

УДК 519.63

## О способе вычисления потенциальных физических полей в кусочно-анизотропных средах

© В. Н. Кризский<sup>1</sup>, Н. В. Трегубов<sup>2</sup>, Р. Р. Яматов<sup>3</sup>

**Аннотация.** На основе процедуры пересчета функции Грина одной среды в функцию Грина другой среды строятся рекуррентные алгоритмы решения прямых трехмерных задач о распространении потенциальных физических полей в кусочно-анизотропных средах. Способ вычисления, применимый к задачам с дифференциальными уравнениями эллиптического, параболического, гиперболического и смешанного типов, позволяет комплексировать физические методы исследований. Алгоритмы допускают распараллеливание и могут быть реализованы на вычислительных кластерах и многопроцессорных комплексах.

**Ключевые слова:** потенциальное поле, краевая задача, метод интегральных представлений и интегральных преобразований, функция Грина, кусочно-анизотропная среда.

### 1. Введение

Математическая модель распространения ряда практически значимых физических полей в анизотропной области исследования  $\Omega \subset R^3$  описывается краевыми или начально-краевыми задачами для дифференциальных уравнений математической физики вида:

$$\operatorname{div}(\sigma(P) \cdot \nabla U(P, t)) - a(P)U(P, t) - b^2(P) \frac{\partial U(P, t)}{\partial t} - c^2(P) \frac{\partial^2 U(P, t)}{\partial t^2} = -f(P, t). \quad (1.1)$$

Здесь  $f(P, t)$  - функция интенсивности источников/стоков поля;  $\sigma(P)$  - симметричный положительно определенный тензор, описывающий физические свойства среды;  $a(P)$  - комплекснозначная функция,  $b(P)$  и  $c(P)$  - действительные функциональные коэффициенты, зависящие от т.  $P = (x, y, z) \in \Omega$ ;  $U(P, t)$  - искомая скалярная функция поля; переменная  $t \geq 0$  - время.

Будем считать в дальнейшем встречающиеся в задаче функции достаточно гладкими для использования формул интегральных представлений и интегральных уравнений, а так же имеющими необходимый порядок затухания на бесконечности для обеспечения применимости интегрального преобразования Лапласа.

Осуществим разбиение области  $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$  на подобласти  $\Omega_i$  с достаточно гладкими границами  $S_i$  так, чтобы в каждой из подобластей  $\Omega_i$  тензор  $\sigma(P)$  и функции  $a(P)$ ,  $b(P)$ ,  $c(P)$  можно было бы с некоторой степенью точности принять постоянными:  $\sigma(P) = \sigma_i = (\sigma_{kl}^i)_{3 \times 3}$ ,  $\sigma_{kl}^i = \sigma_{lk}^i$ ,  $k = \overline{1, 3}$ ,  $l = \overline{1, 3}$ ,  $a(P) = a_i$ ,  $b(P) = b_i$ ,  $c(P) = c_i$ . Количество подобластей  $N$  будет определяться задаваемой точностью аппроксимации.

В подобластях  $\Omega_i$  уравнение (1.1) преобразуется к виду:

$$\operatorname{div}(\sigma_i \cdot \nabla U_i(P, t)) - a_i U_i(P, t) - b_i^2 \frac{\partial U_i(P, t)}{\partial t} - c_i^2 \frac{\partial^2 U_i(P, t)}{\partial t^2} = -f_i(P, t). \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Заведующий кафедрой программирования и экономической информатики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; [Krizsky@bsunet.ru](mailto:Krizsky@bsunet.ru)

<sup>2</sup>Ассистент кафедры математического моделирования, Стерлитамакская государственная педагогическая академия, г. Стерлитамак; [nikolay\\_fmfm@mail.ru](mailto:nikolay_fmfm@mail.ru)

<sup>3</sup>Ассистент кафедры математического моделирования, Стерлитамакская государственная педагогическая академия, г. Стерлитамак; [yamatovRim@yandex.ru](mailto:yamatovRim@yandex.ru)

При  $c_i \neq 0$  в подобласти  $\Omega_i$  имеем уравнение гиперболического типа. Частными случаями такого типа уравнений являются: волновое уравнение /при  $a_i = 0$ ,  $b_i = 0$ /, описывающее распространение сейсмических, акустических волн или электромагнитных полей (ЭМП) в изоляторе; телеграфное уравнение / $a_i = 0$ ,  $b_i \neq 0$ /, моделирующее ЭМП в области однородности среды.

При  $c_i = 0$  и  $b_i \neq 0$  получим уравнения параболического типа. К таким уравнениям приводят задачи диффузии, теплопроводности, распределения квазистационарных ЭМП.

При  $c_i = 0$  и  $b_i = 0$  будем иметь уравнения эллиптического типа. Его частными случаями являются: уравнение Гельмгольца / $\sigma_i \in R$ ,  $a_i \neq 0$ /, описывающее монохроматические электромагнитные поля (ЭМП); уравнение Пуассона или Лапласа / $\sigma_i \in R$ ,  $a_i = 0$ /, к которым приводят задачи гравиметрии, электростатики, описываются распределения постоянных электрических и магнитных полей.

На участках  $\Gamma_j$  внешней границы  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^M \Gamma_j$  области  $\Omega$  зададим граничные условия, в общем случае, третьего рода:  $\alpha_j(P)(\sigma_j \nabla U_j(P, t), \mathbf{n}) - \beta_j(P) U_j(P, t)|_{P \in \Gamma_j} = \psi_j(P, t)$ ,  $|\alpha_j(P)| + |\beta_j(P)| \neq 0$ , которые при  $\alpha_j(P) = 0$ ,  $\beta_j(P) \neq 0$  образуют условия первого, а при  $\alpha_j(P) \neq 0$ ,  $\beta_j(P) = 0$  - второго рода. Здесь  $(\sigma_j \nabla U_j(P, t), \mathbf{n})$  - скалярное произведение - проекция вектора градиента функции, измененного тензором анизотропии поля,  $\sigma_j \nabla U_j(P, t)$  на направление внешнего вектора нормали к поверхности -  $\mathbf{n}$  (т.е. плотность потока поля через границу).

