УДК 519.642.7

Метод параметризации для оптимизации систем, представляемых интегро-дифференциальными уравнениями

© И.Е. Дергунов[1],И.В. Лутошкин[2]

Аннотация. Метод параметризации решения задач оптимального управления специфицируется для вариационных задач, содержащих интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра. Приближённое решение является вариационным сплайном.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, оптимизация, метод параметризации.

1. Введение

Многие модели управляемых динамических систем описываются при помощи интегро-дифференциальных уравнений, которые наиболее адекватно отражают эффект реакции системы с запаздыванием на внешнее воздействие. Примеры моделей физических, экономических систем приведены, в частности, в [5], [6], [7], [13]. При этом встает вопрос о развитии эффективных численных методов. На данный момент основные методы решения подобных проблем основаны на использовании принципа максимума [5], [8]: построении краевой интегро-дифференциальной задачи с сопряженными переменными и применение соответствующих методов её решения. Второй подход основан на прямых методах решения [9], [14], заключающихся в полной дискретизации исходной вариационной проблемы и последующем решении полученной задачи нелинейного программирования (НП). Последний способ применим для задач невысокой размерности.

В.К. Горбуновым в 1978г. был предложен метод параметризации [2] для задач оптимального управления, который получил дальнейшее развитие в работах [4], [10], [11], [12]. Метод параметризации заключается в произвольном разбиении временного промежутка и представлении искомой функции управления на каждом из промежутков в виде конечно параметризованной функции, например, константы или полинома. Такое кусочно-аналитическое управление можно считать обобщенным сплайном с переменными узлами. Функционалы исходной задачи становятся функциями конечного числа параметров, включая узлы разбиения, и исходная вариационная задача сводится к конечномерной задаче НП. Проблема численного интегрирования исходной и сопряженных систем в методе параметризации разделена с оптимизацией управления. Это позволяет решать задачу более гибко, чем при конечно-разностной аппроксимации исходной задачи, и, как правило, иметь аппроксимирующую задачу НП небольшой размерности. В настоящей работе данный метод развивается для задач, записанных в терминах интегро-дифференциальных уравнений.

[1]Аспирант кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский Государственный Университет, г. Ульяновск; comm3@yandex.ru.

[2]Доцент кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский Государственный Университет, г. Ульяновск; LutoshkinIV@ulsu.ru.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу оптимального управления для системы, описываемой интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра: минимизировать функционал

$$J = g(x(T)) \to \inf \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \varphi(t, x(t), u(t)) + \int\limits_{t_0}^{t} f(t, s, x(s), u(s))ds, \\ x(t_0) = x^0; \end{cases} \tag{2.2}$$

$$u(t) \in U, \ t_0 \leqslant t \leqslant T. \tag{2.3}$$

Фазовая переменная $x \in R^n$, вектор параметров управления $u \in R^r$, множество U замкнуто в R^r. Функции $\varphi : R^{1+n+r} \to R^n$, $f : R^{2+n+r} \to R^n$ и $g : R^n \to R$ будем считать непрерывными по всем переменным и непрерывно-дифференцируемыми по переменным x, u в некоторых областях соответствующих пространств. При этом область дифференцируемости $\varphi(t, x, u)$ и $f(t, s, x, u)$ должна охватывать множество допустимых процессов $\{u(t), x(t)\}$. Предполагается, что задача (2.1)-(2.3) разрешима в классе кусочно непрерывных функций $u(t)$.

3. Параметризация задачи

Метод [3] заключается во введении произвольного разбиения промежутка $[t_0, T]$

$$t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T, \tag{3.1}$$

и закреплении структуры управления на промежутках $[t_{k-1}, t_k)$, $1 \leqslant k \leqslant N$. Приближенное решение исходной задачи ищется в классе управлений вида:

$$u_\mu(t) = u^k_\mu(t; v^k_\mu), \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k, \quad k = 1, \ldots, N, \quad \mu = 1, \ldots, r. \tag{3.2}$$

Функции $u^k(t; v^k)$ определены и непрерывны на отрезках $[t_{k-1}, t_k]$ и принимают значения в U, параметры $v^k_\mu \in R^d$, соответственно, $v^k = (v^k_1, v^k_2, \ldots, v^k_r) \in R^{rd}$.

