УДК 519.853.62

О проекционном квазиньютоновском обобщенном двухшаговом методе минимизации и оптимизации траектории летательного аппарата

© **В. Г. Малинов**[1]

Аннотация. В работе предлагается и исследуется проекционный обобщенный двухшаговый двухэтапный квазиньютоновский метод для решения конечномерных задач минимизации на выпуклом замкнутом множестве в евклидовом пространстве с переменной метрикой. Доказывается сходимость метода для выпуклых гладких функций с Липшицевыми градиентами. Рассматривается применение метода для численного решения тестовой задачи оптимального управления движением летательного аппарата, описываемой системой дифференциальных уравнений, а также приводятся некоторые результаты вычислительного эксперимента.
Ключевые слова: минимизация на простом множестве, проекционный обобщённый двухшаговый двухэтапный квазиньютоновский метод, сходимость, дифференциальные уравнения движения, задача оптимального управления, оптимизация, траектория летательного аппарата.

1. Постановка задачи и предыстория

Множество задач науки, техники, экономики, итеративные способы решения задач оптимального управления в них и других науках, при математической формализации приводят к задаче минимизации на выпуклом замкнутом множестве Q

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset E^n, \tag{1.1}$$

где n –мерное евклидово пространство E^n нормировано скалярным произведением, $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x},\mathbf{x})^{1/2} \ \ \forall \mathbf{x} \in E^n$, выпуклая функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$. Предполагаем, что функция $f(\mathbf{x})$ имеет гиперповерхности уровней овражной структуры и ограничена снизу, множество её минимумов не пусто:

$$\inf f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty, \quad \mathbf{x} \in Q; \quad Q_* = \{\mathbf{x} \in Q : \quad f(\mathbf{x}) = f_*\} \neq \emptyset. \tag{1.2}$$

Встречаются сложные задачи поставленного вида, не решаемые существующими методами. Для их решения предпочтительно применение метода из класса проекционных многошаговых методов, разработанного и обоснованного за последние восемнадцать лет. В этот класс входят, например, двухшаговый, трёхшаговый, четырёхшаговый методы проекции градиента (см., например, работы [1] - [3]). Методы этого класса обладают многими известными достоинствами. Но обнаруживается факт возрастания вычислительной погрешности в окрестности минимума вследствие использования градиента функции на "дне оврага"гиперповерхности уровня, где его величина мала. Этот факт не присущ *проекционным обобщённым многошаговым* методам решения задачи (1.1), простейшими из которых являются двухшаговые, поэтому последние здесь и рассмотрим.

Подробнее о методах класса. *Проекционные обобщённые двухшаговые* методы (ПОДМ) минимизации функций с "овражными"гиперповерхностями уровней - это *новый класс проекционных методов*, использующих для построения минимизирующей

[1]Доцент кафедры ЭММиИТ, Ульяновский госуниверситет, г. Ульяновск; vgmalinov@mail.ru.

последовательности $\left\{\mathbf{x}^k\right\} \longrightarrow \mathbf{x}^* \in Q_*$ точки $\mathbf{z}^k = \mathbf{x}^k + \alpha_k(\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1})$ (где α_k - один из параметров методов класса) на "склоне оврага"гиперповерхности уровня функции $f(\mathbf{x})$ и градиенты $\nabla f(\mathbf{z}^k)$ в них. Последние имеют большую величину, чем градиенты $\nabla f(\mathbf{x}^k)$ в точках на "дне"оврага. Поэтому ПОДМ мало чувствительны к овражности функций и ошибкам округлений [2]. Методы этого класса предложены и исследованы, например, в работах [4]- [6].

К сожалению, и многошаговые методы проекции градиента, и ПОДМ, требуют специальной процедуры локального поиска в окрестности минимума, которая может оказаться трудоёмкой. Для устранения этого недостатка при решении задач с непрерывными моделями разработаны *непрерывные* методы проекции градиента первого и второго порядков, *с переменной метрикой* (НМПМ) (см., например, [7]-[9]). Они минимизируют функцию путём решения обыкновенных дифференциальных уравнений (соответствующих порядков) с оператором проектирования в переменной метрике в уравнении. Для построения НМПМ, согласно их основной идее, сначала строится пространство с новым скалярным произведением.

Но существует множество задач минимизации, требующих применения *итеративных* (аналогов непрерывных) методов. Поэтому идея, использованная для НМПМ, распространена на итеративные ПОДМ квазиньютоновского типа [10] - [12]. Отметим, что основанные на другой идее многошаговые (итеративные) МПМ разрабатывались не для решения задачи (1.1), а задач *безусловной минимизации* и они построены иначе.

В данной работе предлагается и исследуется квазиньютоновский метод, принадлежащий классу ПОДМ, улучшенная версия методов из работ [10]- [12]. Метод получен путём развития для итеративных ПОДМ отмеченной выше новой идеи, реализованной в НМПМ. Об этом далее подробнее.