На бесконечно удаленной границе неограниченной подобласти  $\Omega_j$  определим граничные условия - условия регулярности - в виде:  $U_j(P, t) \rightarrow 0$ , при  $P \rightarrow \infty$ .

На границе контакта сред  $S_i \cap S_j$  различных постоянных значений тензора  $\sigma(P)$  зададим общие условия сопряжения четвертого рода:

$$U_i(P, t) - U_j(P, t)|_{P \in S_i \cap S_j} = \varphi_i(P, t); (\sigma_i \nabla U_i(P, t), \mathbf{n}) - (\sigma_j \nabla U_j(P, t), \mathbf{n})|_{P \in S_i \cap S_j} = \tilde{\varphi}_i(P, t)$$

со скачком поля и плотности потока. Если поле и плотность потока непрерывны на  $S_i \cap S_j$ , то следует положить  $\varphi_i(P, t) = 0$  и  $\tilde{\varphi}_i(P, t) = 0$ .

Стремление описать среду в кусочно-анизотропном приближении детальнее влечет рост количества подобластей (величины  $N$ ) и, следовательно, ведет к возрастанию сложности геометрии исследуемой области  $\Omega$  в математической модели. Это, как правило, осложняет решение задачи и на практике приводит к моделированию полей в упрощенных по геометрии областях, не отражающих в полной мере среды реальные и процессы в них протекающие.

Опишем рекуррентный алгоритм пересчета функции Грина одной задачи в функцию Грина другой задачи с меньшим количеством подобластей  $N$ . В [1] аналогичный способ использовался для решения прямых задач в изотропных кусочно-однородных средах.

В данной работе подход реализуется для стационарных эллиптических краевых задач и для нестационарных задач параболического и гиперболического типов в кусочно-анизотропных средах с симметричными положительно определенными тензорами  $\sigma_i$  в подобластях, интегральным преобразованием Лапласа приводимых к задачам эллиптического типа.

Способ вычисления полей теоретически обоснован В.Н. Кризским, программная реализация алгоритма, его апробация на задачах-примерах осуществлены Н.В. Трегубовым и Р.Р. Яматовым.

## 2. Стационарное поле в кусочно-анизотропной среде

Рассмотрим кусочно-анизотропную область  $\Omega$  с внешней границей  $\Gamma$ , состоящую из подобластей  $\Omega_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , заполненных однородными проводящими поле объемами с постоянными симметричными положительно определенными тензорами проводимости  $\sigma_i$  (рис.2.1). Пусть  $S_i$  – граница области  $\Omega_i$ .  $S_i = \gamma_i \cup \Gamma_i$ , где  $\Gamma_i = S_i \cap \Gamma$  – внешняя часть границы, и  $\gamma_i = S_i \setminus \Gamma_i$  – внутренняя часть границы. Если область  $\Omega_i$  не имеет контакта с внешней границей  $\Gamma$ , то  $\Gamma_i = \emptyset$  и  $S_i \equiv \gamma_i$ . Математическая модель распределения поля  $U(P)$ ,  $P(x, y, z)$  имеет вид:

$$\operatorname{div}(\sigma_i \nabla U_i(P)) - a_i U_i(P) = -f_i(P), P \in \Omega_i, i = \overline{1, N}; \quad (2.1)$$

$$U_i(P) - U_j(P)|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = \varphi_i(P), (\sigma_i \nabla U_i(P), \mathbf{n}) - (\sigma_j \nabla U_j(P), \mathbf{n})|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = \tilde{\varphi}_i(P), \\ i = \overline{1, N}, j \in J_i = \left\{ j \mid j = \overline{1, i-1}; \gamma_i \cap \gamma_j \neq \emptyset \right\}; \quad (2.2)$$

$$\alpha_i(P)(\sigma_i \nabla U_i(P), \mathbf{n}) - \beta_i(P) U_i(P)|_{P \in \Gamma_i} = \psi_i(P), |\alpha_i(P)| + |\beta_i(P)| \neq 0, \\ i = i_1, i_2, \dots, i_k, k \leq N; \quad (2.3)$$

$$U_m(P) \rightarrow 0, P \rightarrow \infty, m = m_1, m_2, \dots, m_n, n \leq N. \quad (2.4)$$

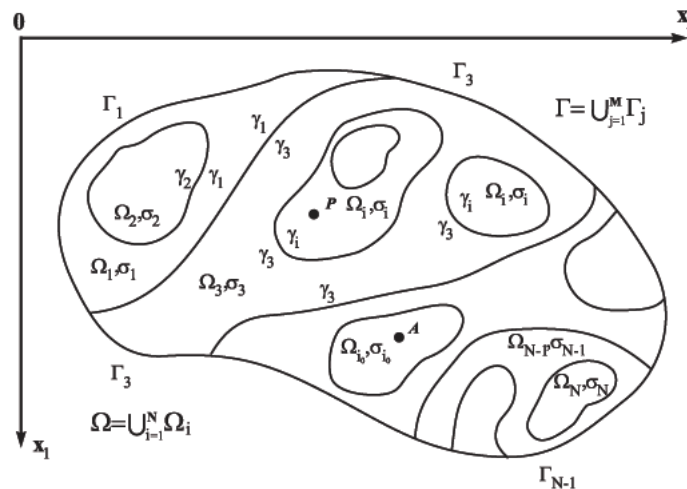


Рисунок 2.1

Кусочно-анизотропная среда в  $R^3$

Здесь  $J_i$  – множество номеров подобластей  $\Omega_j$ , граничащих с подобластью  $\Omega_i$ , и имеющих меньшие номера, чем  $i$ ;  $i_1, i_2, \dots, i_k$  – номера подобластей  $\Omega_i$ , участки границ которых являются частью внешней границы  $\Gamma$  области  $\Omega$ ,  $m_1, m_2, \dots, m_N$  – номера подобластей с участками границ, уходящими в бесконечность,  $\mathbf{n}$  – вектор внешней нормали к границе области.