При подстановке параметризованного управления (3.2) в (2.2) получается траектория $x(t)$, зависящая от параметров управления $w^k = (t_k, v^k)$. Координаты полного вектора параметров будем обозначать $w^k_{00} = t_k$, $w^k_{\mu\alpha} = v^k_{\mu\alpha}$, $1 \leqslant \mu \leqslant r$, $1 \leqslant \alpha \leqslant d$. Всего параметров управления при переменном T будет $(rd+1)N$. Отвечающую им траекторию представим в виде

$$x(t) = z(t; v^1, t_1, \ldots, v^{k-1}, t_{k-1}, v^k), \quad t_{k-1} \leqslant t < t_k. \tag{3.3}$$

Функция $z(t; v^1, \ldots, t_k, v^{k+1})$ определяется на промежутках $[t_k, t_{k+1})$ интегральными соотношениями, эквивалентными в совокупности задаче Коши (2.2). Класс параметризованных управлений (3.2) является сужением допустимого класса. Предположим, что его функции определены для любых наборов параметров $\{w^k\}$ из ограниченного множества

$$W = \{(w^1, \ldots, w^N) : (3.1), \ u^k(t; v^k) \in U, \ k = 1, \ldots, N\}.$$

Введем функцию от управляющих параметров $\{w^k\}$:

$$\psi(w^1,\ldots,w^N) = g(z(T;w^1,\ldots,w^{N-1},v^N)). \tag{3.4}$$

В терминах этих функций задача (2.1)-(2.3) принимает форму задачи нелинейного программирования:

$$\psi(w^1,\ldots,w^N) \to \min \tag{3.5}$$

при условиях (2.2), (3.2), $(w^1,\ldots,w^N)\in W$.

Для решения полученной конечномерной задачи можно применять методы, использующие первые производные целевого функционала. Однако, построение производных представляет собой отдельную проблему, в силу того, что целевой функционал задан опосредованно относительно переменных $w^1,\ldots,w^N$.

4. Дифференцирование функционала по параметрам

При подстановке условий (3.1), (3.2) в задачу (2.2) решение $z(t;\cdot)$ будет определяться следующим соотношением:

$$z(t;\cdot) = x^0 + \int\limits_{t_0}^{t}\left(\varphi(\tau,z(\tau;\cdot),u(\tau)) + \int\limits_{t_0}^{\tau} f(\tau,s,z(s;\cdot),u(s))ds\right)d\tau. \tag{4.1}$$

Продифференцируем равенство (3.4) по одному из параметров $w^k_{\mu\alpha}$:

$$\frac{\partial\psi(w^1,\ldots,w^N)}{\partial w^k_{\mu\alpha}} = \frac{\partial g(z(T;w^1,\ldots,v^N))}{\partial z}\frac{\partial z(T;w^1,\ldots,v^N)}{\partial w^k_{\mu\alpha}}. \tag{4.2}$$

Введем функции

$$y^{k\mu\alpha}(t) = \frac{\partial z(t;w^1,\ldots,v^j)}{\partial w^k_{\mu\alpha}}, \qquad t_{j-1}\leqslant t\leqslant t_j, \qquad 1\leqslant k\leqslant j\leqslant N. \tag{4.3}$$

Функции (4.3) представляют собой вариации фазовой траектории относительно соответствующих параметров $w^k_{\mu\alpha}$. Таким образом, вопрос вычисления градиента целевой функции (3.5) сводится к вычислению значений $y^{k\mu\alpha}(T)$, $0\leqslant\mu\leqslant r$, $1\leqslant\alpha\leqslant d$, $1\leqslant k\leqslant N$.

Представим функцию (4.1) для $t\geq t_k$ в виде

$$\begin{aligned} z(t;\cdot) = z(t_{k-1}) + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\varphi(\tau,z(\tau;\cdot),u(\tau)) + \int\limits_{t_0}^{\tau} f(\tau,s,z(s;\cdot),u(s))ds\right)d\tau+ \\ + \int\limits_{t_k}^{t}\left(\varphi(\tau,z(\tau;\cdot),u(\tau)) + \int\limits_{t_0}^{t_k} f(\tau,s,z(s;\cdot),u(s))ds + \int\limits_{t_k}^{\tau} f(\tau,s,z(s;\cdot),u(s))ds\right)d\tau. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Продифференцируем равенство (4.4) по переменной t_k, тогда для вариации по этой переменной получаем задачу Коши

$$y^{k00}(t) = \frac{\partial z(t;\ldots)}{\partial t_k} = \varphi\left(t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)\right) - \varphi\left(t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\right) +$$
$$+\int\limits_{t_k}^{t}\left(\frac{\partial\varphi(\tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial x}y^{k00}(\tau) + f\left(\tau, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)\right) -\right.$$
$$\left.-f\left(\tau, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\right) + \int\limits_{t_k}^{\tau}\frac{\partial f(\tau, s, x(s), u(s))}{\partial x}y^{k00}(s)ds\right)d\tau,$$