2. Метод решения задачи

Применяя теперь идею НМПМ из [7] для построения *итеративных* методов в конечномерном евклидовом пространстве E^n [10], наряду с существующей метрикой и оператором $P_Q(\mathbf{v})$ проектирования вектора $\mathbf{v}$ на множество Q, введём новую метрику с помощью нового скалярного произведения $(\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u},\mathbf{u})\quad \forall \mathbf{u},\mathbf{x} \in E^n$ и оператор $P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x})}[\mathbf{v}]$ проектирования в новой метрике в точке $\mathbf{x} \in E^n$ вектора $\mathbf{v} \in E^n$ на множество Q. Оператор $\mathbf{B}(\mathbf{x}) : E^n \longrightarrow E^n$, при каждом фиксированном $\mathbf{x} \in E^n$, суть положительно определённый самосопряженный линейный оператор, изменяющий метрику пространства. Проекция $\mathbf{w} = P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x})}[\mathbf{v}] \in Q$ в этой метрике существует, единственна, как решение квадратичной задачи минимизации $g(\mathbf{u}) = (\mathbf{B}(\mathbf{x})(\mathbf{u}-\mathbf{v}),\mathbf{u}-\mathbf{v}) \longrightarrow \inf,\quad \mathbf{u} \in Q$, в силу выпуклости множества Q и сильной выпуклости функции $g(\mathbf{u})$; критерием её решения $\mathbf{w} \in Q$ служит [7] неравенство

$$(\mathbf{B}(\mathbf{x})(\mathbf{w}-\mathbf{v}),\mathbf{u}-\mathbf{w}) \geq 0, \mathbf{u} \in Q. \tag{2.1}$$

Полученное евклидово пространство с двумя скалярными произведениями и определяемыми ими метриками обозначим E_1^n, далее подразумеваем задачу вида (1.1) в нём.

Для решения задачи в пространстве E_1^n исследуем проекционный обобщенный двухшаговый двухэтапный квазиньютоновский метод (ПОДКМ)

$$1\text{ этап.}\quad \mathbf{z}^k = P_Q\left(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k\right); \tag{2.2}$$

$$2\text{ этап.}\quad \mathbf{x}^{k+1} = P_Q\left[\mathbf{z}^k - \beta_k \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k)\nabla f(\mathbf{z}^k)\right], k = 0,1,2,... \tag{2.3}$$

где $\mathbf{x}^0$ - произвольная начальная точка из E_1^n; $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0$; $\mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}$; α_k, β_k - параметры метода; $\mathbf{B}(\mathbf{z}^k) = \mathbf{B}_k$ - последовательность положительно определённых самосопряжённых линейных операторов (симметричных матриц). Итерационными формулами (2.2), (2.3) задается целое семейство двухшаговых методов. В зависимости от выбора последовательности операторов $\mathbf{B}_k$ и способов выбора параметров метода, из (2.2), (2.3) получаются различные ПОДКМ первого или (при $\mathbf{B}(\mathbf{z}^k) = \nabla^2 f(\mathbf{z}^k)$) второго порядка.

Отметим, что от метода из работы [10] ПОДКМ отличается: 1) наличием операции проектирования на первом этапе, что препятствует "выбросу"из оврага на первом этапе метода и способствует увеличению скорости сходимости метода; 2) видом оператора переменной метрики (в (2.3) предпочтителен оператор с диагональной матрицей); 3) видом оператора проектирования, если его сравнить с НМПМ, исследованными в работах [7], [8].

П р и м е ч а н и е 1. Оператор $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ в (2.3) таков, что

$$m\|\mathbf{u}\|^2 \leq (\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad 0 < m, \quad \forall \quad \mathbf{u}, \mathbf{x} \in E_1^n; \tag{2.4}$$

3) если выполняется (2.4), то существует обратный оператор $\mathbf{B}(\mathbf{x})^{-1}$ и $\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ - тождественный оператор и ей соответствует единичная матрица.

3. Вспомогательные утверждения

Приведём обоснование вспомогательных утверждений для доказательства сходимости и оценки скорости сходимости метода семейства (2.2), (2.3).

П р и м е ч а н и е 2. По самому построению пространства E_1^n в нём, наряду с (2.1), имеет место критерий ([1], с. 189) $(\mathbf{w} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{w}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{u} \in Q$ проекции $\mathbf{w} \in Q$ вектора $\mathbf{v} \in E_1^n$ на выпуклое замкнутое множество Q. Это следует из известного факта, что евклидовы пространства с различными скалярными произведениями изоморфны; поэтому в E_1^n сохраняются все соотношения и теоремы из E^n, связанные со скалярным произведением $(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Л е м м а 1. *Пусть выпуклые функции $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$ класса $C^{1,1}(E_1^n)$ таковы, что*

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in E_1^n. \tag{3.1}$$

и множество точек минимума функций $f(\mathbf{x})$ и $\varphi(\mathbf{x})$ не пусто, $Q_* \neq \emptyset$.