Рассмотрим вспомогательную задачу с меньшим или равным, чем в исходной задаче числом кусочно-анизотропных подобластей  $N_1 \leq N$  и с точечным источником единичной интенсивности, находящемся в произвольной точке  $Q(x_q, y_q, z_q)$  области  $\Omega$ :

$$\operatorname{div}(\sigma_i \nabla G_i^1(P, Q)) - \kappa_i G_i^1(P, Q) = -\delta(P - Q), P(x, y, z) \in \Omega_i, i = \overline{1, N_1}, N_1 \leq N; \quad (2.5)$$

$$G_i^1(P, Q) - G_j^1(P, Q)|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0, (\sigma_i \bar{\nabla} G_i^1(P, Q), \mathbf{n}) - (\sigma_j \bar{\nabla} G_j^1(P, Q), \mathbf{n})|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0, \\ i = \overline{1, N_1}, j \in J_i; \quad (2.6)$$

$$\alpha_i(P)(\sigma_i \bar{\nabla} G_i^1(P, Q), \mathbf{n}) - \beta_i(P) G_i^1(P, Q)|_{P \in \Gamma_i} = 0, |\alpha_i(P)| + |\beta_i(P)| \neq 0, \\ i = i_1, i_2, \dots, i_{k_1}, k_1 \leq k \leq N_1; \quad (2.7)$$

$$G_m^1(P, Q) \rightarrow 0, P \rightarrow \infty, m = m_1, m_2, \dots, m_{n_1}, n_1 \leq n \leq N_1. \quad (2.8)$$

Краевая задача (2.5)–(2.8) определяет функцию Грина в области  $\Omega$  для задачи с уравнениями эллиптического типа с оператором

$$H[U_i(P)] \equiv \text{div}(\sigma_i \bar{\nabla} U_i(P)) - \kappa_i U_i(P), \kappa_i = a_i.$$

Без ограничения общности рассуждений будем считать, что функция Грина  $G^1(P, Q)$  определяется в среде, состоящей из первых  $N_1$  подобластей  $\Omega_i$ .

Если  $N_1 = N$ , то решение задачи (2.1)–(2.4) имеет вид:

$$U(P) = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f_i(Q) G^1(P, Q) d\Omega_{iQ} + \sum_{i=1, j \in J_i}^N \int_{\gamma_i} (\varphi_i(Q)(\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) - \tilde{\varphi}_i(Q) G^1(P, Q)) d\gamma_{iQ} + \\ + \sum_{l_1} \int_{\Gamma_{l_1}} \frac{\psi_{l_1}(Q)}{\alpha_{l_1}(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{l_1Q} + \sum_{l_2} \int_{\Gamma_{l_2}} \frac{\psi_{l_2}(Q)}{\beta_{l_2}(Q)} (\sigma_{l_2} \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{l_2Q},$$

где  $l_1$  – номера участков внешней границы  $\Gamma$ , на которых заданы условия второго или третьего рода при  $\alpha_{l_1}(P) \neq 0$ , а  $l_2$  – номера участков внешней границы  $\Gamma$ , на которых заданы условия первого рода (при  $\alpha_{l_2}(P) = 0, \beta_{l_2}(P) \neq 0$ ).

Если  $N_1 < N$ , то рассмотрим для каждой подобласти  $\Omega_i$ ,  $i = \overline{1, N}$  формулу Остроградского, справедливую для симметричных тензоров  $\sigma_i$ :

$$\int_{\Omega_i} (V(Q)H[U_i(Q)] - U_i(Q)H[V(Q)]) d\Omega_{iQ} = \\ = \int_{S_i} (V(Q)(\sigma_i \bar{\nabla} U_i(Q), \mathbf{n}) - U_i(Q)(\sigma_i \bar{\nabla} V(Q), \mathbf{n})) dS_{iQ}. \quad (2.9)$$

Подставив в (2.9) вместо функции  $V(Q)$  функцию Грина  $G^1(P, Q)$ , определяемую решением граничной задачи (2.5)–(2.8), получим интегральное представление Грина решения краевой задачи (2.1)–(2.4) в области  $\Omega_i$ :

$$\nu_i U_i(P) = \int_{\Omega_i} f_i(Q) G^1(P, Q) d\Omega_{iQ} + \\ + \int_{\gamma_i} (G^1(P, Q)(\sigma_i \bar{\nabla} U_i(Q), \mathbf{n}) - U_i(Q)(\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n})) d\gamma_{iQ} + \\ + \begin{cases} \int_{\Gamma_i} \frac{\psi_i(Q)}{\alpha_i(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{iQ}, & \alpha_i(Q) \neq 0 \\ \int_{\Gamma_i} \frac{\psi_i(Q)}{\beta_i(Q)} (\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{iQ}, & \alpha_i(Q) = 0 \end{cases}, \nu_i = \begin{cases} 1, & P \in \Omega_i \setminus S_i, \\ 1/2, & P \in S_i, \\ 0, & P \notin \Omega_i \cup S_i. \end{cases} \quad (2.10)$$

Если же  $\Gamma_i = \emptyset$ , то последнее слагаемое в формуле (2.10) отсутствует. Если  $\Gamma_i$  – есть участок бесконечно удаленной внешней границы, то из условий (2.4), (2.8) интегралы равны нулю.