которую можно представить в виде

$$\begin{cases} y^{k00}(t_k) = \varphi\left(t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)\right) - \varphi\left(t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\right), \\ \dot{y}^{k00}(t) = \dfrac{\partial\varphi(t, x(t), u(t))}{\partial x}y^{k00}(t) + f\left(t, t_k, x(t_k), u^k(t_k, v^k)\right) - \\ -f\left(t, t_k, x(t_k), u^{k+1}(t_k, v^{k+1})\right) + \displaystyle\int\limits_{t_k}^{t}\frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial x}y^{k00}(s)ds. \end{cases} \tag{4.5}$$

Для нахождения вариации по параметрам управления продифференцируем равенство (4.4) по переменной $v^k_{\mu\alpha}$

$$y^{k\mu\alpha}(t) = \int\limits_{t_{k-1}}^{t}\left(\frac{\partial\varphi(\tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial x}y^{k\mu\alpha}(\tau) + \frac{\partial\varphi(\tau, x(\tau), u(\tau))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u^k_\mu(\tau, v^k)}{\partial v^k_{\mu\alpha}}I\left(\tau\in[t_{k-1}; t_k)\right)\right)d\tau +$$
$$+\int\limits_{t_{k-1}}^{t}\int\limits_{t_{k-1}}^{\tau}\left(\frac{\partial f(\tau, s, x(s), u(s))}{\partial x}y^{k\mu\alpha}(s) + \frac{\partial f(\tau, s, x(s), u(s))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u^k_\mu(s, v^k)}{\partial v^k_{\mu\alpha}}I\left(s\in[t_{k-1}; t_k)\right)\right)dsd\tau,$$

здесь функция $I(\cdot)$ является индикатором логического аргумента: возвращает 1, если аргумент – истина, 0 в противном случае. Таким образом, получаем задачу Коши для вариации по переменной $v^k_{\mu\alpha}$

$$\begin{cases} \dot{y}^{k\mu\alpha}(t) = \dfrac{\partial\varphi(t, x(t), u(t))}{\partial x}y^{k\mu\alpha}(t) + \dfrac{\partial\varphi(t, x(t), u(t))}{\partial u_\mu}\dfrac{\partial u^k_\mu(t, v^k)}{\partial v^k_{\mu\alpha}}I\left(t\in[t_{k-1}; t_k)\right) + \\ +\displaystyle\int\limits_{t_{k-1}}^{t}\left(\frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial x}y^{k\mu\alpha}(s) + \frac{\partial f(t, s, x(s), u(s))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u^k_\mu(s, v^k)}{\partial v^k_{\mu\alpha}}I\left(s\in[t_{k-1}; t_k)\right)\right)ds, \\ y^{k\mu\alpha}(t_{k-1}) = 0. \end{cases} \tag{4.6}$$

Полученные формулы (4.5), (4.6) позволяют найти требуемые значения $y^{k\mu\alpha}(T)$, тем самым решить проблему построения градиента целевого функционала (3.5). Однако, данный подход является недостаточно эффективным с точки зрения скорости вычисления градиента, так как для построения градиента кроме задачи Коши (2.2) требуется также вычисление $N(rd+1)$ задач Коши (4.5), (4.6).

Пусть $x(t)$ – решение задачи (2.2), тогда для любой липшицевой функции $p: R\to R^n$ имеет место равенство (см. [5]):

$$\langle p(T), x(T)\rangle - \langle p(t_0), x(t_0)\rangle =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{T}\left(\langle\dot{p}(t), x(t)\rangle + \langle p(t), \varphi(t, x(t), u(t))\rangle + \int\limits_{t}^{T}\langle p(s), f(s, t, x(s), u(t))\rangle ds\right)dt. \tag{4.7}$$

Для задачи (2.1)-(2.3) введем функцию Понтрягина [5]

$$H(t,x,u,p(\cdot)) = \langle p(t), \varphi(t,x,u)\rangle + \int\limits_t^T \langle p(s), f(s,t,x,u)\rangle ds. \tag{4.8}$$