Тогда для $\mathbf{x}^* \in Q_*$ в пространстве E_1^n имеет место неравенство

$$\left(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*\right) \geq 0, \quad \forall \quad \mathbf{u} \in Q. \tag{3.2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь формулой Лагранжа для функции $\varphi(\mathbf{x})$, определением точки минимума $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset E_1^n$ и (3.1), получим:

$$\varphi(\mathbf{u}) - \varphi(\mathbf{x}^*) = (\nabla\varphi(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*) = \left(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*\right) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Q.$$

Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. *Пусть выпуклое замкнутое множество $Q \subset E_1^n$, функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E_1^n)$.*

Тогда для $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset E_1^n$ равенство $\mathbf{x}^* = P_Q\left[\mathbf{x}^* - \beta\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)\right]$ эквивалентно неравенству (3.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно необходимому и достаточному условию проекции (см. [1], с. 189) $\mathbf{w} = P_Q(\mathbf{v}) \in Q$ в E_1^n при $\mathbf{x}^* \in Q_*$, по заданному равенству получаем вариационное неравенство

$$\left(\mathbf{x}^* - \left(\mathbf{x}^* - \beta\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)\right), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*\right) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Q.$$

Отсюда следует неравенство $\beta\left(\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*\right) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Q$. В силу положительности β, отсюда следует неравенство (3.2).

Аналогично можно провести обратные рассуждения.

Лемма 2 доказана.

Следующая лемма выражает связь между необходимыми условиями оптимальности точки $\mathbf{x}^*$ в исходной метрике пространства E^n и в новой метрике пространства E_1^n.

Л е м м а 3. *Пусть: 1) множество $Q \subset E_1^n$ выпукло и замкнуто;*

2) выпуклая функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(E_1^n)$;

3) выполнено неравенство (2.4).

Тогда для $\mathbf{x}^* \in Q_* \subset Q \subset E_1^n$ равенство $\mathbf{x}^* = P_Q^{\mathbf{B}(\mathbf{x}^*)}\left[\mathbf{x}^* - \beta\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)\right]$ в E_1^n эквивалентно неравенству $\left(\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*\right) \geq 0, \quad \forall \quad \mathbf{u} \in Q$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пользуясь критерием (2.1) проекции $\mathbf{w} = P_Q^{B(\mathbf{x})}[\mathbf{v}] \in Q$ в E_1^n при $\mathbf{x}^* \in Q_*$ получаем:

$$\left(\mathbf{B}(\mathbf{x}^*)\left(\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^* + \beta\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*)\right), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*\right) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Q.$$

Отсюда следует неравенство $\beta\left(\mathbf{B}(\mathbf{x}^*)\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*\right) \geq 0, \quad \mathbf{u} \in Q$. В силу примечаний 1 и 2, положительности β, отсюда следует $\left(\mathbf{I}\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*\right) = \left(\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{u} - \mathbf{x}^*\right) \geq 0$, $\mathbf{u} \in Q$.

Лемма 3 доказана.

Примечание 3. Классы функций $\varphi(\mathbf{x})$ и операторов $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (3.1), не пусты.

В самом деле, в класс таких операторов входят тождественный оператор и скалярный оператор (матрица) и оператор (матрица) вторых производных $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{H}(\mathbf{x})$ функции $f(\mathbf{x})$, а также существуют другие самосопряженные положительно определённые линейные операторы (симметричные матрицы), удовлетворяющие (3.1).

В класс функций, удовлетворяющих условию (3.1), например, входят выпуклые гладкие дважды непрерывно дифференцируемые функции.

Возникает интересная, пока еще нерешённая, проблема полной характеристики классов функций $\varphi(\mathbf{x})$ и операторов $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, удовлетворяющих условию (3.1).

Здесь рассмотрим простые примеры таких функций $\varphi(\mathbf{x})$ и операторов $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})$.

Пример 1. Пусть выпуклая функция $f(\mathbf{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$ задана в односвязной области, её градиент $\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 1) \end{bmatrix}$, заданы операторы а) $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$ и б) $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$. Вычислим для обоих случаев функцию $\varphi(\mathbf{x})$, для которой выполнено (3.1).

а) Сначала найдём градиент $\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 2(x_1 - 2) \\ 2(x_2 - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_2 - 6) \\ 2x_1 + 12x_2 - 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1(x_1, x_2) \\ M_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$$

. По градиенту функции $\varphi(\mathbf{x})$ можно записать её полный дифференциал и, как известно из анализа, можно решить задачу восстановления функции $\varphi(\mathbf{x})$. Здесь получим функцию $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + 6x_2^2 + 2x_1x_2 - 6x_1 - 16x_2 + C$, $C = const$.

б) В случае второго оператора $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})$ вычисления проводим аналогично. По градиенту $\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x})$ получим $\varphi(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2/4 - 8x_1 - x_2/2 + C$, $C = const$.