Просуммировав формулы (2.10) по  $i$  от 1 до  $N$ , с учетом граничных условий (2.2) и (2.6), получим интегральное представление решения задачи (2.1)–(2.4):

$$\begin{aligned} \nu U(P) = & \sum_{i=N_1+1}^N \sum_{j \in J_i} \int_{\gamma_i \cap \gamma_j} U_i(Q) ((\sigma_j - \sigma_i) \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) d\gamma_{iQ} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f_i(Q) G^1(P, Q) d\Omega_{iQ} + \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (\varphi_i(Q) (\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) - \tilde{\varphi}_i(Q) G^1(P, Q)) d\gamma_{iQ} + \quad (2.11) \\ & + \sum_{l_1} \int_{\Gamma_{l_1}} \frac{\psi_{l_1}(Q)}{\alpha_{l_1}(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{l_1Q} + \sum_{l_2} \int_{\Gamma_{l_2}} \frac{\psi_{l_2}(Q)}{\beta_{l_2}(Q)} (\sigma_{l_2} \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{l_2Q}, \nu = \begin{cases} 1, & P \in \Omega \setminus \Gamma, \\ 1/2, & P \in \Gamma, \end{cases} \end{aligned}$$

из которого следует, что решение исходной задачи (2.1)–(2.4) может быть получено в любой точке  $P$  кусочно-анизотропной области  $\Omega$ , если будет определено решение задачи (2.5)–(2.8) – функция Грина  $G^1(P, Q)$  – и будут известны граничные значения функции на внутренних границах подобластей, не вошедших в задачу для функции Грина. Здесь  $\mathbf{n}_Q$  – вектор внешней нормали в точке  $Q$ , направленный на внутренних границах  $\gamma_i$  в среду с меньшим, чем  $i$  номером.

Опуская в (2.11) точку  $P$  на каждую из таких границ и учитывая первое условие (2.2), получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно неизвестных граничных значений вида:

$$\begin{aligned} U_i(P) - & \sum_{i=N_1+1}^N \sum_{j \in J_i} \int_{\gamma_i \cap \gamma_j} U_i(Q) ((\sigma_j - \sigma_i) \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) d\gamma_{iQ} = \\ = & -\frac{1}{2} \varphi_i(P) + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} f_i(Q) G^1(P, Q) d\Omega_{iQ} + \quad (2.12) \\ & + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (\varphi_i(Q) (\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) - \tilde{\varphi}_i(Q) G^1(P, Q)) d\gamma_{iQ} + \\ & + \sum_{l_1} \int_{\Gamma_{l_1}} \frac{\psi_{l_1}(Q)}{\alpha_{l_1}(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{l_1Q} + \sum_{l_2} \int_{\Gamma_{l_2}} \frac{\psi_{l_2}(Q)}{\beta_{l_2}(Q)} (\sigma_{l_2} \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{l_2Q}. \end{aligned}$$

Здесь  $P \in \gamma_l, l \in J_k, k = \overline{N_1+1, N}, Q \in \gamma_j, j \in J_i, i = \overline{N_1+1, N}$ .

Отметим, что задача (2.5)–(2.8) для функции Грина аналогична исходной задаче, но имеет более простой вид. В ней граничные условия – однородны, а число кусочно-однородных подобластей  $N_1$  меньше, чем в исходной задаче ( $N_1 < N$ ). Следовательно, для решения задачи (2.5)–(2.8) снова может быть применен описанный выше метод интегральных представлений и интегральных уравнений, в котором вторая функция Грина будет строиться для области с количеством подобластей  $N_2 < N_1$ , а расчетные формулы, с учетом однородности задачи, также будут вида (2.11), (2.12). Обобщая,

получим расчетные формулы для функции Грина на рекуррентном шаге с номером  $n$ :

$$G^n(P, Q) = \sum_{i=N_{n+1}+1}^{N_n} \sum_{j \in J_{i\gamma_i \cap \gamma_j}} \int G_i^n(\tilde{Q}, Q) ((\sigma_j - \sigma_i) \nabla G^{n+1}(P, \tilde{Q}), \mathbf{n}_{\tilde{Q}}) d\gamma_{i\tilde{Q}} + G^{n+1}(P, Q); \quad (2.13)$$

$$G^n(P, Q) - \sum_{i=N_{n+1}+1}^{N_n} \sum_{j \in J_{i\gamma_i \cap \gamma_j}} \int G_i^n(\tilde{Q}, Q) ((\sigma_j - \sigma_i) \nabla G^{n+1}(P, \tilde{Q}), \mathbf{n}_{\tilde{Q}}) d\gamma_{i\tilde{Q}} = G^{n+1}(P, Q); \quad (2.14)$$

$$P \in \gamma_l, l \in J_k, k = \overline{N_{n+1} + 1, N_n}, \tilde{Q} \in \gamma_j, j \in J_i, i = \overline{N_{n+1} + 1, N_n}.$$

Таким образом, алгоритм позволяет варьировать вмещающее пространство от исходного сложно-построенного ( $N_1 = N$ ) до однородного ( $N_1 = 1$ ). Понижение возможно осуществить до такого  $N_r$  ( $N_r < \dots < N_2 < N_1 < N$ ), для которого задача для функции Грина будет иметь решение аналитическое или программно реализованное численное.

