О параметрических решениях дифференциальных уравнений с частными производными; приложения в трансзвуковой газовой динамике.

© П. А. Вельмисов[1], Ю. А. Казакова[2]

Аннотация. В работе предложен метод построения параметрических решений дифференциальных уравнений с частными производными. На основе этого метода построены параметрические решения трансзвукового уравнения, проведена их классификация и указаны приложения для решения конкретных физических задач. В частности, получены решения простых волн и построены решения, описывающие течения газа с местными сверхзвуковыми зонами в соплах Лаваля.

Ключевые слова: трансзвуковая газовая динамика, дифференциальные уравнения в частных производных, параметрические решения.

1. Описание метода построения параметрических решений

Рассматривается система дифференциальных уравнений с частными производными

$$F_k(x_1,...,x_m,u_1,...,u_n,u_{1x_1},...,u_{nx_1},...,u_{1x_m},...,u_{nx_m})=0,\ k=1\div n, \tag{1.1}$$

где $u_k(x_1,...,x_m)$ функции m переменных $x_1, x_2,..., x_m$. При переходе к новым переменным $\xi_1,\xi_2,...,\xi_m$, которые являются функциями переменных $x_1, x_2,..., x_m$, решение системы (1.1) отыскивается в следующем виде

$$u_k=U_k(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m),\ k=1\div n;\qquad x_l=X_l(\xi_1,\xi_2,...,\xi_m),\ l=1\div m, \tag{1.2}$$

Частные производные $\dfrac{\partial u_k}{\partial x_l}$ находятся по формулам

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_l}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial U_k}{\partial \xi_j}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_l},\qquad \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l}=\frac{\Delta_{jl}}{\Delta},\qquad \Delta=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \cdots\dfrac{\partial X_1}{\partial \xi_m}\\ \cdots & \cdots\\ \dfrac{\partial X_m}{\partial \xi_1} & \cdots\dfrac{\partial X_m}{\partial \xi_m}\end{vmatrix}\neq 0 \tag{1.3}$$

где Δ_{jl} - определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца на столбец с нулевыми элементами, кроме элемента с номером l, равным единице. Тогда система уравнений (1.1) преобразуется к виду

$$F_k(\xi_1,...,\xi_m,X_1,...,X_m,X_{1\xi_1},...X_{m\xi_m},U_1,...,U_n,U_{1\xi_1},...U_{n\xi_m})=0. \tag{1.4}$$

В системе (1.4) $U_k(k=1\div n)$, $X_l(l=1\div m)$ являются функциями переменных $\xi_1,\xi_2,...,\xi_m$. Решение полученной системы уравнений можно искать в виде многочленов

$$\begin{aligned}U_k&=\sum_{i=0}^{\alpha_k}u_{ki}(\xi_1,...,\xi_{s-1},\xi_{s+1},...\xi_m)\xi_s^i,\ k=1\div n,\ s=1\div m\\ X_l&=\sum_{j=0}^{\gamma_l}x_{lj}(\xi_1,...,\xi_{s-1},\xi_{s+1},...\xi_m)\xi_s^j,\ l=1\div m,\ s=1\div m\end{aligned} \tag{1.5}$$

[1]Заведующий кафедры высшей математики, профессор, д.ф.-м.н., Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru

[2]Аспирант кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; sunwave@inbox.ru

где $\alpha_k, \gamma_l \in N$ (N - множество натуральных чисел). Задача состоит, в частности, в определении параметров $\alpha_k, \gamma_l \in N$, для которых система дифференциальных уравнений для $u_{ki}(\xi_1, ...\xi_{m-1})$, $x_{lj}(\xi_1, ...\xi_{m-1})$ является определенной или недоопределенной.