Кроме рассмотренных, обращённый оператор второй производной $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$ для этой же функции удовлетворяет равенству (3.1). Сложнее в случае функций в многомерных пространствах.

Пример 2. В трёхмерном пространстве E_1^3 для выпуклой функции $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 + x_3^2 + x_2x_3$, заданной в односвязной области, для оператора $\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 3/4 & -1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 & -1/4 \\ -1/4 & -1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$ по равенству вида (7) $\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x})\nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ получаем функцию $\varphi(\mathbf{x}) = x_1^2/2 + x_2^2/2 + x_3^2/2 + C$, $C = const$.

4. Обоснование сходимости метода

О сходимости ПОДКМ (2.2), (2.3) с параметрами константами $\alpha_k = \alpha$, $\beta_k = \beta$ имеет место

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*
1) множество $Q \subset E_1^n$ выпукло и замкнуто;
2) функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ выпуклая и выполнены соотношения (1.2);
3) оператор $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ $\forall$ $\mathbf{x} \in E_1^n$ таков, что выполнено неравенство (2.4);
4) выпуклая функция $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ такова, что имеет место равенство (3.1);
5) параметры константы метода семейства (2.2), (2.3) таковы, что:

$$0 < \alpha < 1/\sqrt{5},$$

$$0 < \beta < \min\left[\alpha/(2L); \quad (4 - 10\alpha - 5\alpha^3)/(2L - 10L\alpha^2); \quad 2/L\right]. \tag{4.1}$$

Тогда последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$, определяемая методом (2.2), (2.3), (4.1), из любой начальной точки $\mathbf{x}^0 \in E_1^n$ сходится к точке $\mathbf{x}^* \in Q_*$,

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \longrightarrow 0, \quad f(\mathbf{x}^k) \longrightarrow f(\mathbf{x}^*), \quad k \to \infty. \tag{4.2}$$

Доказательство. Покажем сходимость последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ метода и получим соотношения (4.2). Из характеристического свойства оператора проектирования ([1], с. 189) в исходной метрике пространства E_1^n и из (2.2), (2.3) получим вариационные неравенства

$$\left(\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k - \alpha\mathbf{y}^k, \mathbf{v} - \mathbf{z}^k\right) \geq 0,$$
$$\left(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k + \beta\mathbf{B}_k^{-1}\nabla f(\mathbf{z}^k), \mathbf{v} - \mathbf{x}^{k+1}\right) \geq 0, \quad k \geq 0, \quad \mathbf{v} \in Q.$$

Сложив оба вариационных неравенства, запишем результат в виде

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{v}\right) + \alpha\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{v} - \mathbf{z}^k\right) + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \leq \\ &\leq \beta\left(\mathbf{B}_k^{-1}\nabla f(\mathbf{z}^k), \mathbf{v} - \mathbf{x}^{k+1}\right), \quad k \geq 0, \quad \mathbf{v} \in Q. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Сложим (4.3) при $\mathbf{v} = \mathbf{x}^* \in Q_*$ с неравенством (3.2) из леммы 1, положив в нём $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$ и умножив на $\beta > 0$. Полученное неравенство представим в виде

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^*\right) + \alpha\left(\mathbf{y}^k, \mathbf{x}^* - \mathbf{z}^k\right) + \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \leq \\ &\leq \beta\left(\mathbf{B}_k^{-1}\nabla f(\mathbf{z}^k) - \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}^*)\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k+1}\right), \quad k \geq 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Пользуясь четвёртым условием теоремы для скалярного произведения в правой части, запишем (4.4) в виде

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k},\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{*}\right)+\alpha\left(\mathbf{y}^{k},\mathbf{x}^{*}-\mathbf{z}^{k}\right)+\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{z}^{k}\|^{2}\leq\\&\leq\beta\left(\nabla\varphi(\mathbf{z}^{k})-\nabla\varphi(\mathbf{x}^{*}),\mathbf{x}^{*}-\mathbf{x}^{k+1}\right),\quad k\geq 0\end{aligned}\tag{4.5}$$

и оценим правую часть с помощью неравенства (см. [1], с.188)

$$(\nabla f(\mathbf{x})-\nabla f(\mathbf{u}),\mathbf{u}-\mathbf{z})\leq L\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|^{2}/4,\quad \mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{z}\in Q$$

для выпуклых функций $f(\mathbf{x})\in C^{1,1}(Q)$ при $\mathbf{x}=\mathbf{z}^{k}$, $\mathbf{u}=\mathbf{x}^{*}$, $\mathbf{z}=\mathbf{x}^{k+1}$. Тогда из (4.5) получим