В прямом ходе алгоритма на каждом рекуррентном шаге:

1. производится выбор подобластей, которые будут считаться включениями (по внутренним границам которых будут сформированы интегральные уравнения);

2. формулируется вспомогательная (более простого вида) задача для функции Грина во вмещающем пространстве без включений;

3. строится интегральное представление вида (2.11) на нулевом шаге или вида (2.13) – на последующих шагах;

4. формируется система интегральных уравнений вида (2.12) на нулевом шаге, для на последующих шагов – вида (2.14).

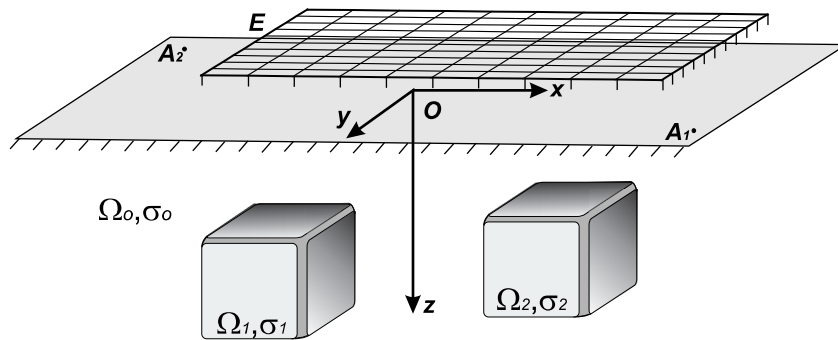
Обратный ход алгоритма заключается в вычислении искомой функции.

С другой стороны, предложенный выше алгоритм позволяет усложнять математическую модель, так как область, для которой получено решение прямой задачи, может быть принята за вмещающее пространство более сложной области, т.е. математическая модель может быть дополнена новым включением (новой подобластью  $\Omega_{N+1}$ ) со своими физическими параметрами и, следовательно, своими  $\sigma_{N+1}$ ,  $a_{N+1}$ . К новой задаче применимы аналогичные интегральные формулы.

Формулы (2.11), (2.12) упрощаются для ряда частных случаев: при наличии однородных граничных условий вида (2.2), когда  $\varphi_i(P) = 0$  и  $\tilde{\varphi}_i(P) = 0$ , и/или (2.3), при  $\psi_i(P) = 0$ ; при точечном источнике поля в точке  $A \in \Omega$  постоянной интенсивности  $I = const$ , т.е. когда  $f(P) = I \cdot \delta(P - A)$ .

Расчетные формулы (2.11), (2.12) остаются верными и для задач с операторами  $div(\sigma_i \cdot \nabla U_i(P))$ . Для этого в задаче (2.1)-(2.4) следует положить  $a_i = 0, i = \overline{1, N}$ . Более того, если это необходимо для исследователя, в ряде подобластей поле может подчиняться уравнениям с оператором  $div(\sigma_i \cdot \nabla U_i(P)) - a_i U_i(P)$ , а в остальных – уравнениям с оператором  $div(\sigma_i \cdot \nabla U_i(P))$ .

Если предположить, что тензоры – есть матрицы диагональные с одинаковыми значениями компонент диагонали, т.е. что среда кусочно-однородна, то формулы (2.11), (2.12) порождают соответствующие формулы работы [1].