Рассмотрим частный случай, когда искомые функции зависят от координат x, y и времени t:

$$F_k(x, y, t, u_1, ..., u_n, u_{1x}, ..., u_{nx}, u_{1y}, ..., u_{ny}, u_{1t}, ..., u_{nt}) = 0,\ k = 1 \div n \tag{1.6}$$

Для этого случая решение удобно искать в виде

$$u_k = U_k(\xi, \eta, t),\ k = 1 \div n, \quad x = X(\xi, \eta, t), \quad y = Y(\xi, \eta, t) \tag{1.7}$$

Тогда формулы перехода к новым переменным следующие

$$\begin{gathered} u_{kx} = \frac{U_{k\xi}Y_\eta - U_{k\eta}Y_\xi}{\Delta},\ u_{ky} = \frac{U_{k\eta}X_\xi - U_{k\xi}X_\eta}{\Delta}, \\ u_{kt} = U_{kt} + \frac{U_{k\xi}(Y_tX_\eta - Y_\eta X_t) + U_{k\eta}(Y_\xi X_t - Y_tX_\xi)}{\Delta}, \end{gathered} \tag{1.8}$$

где $\Delta = X_\xi Y_\eta - X_\eta Y_\xi \neq 0$. Система уравнений (1.6) преобразуется к виду

$$F_k(\xi, \eta, t, X, Y, X_\xi, X_\eta, X_t, Y_\xi, Y_\eta, Y_t, U_1, ..., U_n, U_{1\xi}, ..., U_{nt}) = 0 \tag{1.9}$$

В этой системе $X, Y, U_k (k = 1 \div n)$ являются функциями переменных ξ, η, t. Решение системы (1.9) можно искать в виде многочленов по степеням η:

$$U_k = \sum_{i=0}^{\alpha_k} u_{ki}(\xi, t)\eta^i,\ X = \sum_{k=0}^{\gamma} x_k(\xi, t)\eta^k,\ Y = \sum_{k=0}^{\omega} y_k(\xi, t)\eta^k, \tag{1.10}$$

где $\alpha_k, \gamma, \omega \in N$. Для некоторых типов уравнений (например, для квазилинейных уравнений первого порядка, коэффициенты в которых являются многочленами относительно зависимых и независимых переменных) несложно получить соотношения для параметров $\alpha_k, \gamma, \omega \in N$, позволяющие выяснить, при каких значениях $\alpha_k, \gamma, \omega \in N$ система дифференциальных уравнений для $x_k(\xi, t)$, $y_k(\xi, t)$, $u_{ki}(\xi, t)$ является определенной или недоопределенной, т.е. $s \geq r$, $s = r + j$, где s - число неизвестных функций, зависящих от ξ, t; r - число уравнений; j - степень недоопределенности. Если r_k - максимальная степень переменной η, возникающая в уравнении $F_k = 0 (k = 1 \div n)$) при подстановке в него выражений (1.10), то параметры s и r находятся следующим образом

$$r = \sum_{k=1}^{n} r_k + n, \qquad s = \gamma + \omega + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k + n + 2. \tag{1.11}$$

2. Применение метода к уравнениям трансзвуковой газовой динамики

Рассматривается трансзвуковое уравнение, описывающее неустановившиеся течения идеального газа:

$$\Phi_{tt} + 2\Phi_{xt} + \Phi_x\Phi_{xx} - \Phi_{yy} = 0, \tag{2.1}$$

где Φ - потенциал скорости.

Полагая в (2.1) $w = \Phi_t$, $u = \Phi_x$, $v = \Phi_y$, представим (2.1) в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} w_t + 2u_t + uu_x - v_y = 0, \\ u_y - v_x = 0, \\ u_t - w_x = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Считая u, v, w, x, y функциями параметров t, ξ, η, запишем систему (2.2) в параметрическом виде:

$$\begin{cases} w_t(x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi) + w_\xi(x_\eta y_t - y_\eta x_t) + w_\eta(y_\xi x_t - y_t x_\xi) + 2u_t(x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) + 2u_\xi(x_\eta y_t - y_\eta x_t) + \\ +2u_\eta(x_t y_\xi - y_t x_\xi) + u(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi) - (v_\eta x_\xi - v_\xi x_\eta) = 0, \\ (u_\eta x_\xi - u_\xi x_\eta) - (v_\xi y_\eta - v_\eta y_\xi) = 0, \\ u_t(x_\xi y_\eta - y_\xi x_\eta) + u_\xi(x_\eta y_t - x_t y_\eta) + u_\eta(y_\xi x_t - x_\xi y_t) - (w_\xi y_\eta - w_\eta y_\xi) = 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