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k},\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{*}\right)+\alpha\left(\mathbf{y}^{k},\mathbf{x}^{*}-\mathbf{z}^{k}\right)+\\&+(1-L\beta/4)\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{z}^{k}\|^{2}\leq 0,\quad k\geq 0.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Здесь сначала оценим скалярные произведения в левой части неравенства. Распишем первое слагаемое $\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k},\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{*}\right)=\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k},\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{*}\right)-\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k},\mathbf{x}^{k}-\mathbf{z}^{k}\right)$ и, пользуясь известным равенством

$$(a-b)^{2}=(a-c)^{2}+2(a-c,c-b)+(c-b)^{2}\quad\forall a,b,c\in E_{1}^{n},\tag{4.7}$$

оценим скалярные произведения в его правой части:

$$\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k},\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{*}\right)=\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{*}\|^{2}-\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}\|^{2}-\|\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{*}\|^{2}\right)/2,$$

$$-\left(\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{k},\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{k+1}\right)=\left(\|\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{k}\|^{2}+\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k}\|^{2}-\|\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{k+1}\|^{2}\right)/2.$$

Тогда для первого слагаемого в левой части (4.6) получим

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{k},\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{*}\right)=\\&=\left(\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{*}\|^{2}-\|\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{*}\|^{2}+\|\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{k}\|^{2}-\|\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{k+1}\|^{2}\right)/2.\end{aligned}\tag{4.8}$$

Для второго слагаемого в (4.6) скалярное произведение представим в виде

$$\left(\mathbf{y}^{k},\mathbf{x}^{*}-\mathbf{z}^{k}\right)=\left(\mathbf{y}^{k},\mathbf{x}^{*}-\mathbf{x}^{k}\right)-\left(\mathbf{y}^{k},\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{k}\right)$$

и оценим первое слагаемое в правой части с помощью (4.7), а второе – с помощью известного неравенства

$$2|ab|\leq\varepsilon a^{2}+\varepsilon^{-1}b^{2},\quad a,b,\varepsilon>0.\tag{4.9}$$

Тогда

$$\left(\mathbf{y}^{k},\mathbf{x}^{*}-\mathbf{x}^{k}\right)=0.5\left(\|\mathbf{x}^{*}-\mathbf{x}^{k-1}\|^{2}-\|\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{k-1}\|^{2}-\|\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{*}\|^{2}\right),$$

$$\left(\mathbf{y}^{k},\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{k}\right)\leq 0.5\left(\|\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{k}\|^{2}+\|\mathbf{y}^{k}\|^{2}\right),$$

и второе слагаемое в левой части (4.6) оценивается:

$$\begin{aligned}&\alpha\left(\mathbf{y}^{k},\mathbf{x}^{*}-\mathbf{z}^{k}\right)\geq\\&\geq 0.5\alpha\left(\|\mathbf{x}^{*}-\mathbf{x}^{k-1}\|^{2}--\|\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{*}\|^{2}-\|\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{k}\|^{2}-2\|\mathbf{y}^{k}\|^{2}\right).\end{aligned}\tag{4.10}$$

Подставляя оценки (4.8) и (4.10) в левую часть (4.6), приходим к неравенству

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{x}^{k+1}-\mathbf{x}^{*}\|^{2}/2+(1-\alpha)\|\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{k}\|^{2}/2+\alpha\|\mathbf{x}^{*}-\mathbf{x}^{k-1}\|^{2}/2+\\&+(0.5-L\beta/4)\|\mathbf{z}^{k}-\mathbf{x}^{k+1}\|^{2}\leq\alpha\|\mathbf{y}^{k}\|^{2}+(1+\alpha)\|\mathbf{x}^{k}-\mathbf{x}^{*}\|^{2}/2,\quad k\geq 0.\end{aligned}\tag{4.11}$$

Далее оценим квадрат нормы в четвёртом слагаемом левой части (4.11)

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 = \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \|\mathbf{x}^k - \mathbf{z}^k\|^2 - 2\left(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\right),$$

где согласно неравенству (4.9) при $\varepsilon = 1/5$ имеем

$$2\left(\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\right) \le \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/5 + 5\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2,$$

поэтому

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{z}^k\|^2 \ge 4\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/5 - 4\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2.$$

С учётом этой оценки и второго слагаемого в левой части, из (4.11) получим

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2/2 - (0.5\alpha - L\beta)\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 + (2 - L\beta)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2/5 + \\ +\alpha\|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^{k-1}\|^2/2 \le \alpha\|\mathbf{y}^k\|^2 + (1+\alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2/2, \quad k \ge 0,\end{gathered} \tag{4.12}$$

где $1.5 + 0.5\alpha - L\beta > 0$ при условиях (4.1). Здесь оценим квадрат нормы в третьем слагаемом для $\mathbf{x}^k \in Q$ по свойству оператора проектирования (см. [1], с. 190)

$$\begin{gathered}\|\mathbf{z}^k - \mathbf{x}^k\|^2 = \|P_Q[\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{y}^k] - P_Q[\mathbf{x}^k]\|^2 \le \\ \le \|\mathbf{x}^k + \alpha\mathbf{y}^k - \mathbf{x}^k\|^2 = \alpha^2\|\mathbf{y}^k\|^2,\end{gathered}$$

тогда из (4.12) получим неравенство, аналогичное полученному в [10]

$$\begin{gathered}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + a\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \le \\ \le b\|\mathbf{y}^k\|^2 + (1+\alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2, \quad k \ge 0,\end{gathered}$$

где $a = (4 - 2L\beta)/5$, $b = 2\alpha + \alpha^2(3 + \alpha - 2L\beta)$, $a > 0$, $b > 0$ при условиях (4.1).