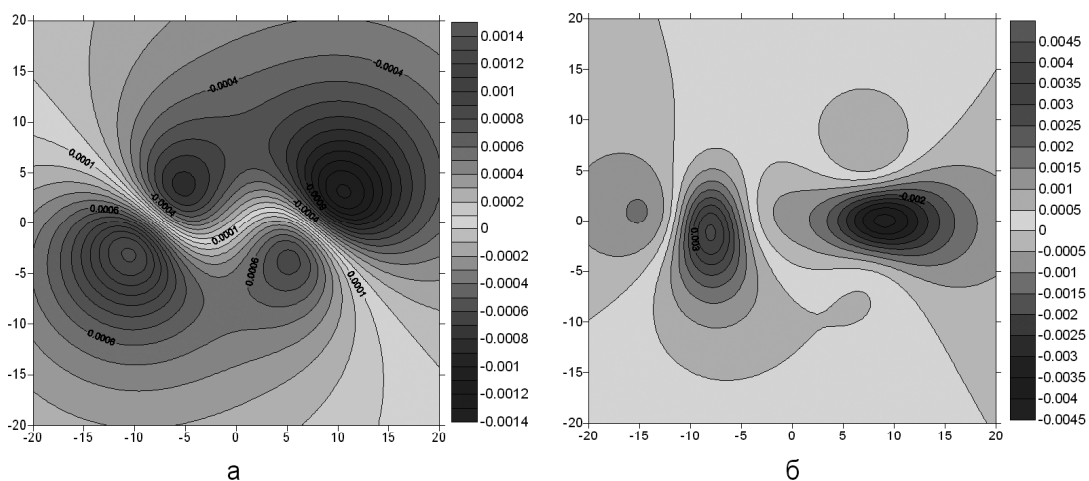


Р и с у н о к 2.2

Полупространство с кубическими включениями

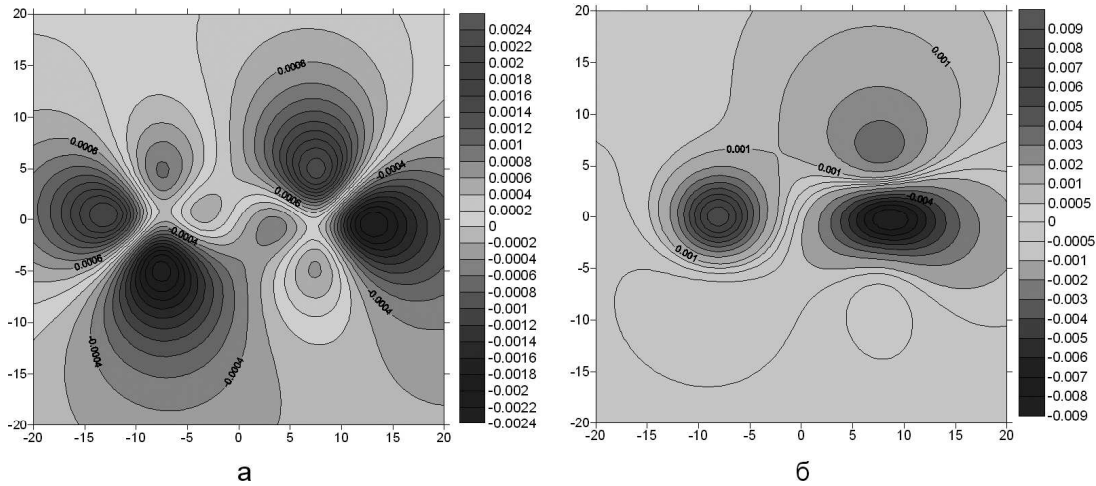
Алгоритм, изложенный выше, программно реализован. На рис.2.3а приведены изолинии аномального потенциала постоянного электрического тока от двух точечных источников силы  $I_1 = +1$  А,  $I_2 = -1$  А с координатами  $A_1(40, 40, 0)$  и  $A_2(-40, -40, 0)$  соответственно, вычисленного по алгоритму, изложенному выше, на площадке  $E = \{x \in (-20, 20), y \in (-20, 20), z = 0\}$  «дневной» поверхности *однородного* полупространства удельной электрической проводимости  $\sigma_0 = 0.01$  См/м в присутствии двух *однородных* тел – кубов со стороной 4 м с координатами центров  $O_1(-8, 0, 6)$  м,  $O_2(8, 0, 6)$  м, гранями, параллельными координатным плоскостям и одинаковыми удельными электрическими проводимостями  $\sigma^1 = 0.02$  См/м и  $\sigma^2 = 0.02$  См/м (см. рис.2.2). Сравнение с данными ЦГЭМИ ИФЗ РАН (П.Н. Александров) и результатами вычислений с использованием программного комплекса, реализующего алгоритмы в [1], показало эффективность предлагаемого способа (относительная погрешность менее 1%).

На рис.2.3б показано аномальное поле, когда кубические включения в *однородном* полупространстве анизотропны, с ненулевыми коэффициентами проводимости вдоль осей системы координат ( $\sigma_{11}^1 = 4\sigma_{22}^1 = 4\sigma_{33}^1 = \sigma_{22}^2 = 0.02$  См/м,  $\sigma_{33}^2 = \sigma_{33}^1 = 0.03$  См/м).



Р и с у н о к 2.3

Аномальное поле диполя над кубическими включениями в однородном полупространстве, В.  
а) однородные включения, б) анизотропные включения.



Р и с у н о к 2.4

Аномальное поле диполя над кубическими включениями в анизотропном полупространстве, В.  
 а) однородные включения, б) анизотропные включения.

На рис.2.4 для геометрически такой же среды демонстрируются аномальные поля в случае *однородных*(рис.2.4а) и *анизотропных* (рис.2.4б) кубических включений с проводимостями  $\sigma^1 = 0.02$  См/м и  $\sigma^2 = 0.02$  См/м и  $\sigma_{11}^1 = 4\sigma_{22}^1 = 4\sigma_{33}^1 = \sigma_{22}^2 = 0.02$  См/м,  $\sigma_{33}^2 = \sigma_{33}^1 = 0.03$  См/м соответственно в *анизотропном* полупространстве с тензором

$$\text{проводимости вида } \sigma_0 = \begin{pmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.03 & 0 \\ 0 & 0 & 0.02 \end{pmatrix}.$$

### 3. Нестационарное поле в кусочно-анизотропной среде

Рассмотрим, как более общий, случай, когда математическая модель распространения поля представлена начально-краевой задачей для уравнений гиперболического типа. Математическая модель распределения поля  $U(P, t)$ ,  $P(x, y, z)$  имеет вид:

$$\text{div}(\sigma_i \nabla U_i(P, t)) - a_i U_i(P, t) - b_i^2 \frac{\partial U_i(P, t)}{\partial t} - c_i^2 \frac{\partial^2 U_i(P, t)}{\partial t^2} = -f_i(P, t), P \in \Omega_i, i = \overline{1, N}; \quad (3.1)$$

$$U_i(P, t) - U_j(P, t)|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = \varphi_i(P, t), (\sigma_i \nabla U_i(P, t), \mathbf{n}) - (\sigma_j \nabla U_j(P, t), \mathbf{n})|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = \tilde{\varphi}_i(P, t), \\ i = \overline{1, N}, j \in J_i = \{j | j = \overline{1, i-1}; \gamma_i \cap \gamma_j \neq \emptyset\}; \quad (3.2)$$

$$\alpha_i(P)(\sigma_i \nabla U_i(P, t), \mathbf{n}) - \beta_i(P) U_i(P, t)|_{P \in \Gamma_i} = \psi_i(P, t), |\alpha_i(P)| + |\beta_i(P)| \neq 0, \\ i = i_1, i_2, \dots, i_k, k \leq N; \quad (3.3)$$

$$U_m(P, t) \rightarrow 0, P \rightarrow \infty, m = m_1, m_2, \dots, m_n, n \leq N; \quad (3.4)$$

$$U_i(P, 0) = \tau_i(P), \frac{\partial U_i(P, 0)}{\partial t} = \mu_i(P), i = \overline{1, N}; \quad (3.5)$$

Здесь сохранены обозначения раздела 2.