Здесь функция $p(t)$ является сопряжённой относительно систем в вариациях (4.5), (4.6) и определяется линейным уравнением

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H(t,x(t),u(t),p(\cdot))}{\partial x}.$$

С учетом определения (4.8) это интегро-дифференциальное уравнение

$$\dot{p}(t) = -\left[\frac{\partial\varphi(t,x(t),u(t))}{\partial x}\right]^T p(t) - \int\limits_t^T \left[\frac{\partial f(s,t,x(t),u(t))}{\partial x}\right]^T p(s)ds. \tag{4.9}$$

Для выбора конкретной функции $p(t)$ введём конечное условие

$$p(T) = \frac{\partial g(x(T))}{\partial x}. \tag{4.10}$$

Для функции $y^{k00}(t)$ (4.5) воспользуемся соотношением (4.7), подставим (4.9) и найдем выражение

$$\begin{aligned}\langle p(T), y^{k00}(T)\rangle - \langle p(t_k), y^{k00}(t_k)\rangle = \int\limits_{t_k}^T \Bigg(\langle \dot{p}(t), y^{k00}(t)\rangle + \int\limits_t^T \left\langle p(s), \frac{\partial f(s,t,x(t),u(t))}{\partial x} y^{k00}(t)\right\rangle ds \\ + \left\langle p(t), \frac{\partial\varphi(t,x(t),u(t))}{\partial x} y^{k00}(t) + f\left(t,t_k,x(t_k),u^k(t_k,v^k)\right) - f\left(t,t_k,x(t_k),u^{k+1}(t_k,v^{k+1})\right)\right\rangle\Bigg) dt = \\ = \int\limits_{t_k}^T \left\langle p(t), f\left(t,t_k,x(t_k),u^k(t_k,v^k)\right) - f\left(t,t_k,x(t_k),u^{k+1}(t_k,v^{k+1})\right)\right\rangle dt.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Используя полученное соотношение (4.11), выражения (4.2), (4.3), конечное условие (4.10), начальное (4.5) и определение функции Понтрягина (4.8) нетрудно получить формулу частной производной по переменной t_k $(1 \leqslant k < N)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\psi(w^1,\ldots,w^N)}{\partial t_k} = \frac{\partial g(z(T;\ldots,v^N))}{\partial z}\frac{\partial z(T;w^1,\ldots,v^N)}{\partial w^k_{\mu\alpha}} = \langle p(T), y(T)\rangle = \\ = \int\limits_{t_k}^T \left\langle p(t), f\left(t,t_k,x(t_k),u^k(t_k,v^k)\right) - f\left(t,t_k,x(t_k),u^{k+1}(t_k,v^{k+1})\right)\right\rangle dt + \langle p(t_k), y^{k00}(t_k)\rangle = \\ = H(t_k,x(t_k),u(t_k-0),p(\cdot)) - H(t_k,x(t_k),u(t_k+0),p(\cdot)).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Для вывода производной по переменным $v^k_{\mu\alpha}$ к функции $y^{k\mu\alpha}(t)$ (4.6) применим соотношение (4.7), подставим (4.9) и найдем выражение

$$\langle p(T), y^{k\mu\alpha}(T)\rangle - \langle p(t_{k-1}), y^{k\mu\alpha}(t_{k-1})\rangle = \int\limits_{t_{k-1}}^{T} \left[\langle \dot{p}(t), y^{k\mu\alpha}(t)\rangle + \right.$$
$$+\langle p(t), \frac{\partial\varphi(t,x(t),u(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(t) + \frac{\partial\varphi(t,x(t),u(t))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u_\mu^k(t,v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} I\,(t\in[t_{k-1};t_k))\rangle +$$
$$\int\limits_{t}^{T}\langle p(s), \frac{\partial f(s,t,x(t),u(t))}{\partial x} y^{k\mu\alpha}(t) + \frac{\partial f(s,t,x(t),u(t))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u_\mu^k(t,v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k}\ I\,(t\in[t_{k-1};t_k))\rangle ds]\,dt =$$
$$= \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\langle p(t), \frac{\partial\varphi(t,x(t),u(t))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u_\mu^k(t,v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k}\rangle + \int\limits_{t}^{T}\langle p(s), \frac{\partial f(s,t,x(t),u(t))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u_\mu^k(t,v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k}\rangle ds\right] dt. \tag{4.13}$$