Далее доказательство сходимости и соотношений (4.2) проводится по той же схеме, что использована в работе [10], с помощью лемм 2 и 3.

Теорема 1 доказана.

5. Численное решение модельной задачи

Решить задачу оптимального управления численным методом на порядок труднее, чем обычную задачу оптимизации. Процесс численного решения таких задач связан с проблемами: удовлетворения заданным конечным условиям; учёта ограничений на фазовые координаты и управляющие функции; "овражности"и многоэкстремальности получаемой для минимизации вспомогательной функции. Такими же свойствами обладает рассматриваемая здесь задача оптимального управления (ЗОУ) расчёта траектории летательного аппарата. Численно эта ЗОУ решается ПОДКМ по классической схеме как задача минимизации вспомогательной функции при простых ограничениях на переменные.

Постановка задачи. ЗОУ разворотом самолёта в плоскости горизонта описывается математической моделью (ММ), построенной на основе ММ задач о пространственном развороте самолёта ([13], с.353-355) и о развороте в плоскости горизонта [14], в работе [15].

В предположении постоянства высоты манёвра система дифференциальных уравнений движения самолёта имеет вид:

$$\begin{gathered}dD/dt = V\cos(\eta) = f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ dZ/dt = -V\sin(\eta) = f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \quad dw/dt = -c_s = f_5(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ dV/dt = g\left[u_1 P cos\alpha - c_x q^0 S\right]/w = f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}); \\ d\eta/dt = -g u_2 N\sin(\gamma)/V = f_4(\mathbf{x}, \mathbf{u});\end{gathered} \tag{5.1}$$

где $P = [10 + V^2/(a(h))^2](25000 - h)/12.5$; $q^0 = \rho(h)V^2/2$; $a(h) = 340.3 - .00408h$; $\rho(h) = 3.3*10^{-10}h^2 - 1.155*10^{-5}h + 0.125$; $\alpha = u_2Nw/(u_1P + 4.6q^0S)$; $c_x = 0.02 + 3.174\alpha^2 + .03u_3$; $c_s = [0.7 + 2(u_1 - 0.3)^2]\, u_1P/3600$; $N = \min\{q^0S/w; 150000/w; 8\}$,

$D = x_1$, $Z = x_2$ – декартовы координаты самолёта (продольная и боковая); h – высота над Землёй; $V = x_3$ – модуль вектора скорости; $\eta = x_4$ –угол курса; $mg = w = x_5$ – вес самолёта; u_1 – величина тяги двигателя, отнесённая к максимальному значению тяги P; u_2 – величина перегрузки, отнесённая к максимальному значению перегрузки N; u_3 – величина тормозящей силы, отнесённая к её максимальному значению; $\gamma = u_4$ – угол крена; α – угол атаки; $S = 55$ *м*^{2} – характерная площадь самолёта; q^0 – скоростной напор; c_x – коэффициент лобового сопротивления; c_s – секундный расход топлива; $g = 9.81$ *м/с*^{2}. Заметим, что $\rho(h)$ и $a(h)$ будут постоянными.

Ограничения на управления и их производные:
$0.05 \le u_1 \le 1$; $0.01 \le u_2 \le 1$; $0 \le u_3 \le 1$;

$$\left|\frac{du_1}{dt}\right| \le 0.2; \quad \left|\frac{du_2}{dt}\right| \le 0.25; \quad \left|\frac{du_3}{dt}\right| \le 1; \quad \left|\frac{du_4}{dt}\right| \le 1.57\textit{рад/сек}; \tag{5.2}$$

Начальные условия для фазовых координат и значения управлений:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_4(0) = 0;$$

$$h(0) = 7000\textit{м}; x_3(0) = 300\textit{м/с}; x_5(0) = 20000\textit{кГ};$$
$$u_1(0) = u_1^0; \quad u_2(0) = 1/N(x(0)); \quad u_3(0) = u_3^0; \quad u_4(0) = 0. \tag{5.3}$$

Конечные значения фазовых координат и управлений: $x_2(t) = h(T) = 7000$*м*;

$$\begin{gathered}\varphi_1 = x_4(T) + \pi = 0; \quad \varphi_3 = u_2(T) - 1/N(x(T)) = 0; \\ u_4(T) = 0; \quad \varphi_2 = (y_p + P\sin\alpha)\cos\gamma - w(t) = 0.\end{gathered} \tag{5.4}$$

Последнее в (5.4) – условие горизонтального полёта [14], где $y_p = c_y\rho V^2S/2$ – подъёмная сила, c_y – коэффициент подъёмной силы; $\varphi_4 = x_2(t) - h(T) = 0$.