Применим интегральное преобразование Лапласа [2]  $U^\omega(P) = \int_0^\infty U(P, t)e^{-\omega t} dt$  к задаче (3.1)-(3.5) с формулой обращения

$$U(P) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\omega_0 - i\infty}^{\omega_0 + i\infty} U^\omega(P) e^{\omega t} d\omega, \operatorname{Re} \omega = \omega_0 > 0. \quad (3.6)$$

Контуром интегрирования в (3.6) является прямая  $\operatorname{Re} \omega = \omega_0 > 0$ , параллельная мнимой оси.

Умножая (3.1)-(3.5) на  $e^{-\omega t}$  и интегрируя по  $t$  от 0 до  $\infty$ , получим однопараметрическое (по  $\omega$ ) семейство эллиптических краевых задач:

$$\operatorname{div}(\sigma_i \bar{\nabla} U_i^\omega(P)) - \kappa_i U_i^\omega(P) = -\Phi_i^\omega(P), i = \overline{1, N}; \quad (3.7)$$

$$U_i^\omega(P) - U_j^\omega(P)|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = \varphi_i^\omega(P), (\sigma_i \bar{\nabla} U_i^\omega(P), \mathbf{n}) - (\sigma_j \bar{\nabla} U_j^\omega(P), \mathbf{n})|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = \tilde{\varphi}_i^\omega(P), \\ i = \overline{1, N}, j \in J_i; \quad (3.8)$$

$$\alpha_i(P)(\sigma_i \bar{\nabla} U_i^\omega(P), \mathbf{n}) - \beta_i(P) U_i^\omega(P)|_{P \in \Gamma_i} = \psi_i^\omega(P), |\alpha_i(P)| + |\beta_i(P)| \neq 0, \\ i = i_1, i_2, \dots, i_k, k \leq N; \quad (3.9)$$

$$U_m^\omega(P) \rightarrow 0, P \rightarrow \infty, m = m_1, m_2, \dots, m_n, n \leq N \quad (3.10)$$

с операторами  $H[U_i^\omega(P)] \equiv \operatorname{div}(\sigma_i \bar{\nabla} U_i^\omega(P)) - \kappa_i U_i^\omega(P)$ ,  $\kappa_i = a_i + \omega b_i^2 + \omega^2 c_i^2$  и функциями  $\Phi_i^\omega(P) = (b_i^2 + \omega c_i^2)\tau_i(P) + c_i^2 \mu_i(P) + f_i^\omega(P)$  в подобластях  $\Omega_i$ .

Для такого типа задач, применяя подход, описанный выше, в части 2 статьи, может быть получено интегральное представление решения:

$$\nu U^\omega(P) = \sum_{i=N_1+1}^N \sum_{j \in J_{\gamma_i \cap \gamma_j}} \int U_i^\omega(Q) ((\sigma_j - \sigma_i) \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) d\gamma_{iQ} + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \Phi_i^\omega(Q) G^1(P, Q) d\Omega_{iQ} + \\ + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (\varphi_i^\omega(Q) (\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) - \tilde{\varphi}_i^\omega(Q) G^1(P, Q)) d\gamma_{iQ} + \quad (3.11) \\ + \sum_{l_1} \int_{\Gamma_{l_1}} \frac{\psi_{l_1}^\omega(Q)}{\alpha_{l_1}(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{l_1Q} + \sum_{l_2} \int_{\Gamma_{l_2}} \frac{\psi_{l_2}^\omega(Q)}{\beta_{l_2}(Q)} (\sigma_{l_2} \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{l_2Q}, \nu = \begin{cases} 1, & P \in \Omega \setminus \Gamma, \\ 1/2, & P \in \Gamma. \end{cases}$$

Граничные значения функции  $U_i^\omega(Q)$  находятся как решение системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$U_i^\omega(P) - \sum_{i=N_1+1}^N \sum_{j \in J_{\gamma_i \cap \gamma_j}} \int U_i^\omega(Q) ((\sigma_j - \sigma_i) \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) d\gamma_{iQ} = -\frac{1}{2} \varphi_i^\omega(P) + \\ + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} \Phi_i^\omega(Q) G^1(P, Q) d\Omega_{iQ} + \sum_{i=1}^N \int_{\gamma_i} (\varphi_i^\omega(Q) (\sigma_i \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}_Q) - \tilde{\varphi}_i^\omega(Q) G^1(P, Q)) d\gamma_{iQ} + \\ + \sum_{l_1} \int_{\Gamma_{l_1}} \frac{\psi_{l_1}^\omega(Q)}{\alpha_{l_1}(Q)} G^1(P, Q) d\Gamma_{l_1Q} + \sum_{l_2} \int_{\Gamma_{l_2}} \frac{\psi_{l_2}^\omega(Q)}{\beta_{l_2}(Q)} (\sigma_{l_2} \bar{\nabla} G^1(P, Q), \mathbf{n}) d\Gamma_{l_2Q}, \quad (3.12)$$

где  $P \in \gamma_l, l \in J_k, k = \overline{N_1 + 1, N}, Q \in \gamma_j, j \in J_i, i = \overline{N_1 + 1, N}$ .

