t)x. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Т.к. система проста, то по лемме 2.1. $F(t)P(t) \equiv P(-t)F(t)$ и, следовательно, ОС примет вид $\dot{F}(t) \equiv -2P(-t)F(t)$. Таким образом, матрица $F(t)$ составлена из столбцов–решений системы (3.2). А так как $F(0) = E$, то матрица $F(t)$ является ФМ для системы (3.2).

По определению ОМ, ОМ системы (3.2) $\Phi(t) \equiv F(-t)F^{-1}(t)$. Учитывая, что $F(-t)F(t) \equiv E$, имеем $\Phi(t) \equiv F^2(-t)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Таким образом, зная ОМ простой системы (1.3), мы можем найти ФМ системы с удвоенной правой частью. В связи с этим возникает обратный вопрос: зная ФМ системы с удвоенной правой частью, можно ли найти ОМ системы (1.3) и выяснить, является ли система (1.3) простой? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $X(t)$ — *ФМ системы (1.3), нормированная при* $t = 0$ *(т.е.* $X(0) = E$*), и для нее справедливо тождество* $X(t)P(-t) \equiv P(t)X(t)$. *Тогда система*

$$\dot{x} = \tfrac{1}{2}P(t)x \tag{3.3}$$

является простой с ОМ $X(-t)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $X(t)$ — ФМ системы (1.3), тогда $\dot{X}(t) \equiv P(t)X(t)$. Умножая полученное тождество на -1 и заменяя t на $-t$, получим $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(X(-t)) \equiv -P(-t)X(-t)$. Пусть $S(t) :\equiv X(-t)$. Т.к. $X(0) = E$, то для системы (1.3) выполняются условия теоремы 2.1., следовательно, система (3.3) простая. Проверкой основного соотношения убедимся, что $X(-t)$ — ее ОФ.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

П р и м е р 3.2. *Проверкой убедимся, что*

$$X(t) \equiv \begin{pmatrix} 1+\sin t & \mathrm{e}^{-\cos t}\sin t \\ -\mathrm{e}^{\cos t}\sin t & 1-\sin t \end{pmatrix}$$

— *ФМ системы (1.3) с матрицей*

$$P(t) \equiv \begin{pmatrix} \cos t + \sin^3 t & \left(\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t\right)\mathrm{e}^{-\cos t} \\ -\left(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t\right)\mathrm{e}^{\cos t} & -\cos t - \sin^3 t \end{pmatrix}$$

и $X(0) = E$, $X(t)P(-t) \equiv P(t)X(t)$. *Тогда по теореме 3.1. система*

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{2}\left(\cos t + \sin^3 t\right)x + \frac{1}{2}\left(\cos t + \sin^2 t + \sin^3 t\right)\exp(-\cos t)y, \\ \dot{y} = -\frac{1}{2}\left(\cos t - \sin^2 t + \sin^3 t\right)\exp(\cos t)x - \frac{1}{2}\left(\cos t + \sin^3 t\right)y \end{cases} \tag{3.4}$$

является простой с ОМ $X(-t)$. *Эта система* 2π*–периодическая. Ее матрица монодромии на отрезке* $[-\pi; \pi]$ *есть* $X(\pi) = E$. *Следовательно, эта простая система устойчива и все ее решения* 2π*–периодические.*

Список литературы

1. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 332 с.

2. Мироненко В.И. Отражающая функция и периодические решения дифференциальных уравнений. – Минск: Университетское, 1986. – 76 с.

3. Мироненко В.И. Отражающая функция и исследование многомерных дифференциальных систем. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2004. – 196 с.

4. Мироненко В.И. Простые системы и периодические решения дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 12. – С. 2109-2114.

5. Мусафиров Э.В. О простоте линейных дифференциальных систем //Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, № 4. – С. 570-572.

6. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1998. – 480 с.

7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 491 с.

Conditions of simplicity of linear differential systems.

© E. V. Musafirov[2]

Abstract. In the work necessary, sufficient, and also necessary and sufficient conditions of simplicity of linear ordinary differential systems are obtained. The interrelation of property of simplicity of linear differential system with properties of solutions of system with the double coefficient matrix is established.

Key Words: linear ODE systems, reflective function, reflective matrix, simple systems.

[2]Head of Higher Mathematics and Information Technologies Chair, Polesskii State University, Pinsk, Belarus; musafirov@bk.ru.