Для задачи (5.1)-(5.4) фазовый вектор $\mathbf{x} \in E^{5*k}$, а вектор управлений $\mathbf{u} \in E^4 * k$, где k – число делений отрезка интегрирования.

Результаты расчётов. В качестве примера решения ЗОУ с помощью алгоритма штрафных фуекций (МШФ) на основе ПОДКМ (2.2), (2.3) рассмотрим численное решение задачи (5.1)-(5.4); одну из возможных её подзадач будем решать по методике из [13]–[15].

Для ММ (5.1)-(5.4) сформулирована *задача оптимального быстродействия*: найти вектор $\mathbf{u}(t)$ управлений, удовлетворяющий системе (5.1), ограничениям (5.2), (5.4) и переводящий самолёт из горизонтального полёта на высоте 7000 *м* в горизонтальный полёт на высоте 7000 *м* с разворотом вектора скорости на $180\circ$ за наименьшее время при начальных условиях (5.3).

Минимизируется время движения T, систему терминальных ограничений дают ограничения равенства (5.4).

Для решения задачи проведена замена переменной как в [13], $t = \tau T$ и система (5.1) преобразована к виду $dx_i/d\tau = Tf_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Численное интегрирование производилось по схеме Эйлера. Шаг интегрирования 0.04. Системе (5.1) соответствует функция Понтрягина $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^{i=5} p_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ где p_i – сопряжённые переменные. Вспомогательная функция для задачи минимизации имеет вид

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) = T - H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) + \lambda\sum_{j=1}^{j=m} r_j\varphi_j,$$

где λ – штрафной коэффициент, r_j – весовые коэффициенты; $m = 4$ – число терминальных ограничений равенств. С учётом ограничений на координаты получим задачу вида (1.1) для $F(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$. Дифференцирование производилось численное по конечно-разностной формуле $\frac{\partial F}{\partial x_i} = (F(x_i + h) - F(x_i - h))/(2h)$.

Начальные приближения для МШФ: $u_1(t) = 0.476$; $u_2(t) = 0.1$; $u_3(t) = 0.024$; $u_4(t) = 1.5 \sin(\pi t/T_0)$; $T_0 = 20$ *с*.

Результаты расчётов для значения $\gamma_{max} = 69°58'$ приведены в таблице 1. Обозначения в таблице: $w(t)$ – переменный вес самолёта в моменты времени t по мере расхода горючего; V – скорость самолёта; $\eta°$ – угол курса в градусах; D – продольная дальность; Z – боковая дальность; $u_4(t)$ – угол крена.

t	$w(t)$	V	$\eta°$	D	Z	$u_4(t) = \gamma(t)$
0	20000.0	300.0	0.0	0.0	0.0	.00001
0.6255	19997.609	302.605	-0.00001	195.155	0.000001	0.710
1.2510	19995.214	304.182	-2.5650	392.003	0.00001	0.980
1.8765	19992.817	304.301	-7.3650	589.680	14.830	1.2211
2.5020	19990.420	302.065	-14.8240	786.000	34.230	1.2211
3.1275	19988.026	297.928	-23.5500	975.957	84.507	1.2211
4.3785	19983.254	290.034	-40.8150	1315.32	263.92	1.2211
5.6295	19978.610	282.915	-57.6550	1579.64	528.45	1.2211
6.8804	19973.769	276.476	-74.1140	1752.28	850.010	1.2211
8.7569	19966.698	267.926	-98.1650	1824.92	1375.31	1.2211
10.008	19962.000	262.869	-113.821	1752.51	1713.73	1.2211
10.6334	19959.656	260.510	-121.546	1683.45	1870.17	1.2211
11.8844	19956.036	255.134	-136.780	1489.01	2144.26	1.2211
13.1354	19951.368	251.200	-151.748	1234.37	2354.03	1.2211
14.3864	19946.708	247.600	-166.510	938.83	2489.11	1.2211
15.0119	19944.382	247.164	-172.816	782.21	2526.68	1.2211
15.6374	19942.056	248.358	-177.484	622.69	2546.78	0.8550
16.2629	19940.651	249.695	-180.0001	461.29	2553.88	0.00000

Таблица 1: Результаты расчётов для значения $\gamma_{max} = 69°58'$.