Функция Грина вмещающего пространства - есть решение задачи с меньшим, чем  $N$  числом  $N_1$  кусочно-анизотропных подобластей:

$$\operatorname{div}(\sigma_i \nabla G_i^1(P, Q)) - \kappa_i G_i^1(P, Q) = -\delta(P - Q), P(x, y, z) \in \Omega_i, i = \overline{1, N_1}, N_1 \leq N, \kappa_i = a_i + \omega b_i^2 + \omega^2 c_i^2; \quad (3.13)$$

$$G_i^1(P, Q) - G_j^1(P, Q)|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0, (\sigma_i \nabla G_i^1(P, Q), \mathbf{n}) - (\sigma_j \nabla G_j^1(P, Q), \mathbf{n})|_{\gamma_i \cap \gamma_j} = 0, i = \overline{1, N_1}, j \in J_i; \quad (3.14)$$

$$\alpha_i(P)(\sigma_i \nabla G_i^1(P, Q), \mathbf{n}) - \beta_i(P) G_i^1(P, Q)|_{P \in \Gamma_i} = 0, |\alpha_i(P)| + |\beta_i(P)| \neq 0, i = i_1, i_2, \dots, i_{k_1}, k_1 \leq k \leq N_1; \quad (3.15)$$

$$G_m^1(P, Q) \rightarrow 0, P \rightarrow \infty, m = m_1, m_2, \dots, m_{n_1}, n_1 \leq n \leq N_1. \quad (3.16)$$

К задаче (3.1)-(3.5) в пространстве образов преобразования Лапласа может быть применен алгоритм пересчета функций Грина с уменьшением количества подобластей, как и в стационарном случае. Алгоритм описан в части 2.

Восстановление решения исходной задачи (3.1)-(3.5) производится по формуле обращения (3.6) преобразования Лапласа. Квадратурные узлы и квадратурные коэффициенты формулы численного обращения приведены в [3].

Часто задачу (3.1)-(3.5) формулируют для возмущений поля - отклонений поля от заданного распределения, полагая нулевыми начальные возмущения ( $\tau_i(P) = 0, \mu_i(P) = 0$ ) и однородными граничные условия (3.2)-(3.3) ( $\varphi_i(P, t) = 0, \tilde{\varphi}_i(P, t) = 0, \psi_i(P, t) = 0$ ). Это упрощает расчетные формулы (3.11) и (3.12) - в них будут отсутствовать объемные интегралы по областям  $\Omega_i$  и граничные интегралы по участкам внешней границы  $\Gamma$ .

Для прямых задач о распространении физических полей в кусочно-анизотропных средах, математическая модель которых задается начально-краевой задачей параболического типа, алгоритм и расчетные формулы (3.11) и (3.12) будут иметь место. В них следует положить коэффициенты  $c_i = 0, i = \overline{1, N}$ . Это изменит функции  $\Phi_i^\omega(P) = b_i^2 \tau_i(P) + f^\omega(P)$  - в них исчезнет зависимость от скорости физической величины в начальный момент времени - функции  $\mu_i(P)$ . Коэффициенты  $\kappa_i$  в подобластях  $\Omega_i$  в задачах (3.1)-(3.5) и (3.7)-(3.10) при этом будут иметь вид  $\kappa_i = a_i + \omega b_i^2$ .

Как частный случай могут быть получены формулы расчета стационарных полей в кусочно-анизотропных средах, выведенные в ч.2 статьи, если в формулах (3.11) и (3.12) положить  $b_i = 0, c_i = 0, i = \overline{1, N}$ .

Более того, если математическая модель задачи распространения физического поля в кусочно-анизотропной среде с симметричными положительно определенными тензорами представлена начально-краевой задачей смешанного типа, т.е. когда расчетная область  $\Omega$  разбивается на три группы подобластей, в первой из которых тип уравнений эллиптический, во второй - параболический, а в третьей - гиперболический, то приведенные выше алгоритм и расчетные формулы остаются верными. В этом случае в расчетных формулах в каждой подобласти необходимо обнулить свой набор коэффициентов  $a_i, b_i, c_i$ .

## 4. Выводы

Рассмотрен класс математических моделей с кусочно-постоянными функциональными коэффициентами в уравнениях эллиптического, параболического, гиперболического и смешанного типов, описывающих различные по своей природе поля в кусочно-анизотропных средах, широко используемые в физике. Для решения задач предложен единый подход, основанный на методах интегральных представлений и интегральных уравнений, допускающий построение рекуррентных алгоритмов и рекурсивных процедур пересчета функций Грина с уменьшением количества подобластей разбиения исследуемой области. Единство подхода к решению разных по типу задач позволяет использовать единый программный комплекс вычисления физических полей различной природы. При комплексировании физических методов это позволит сократить затраты на вычисления.

Алгоритмы распараллеливаются, что существенно при решении прямых и особенно обратных вариационных (на основе прямых) задач высокой вычислительной трудоемкости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кризский В.Н. О способе вычисления геофизических полей в кусочно-однородных средах // Физика Земли. 2009. №10. – 25-37 с.
2. Дёч Г. Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука. 1971. – 288 с.
3. Крылов В.И., Шульгина Л.Т. Справочная книга по численному интегрированию. М.: Наука. 1966. –370 с.

# Method of Calculation of Potential Physical Fields in Piecewise Anisotropic Media

© V .N. Krizsky<sup>4</sup>, N. V. Tregubov<sup>5</sup>, R. R. Yamatov<sup>6</sup>

**Abstract.** On the base of recalculation of Green function to another more simple one recurrent algorithms for solution 3D problem for potential physical fields in piecewise anisotropic media were build. The method for problem with different equations of elliptic, parabolic, hyperbolic, and mixed type allows us to complex different physical investigations. Algorithms can be vectorize and realize for multiprocess system.

**Key Words:** potential physical field, boundary problem, integral presentation and integral transformation method, Green function.

---

<sup>4</sup>Head of programming and economic informatics Chair, Bashkortostan State University, Ufa; krizsky@bsunet.ru

<sup>5</sup>Assistant Chair of mathematical modelling, Sterlitamak State Pedagogical Academy, Sterlitamak; nikolay\_fmf@mail.ru

<sup>6</sup>Assistant Chair of mathematical modelling, Sterlitamak State Pedagogical Academy, Sterlitamak; yamatovRim@yandex.ru