Используя полученное соотношение (4.13), выражения (4.2), (4.3), конечное условие (4.10), начальное (4.6) и определение функции Понтрягина (4.8), аналогично частной производной по переменной t_k, найдем частные производные первого порядка по переменным $v_{\mu\alpha}^k$ $(0\leqslant\mu\leqslant r,\ 1\leqslant\alpha\leqslant d,\ 1\leqslant k\leqslant N)$

$$\frac{\partial\psi(w^1,\ldots,w^N)}{\partial v_{\mu\alpha}^k} = \frac{\partial g(z(T;\ldots,v^N))}{\partial z}\frac{\partial z(T;w^1,\ldots,v^N)}{\partial w_{\mu\alpha}^k} = \langle p(T), y(T)\rangle =$$
$$= \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\partial H(t,x(t),u(t),p(\cdot))}{\partial u_\mu}\frac{\partial u_\mu^k(t,v^k)}{\partial v_{\mu\alpha}^k}dt. \tag{4.14}$$

Если конечный момент времени T является подвижным, то вариация фазовой траектории по T конечна

$$y^{N00}(T) = \varphi(T,x(T),u(T)) + \int\limits_{t_0}^{T} f(T,s,x(s),u(s))ds,$$

и производная находится по формуле

$$\frac{\partial\psi(w^1,\ldots,w^N)}{\partial T} = \langle p(T), \varphi(T,x(T),u(T)) + \int\limits_{t_0}^{T} f(T,s,x(s),u(s))ds\rangle. \tag{4.15}$$

Теперь для вычисления производных (4.2) требуется решить помимо основной задачи Коши (2.2), (3.2) дополнительно задачу (4.9), (4.10) и определить функцию (4.8). После этого, вычисление градиента сводится к вычислению определенных интегралов (4.14), (4.15), а также значений (4.12). Приведенный алгоритм менее трудоемок по сравнению с прямым вычислением по формулам (4.5), (4.6).

5. Пример

Рассмотрим тестовый пример (построен на основе примера из [1]):

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = u(t) + \int\limits_0^t (tu(s) + x_1(s) + 1 - s - t)\exp\{s(t-s)\}ds, \\ \dot{x}_2(t) = (tx_1(t) - u(t) - t^2 + t + 1)^2, \\ x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ x_2(1) \to \inf. \end{cases}$$

Решение этой задачи известно: $u(t) = t\exp\{t^2\} + 1$, $x_1(t) = \exp\{t^2\} - 1 + t$, $x_2(t) \equiv 0$. Следовательно, минимальное значение целевого функционала равно нулю.

Решение строилось на отрезке $[0; 1]$ в классе кусочно-квадратичных управлений

$$u(t) = v_{0k} + v_{1k}t + v_{2k}t^2, \quad t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Для нахождения решения использовался поэтапный алгоритм усложнения параметризации управления:

– на первом этапе решение находилось при $N = 1$, т.е управление параметризовалось в классе квадратичных функций, таким образом, задача НП содержала только три переменные.

– на втором этапе решение строилось при $N = 2$. При этом разбиение отрезка $[0; 1]$ фиксировалось $t_1 = 0,5$, и на каждом интервале управление $u(t)$ параметризовалось квадратичной функцией. Задача НП в этом случае имела 6 переменных, в качестве начального приближения бралось решение полученное на первом этапе.

– третий этап построения решения характеризовался усложнением структуры управления $N = 3$. Отрезок $[0; 1]$ разбивался фиксированными значениями $t_1 = 0,5$ и $t_2 = 0,75$. Увеличение числа переменных задачи НП до 9 требует хорошего начального приближения, поэтому в качестве начального выбиралось решение полученное на предыдущем этапе.

Все задачи НП решались градиентным методом, итерационный процесс останавливался, когда норма градиента становилась меньше $\varepsilon = 0,001$.

Численный эксперимент проводился при двух способах вычисления градиента: первый способ основывался на использовании формул (4.14); второй способ основывался на численном дифференцировании – аппроксимации градиента на основе вычисления значений целевой функции (3.5). Решение задач Коши проходило методом Эйлера при фиксированном шаге интегрирования $0,005$.