Полученное $\eta = -3.141595$ соответствует значению угла курса $\eta° = -180.0001°$; время счёта для одного значения штрафного коэффициента ($it = 6$) 16*с*, всего 32*с*; размерность задачи $n = 114$. Значение $u_4^{max}(t) = \gamma_{max} = 1.2211$ соответствует максимальному углу крена $69°58'$; весовые множители $1 \leq r_1, r_2, r_4 \leq 10$, $r_3 = 19.28$; начальное и конечное значения штрафного коэффициента $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = 5.048$; конечные значения невязок терминальных ограничений равенств в (25) $\varphi_1 = .00014$, $\varphi_2 = -5.74d - 9$, $\varphi_3 = u_2(T) - 1/N(x(T)) = 0.00000495$, $\varphi_4 \leq 10^{-3}$; время манёвра $T = 16.2629$ *сек*; начальные значения сопряжённых переменных $p_i(0) = c_i = 1, \quad i \in [1:5]$, а вычисленный в ходе минимизации вектор сопряжённых переменных $\mathbf{p}(t) = (0.99989; 1.00123; 0.99953; 0.99957; 0.99956)$. Значения вспомогательной и штрафной функций в конце счёта $F = 14.692$ и $5.836d - 10$. При счёте с половинным шагом 0.02 результаты совпадают до второго знака после десятичной точки (счёт на Атлон 1800 с удвоенной точностью).

Вывод. Результаты показывают работоспособность предлагаемого проекционного обобщённого двухшагового двухэтапного квазиньютоновского метода минимизации при решении ЗОУ, обеспечиваемую им достаточную скорость и точность минимизации.

Список литературы

1. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач.– М.: Наука, 1988.– 552 с.

2. Антипин А.С. Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования // Вопросы кибернетики. Вычислительные вопросы анализа больших систем.– М.: АН СССР, 1989.– С. 5-43.

3. Недич А. Трехшаговый метод проекции градиента для задач минимизации // Изв. вузов. Математика.– 1993.– № 10.– С. 32-37.

4. Амочкина Т.В., Недич А. Об одном варианте непрерывного метода проекции градиента второго порядка и его дискретном аналоге // Вестник МГУ, Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернет.– 1995.– № 2.– С. 5-11.

5. Малинов В.Г. Четырехпараметрические двухшаговые проекционные методы минимизации первого порядка // Журнал вычислит. математ. и матем. физики.– 1996.– Т. 36. № 12.– С. 48-56.

6. Малинов В.Г. Проекционный двухшаговый обобщенный двухпараметрический метод минимизации // Вестник ННГУ. Математическое моделирование и оптимальное управление.– 1999.– Вып.1(20).– С. 169-178.

7. Антипин А.С., Васильев Ф.П. О непрерывном методе минимизации в пространствах с переменной метрикой // Известия вузов. Математика.– 1995.– № 12(403).– С. 3-9.

8. Амочкина Т.В. Непрерывный метод проекции градиента второго порядка с переменной метрикой // Журнал вычисл. матем. и матем. физики.– 1997.– Т. 37. № 10.– С. 1174-1182.

9. Малинов В.Г. О непрерывном проекционном методе минимизации второго порядка с переменной метрикой // Тезисы докладов Медународной конференции по прикладной математике, посвященной 65–летию Б.Н. Пшеничного. 25-28 июня 2002. Украина.– Киев. НТУУ, 2002.– С. 48-49.

10. Малинов В.Г. Проекционный двухшаговый обобщенный двухпараметрический метод минимизации первого порядка с переменной метрикой // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Серия "Фундаментальные проблемы математики и механики". Вып. 1(13). – Ульяновск. Изд-во УлГУ, 2003.– С. 127-138.

11. Малинов В.Г. Проекционные двухшаговые методы с переменной метрикой // 4 Московская международная конференция по исследованию операций. Москва. 21-24 сентября 2004. Труды.– Москва. Макс-пресс, 2004.– С. 135-137.

12. Малинов В.Г. О сравнительных численных экспериментах с проекционным двухшаговым методом минимизации с переменной метрикой // Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике: синтез, анализ, диагностика. Труды международной конференции КЛИН-2007 (г. Ульяновск, 17-18 мая 2007 г.) – Ульяновск: УлГТУ, 2007.– Том 4.– С. 175-179.

13. Евтушенко Ю.Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации.– М.: Наука, 1982.– 432 с.

14. Дикусар В.В., Милютин А.А. Качественные и численные методы в принципе максимума.– М.: Наука, 1989.– 141 с.

15. Малинов В.Г. Метод оптимизации в задаче расчёта оптимальной траектории самолёта // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки.– 2009.– Том 14. Вып. 4.– С. 752-755.

On projection generalized two-step two-stage quasinewton minimization method and optimization of the trajectory of aircraft

© V. G. Malinov [2]

Abstract. In the work projection generalized two-step two-stage Quasinewton method for solving finite dimensional minimization problems on the convex closed set in the Euclidean variable metric space is proposed. For continuously differentiable convex functions with a Lipschitz gradients the convergence of the method is proved. Application of the method to problem of numerical solution of optimal control test problem optimization of the trajectory of aircraft is discussed; we also present the results of some computational experiences.

Key Words: minimization on the simple set, projection generalized two-step two-stage Quasinewton method, convergence, differencial equations of movement, optimal control problem, optimization, trajectory of aircraft.

[2]Assistant Professor of Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vgmalinov@mail.ru.