Результаты эксперимента приведены в таблице:

N	Первый способ			Второй способ		
	Значение функционала	Число итераций	Время	Значение функционала	Число итераций	Время
1	0.00285	437	4538	0.00288	443	5505
2	0.00112	70	429	0.00102	69	905
3	0.00061	244	905	0.00051	244	3025

В первом столбце указывается число интервалов разбиения исходного временного отрезка, второй и пятый столбцы содержат значение функионала на полученном решении в соответствующем классе параметризации, третий и шестой – число итераций в градиентном методе соответствующей задачи НП. Временные характеристики работы алгоритма существенно зависят от выбора средств реализации и эксперимента, т.е. языка программирования и характеристик ЭВМ. Поэтому к значениям в четвертом и седьмом столбцах нужно относится как к условным временным единицам (например, секунды).

Анализируя данные таблицы, можно отметить, что оба способа вычисления градиента приводят к приемлемому решению и, с точки зрения количества итераций, значения целевого функционала, дают эквивалентные результаты, однако, временная характеристика гораздо быстрее у первого способа, причем эта разница растет по мере увеличения числа параметров при параметризации управления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 7-01-90000 Вьет/а) Авторы благодарны В.К.Горбунову за внимание, оказываемое к работе.

Список литературы

1. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие – Киев, Наукова думка, 1986.

2. Горбунов В.К. О сведении задач оптимального управления к конечномерным // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1978. Т.18. №5. С. 1083-1095.

3. Горбунов В.К. Метод параметризации задач оптимального управления // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т.19. №2. С. 292-303.

4. Горбунов В.К., Лутошкин И.В. Развитие и опыт применения метода параметризации в вырожденных задачах динамической оптимизации // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 2004. № 5. С. 67-84.

5. Дждеед М. Методы и алгоритмы оптимального управления системами, описываемыми интегро-дифференциальными уравнениями. Дисссертация на соискание степени канд. физ.-мат. наук. Тверь, 2004, 114 с.

6. Егоров А.И. Математические методы оптимизации процессов теплопроводности и диффузии. - Фрунзе: Илим, 1990.

7. Максимов В.П. Некоторые проблемы регуляризации переопределенных краевых задач экономической динамики. // Математическое моделирование, 1997, Т.9. №2. С. 57-65.

8. Пустарнакова Ю.А. Оптимизация процесса обучения искусственной нейронной сети, описываемой системой интегро-дифференциальных уравнений. Труды 12 - ой Байкальской международной конференции. «Методы оптимизации и их приложения». Иркутск, 2001, т.2. - с 134-138.

9. Durazzi C. and Galligani E. Nonlinear programming methods for solving optimal control problems // Nonconvex Optimization and Its Applications. Equilibrium Problems: Nonsmooth Optimization and Variational Inequality Models, 2001 Kluwer Academic Publishers. Printed in the Netherlands, pp.71-99.

10. Gorbunov V., Lutoshkin I. The parameterization method in singular differential-algebraic equations. Computational Science- ICCS 2003 / P. Slot et al. (Eds.). LNCS 2658. Springer, 2003.

11. Gorbunov V., Lutoshkin I. The parameterization method in optimal control problems and differential-algebraic equations. Journal of computational and applied mathematics, Elsevier, 2006, v. 185, iss. 2, p. 377-390.

12. Gorbunov V.K., Lutoshkin I.V., Martynenko Y.V. A parametrization method for the numerical solution of singular differential equations // Applied Numerical Mathematics (2008), doi:10.1016/j.apnum.2008.03.025. p. 1–17.

13. Kamien M. I., Muller E. Optimal Control with Integral State// Equations The Review of Economic Studies, Vol. 43, No. 3. (Oct., 1976), p. 469-473.

14. Yuan Wei, Tang Tao The Numerical Analysis of Implicit Runge-Kutta Methods for a Certain Nonlinear Integro-Differential Equation // Mathematics of Computation, Vol. 54, No. 189. (Jan., 1990), p. 155-168.

The parameterization method for optimizing the systems represented by integro-differential equations

© I.Y. Dergunov[3], I.V. Lutoshkin[4]

Abstract. The parameterization method (it was created for solving optimal control problems) is specified for variational problems with Volterra integro-differential equations. The approximation solution is a variational spline.

Key Words: integro-differential equations, optimization, the parameterization method.

[3]Aspirant of Economic-mathematical Methods and Information Technologies Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; comm3@yandex.ru.

[4]Docent of Economic-mathematical Methods and Information Technologies Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; LutoshkinIV@ulsu.ru.