Решение системы (2.3) отыскивается в виде многочленов по степеням η

$$\begin{aligned} &u = \sum_{k=0}^{\alpha} U_k(\xi,t)\eta^k,\ v = \sum_{k=0}^{\beta} V_k(\xi,t)\eta^k,\ w = \sum_{k=0}^{\theta} W_k(\xi,t)\eta^k, \\ &x = \sum_{k=0}^{\gamma} X_k(\xi,t)\eta^k,\ y = \sum_{k=0}^{\omega} Y_k(\xi,t)\eta^k. \end{aligned} \tag{2.4}$$

где $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \omega$ - натуральные числа. При подстановке выражений (2.4) в систему (2.3) получим следующие максимальные степени переменной η:

$$\begin{cases} J_1 = \theta + \gamma + \omega - 1, J_2 = 2\alpha + \omega + \alpha - 1, J_3 = 2\alpha + \omega - 1, J_4 = \beta + \gamma - 1, \\ J_5 = \alpha + \gamma - 1, J_6 = \beta + \omega - 1, \\ J_7 = \alpha + \gamma + \omega - 1, J_8 = \theta + \gamma - 1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Параметры J_1, J_2, J_3, J_4 соответствуют первому уравнению системы (2.3), J_5, J_6 - второму уравнению (2.3), J_7, J_8 - третьему уравнению (2.3).Число коэффициентов в (2.4) равно $r = \alpha + \beta + \theta + \gamma + \omega + 5$, а число уравнений в системе (2.3) определяется соотношением: $s = I_1 + I_2 + I_3 + 3$, где $I_1 = max(J_1, J_2, J_3, J_4)$, $I_2 = max(J_5, J_6)$, $I_3 = max(J_7, J_8)$. Максимальные значения I_1, I_2, I_3 можно выбрать 16 способами.

После применения описанной в [1] программы получены возможные значения переменных $\alpha, \beta, \theta, \gamma, \omega \in N$, для которых система уравнений будет определенной или недоопределенной ($j = r - s \geq 0$, где j - степень недоопределенности). В таблице 1 приведены допустимые значения параметров со степенью недоопределенности $j = 3$ и $j = 4$.

Заметим, что решения с $\gamma = 1$, $\omega = 0$ являются решениями степенного вида по переменной x с коэффициентами, зависящими от y, t. В качестве примера рассмотрим вариант 21: $\alpha = 2$, $\beta = \theta = 3, \gamma = 1$, $\omega = 0$. Решение будет иметь вид:

$$u = \sum_{k=0}^{2} U_k(y,t)x^k,\ v = \sum_{k=0}^{3} V_k(y,t)x^k,\ w = \sum_{k=0}^{3} W_k(y,t)x^k.$$

Этому решению системы (2.2) соответствует решение $\Phi(x,y,t) = \sum_{k=0}^{3} \Phi_k(y,t)x^k$ уравнения (2.1), при этом функции Φ_0, Φ_1, Φ_2, Φ_3 удовлетворяют нелинейной системе дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \Phi_{3yy} - \Phi_{3tt} = 18\Phi_3^2, \\ \Phi_{2yy} - \Phi_{2tt} - 18\Phi_3\Phi_2 = 6\Phi_{3t}, \\ \Phi_{1yy} - \Phi_{1tt} - 6\Phi_3\Phi_1 = 4\Phi_{2t}, \\ \Phi_{0yy} - \Phi_{0tt} = 2\Phi_{1t} + 2\Phi_1\Phi_2, \end{cases}$$

N	α	β	θ	γ	ω	j	N	α	β	θ	γ	ω	j
1	0	0	0	1	0	3	14	0	1	0	0	1	3
2	0	0	1	1	0	3	15	1	1	1	0	1	3
3	0	1	1	1	0	4	16	1	2	1	0	1	3
4	0	2	2	2	0	3	17	0	2	2	1	0	3
5	1	0	1	0	1	3	18	1	3	3	1	0	3
6	1	1	2	1	0	3	19	2	4	4	1	0	3
7	1	2	2	1	0	4	20	1	2	1	2	0	3
8	1	3	3	2	0	3	21	2	3	3	1	0	3
9	2	4	4	2	0	3	22	2	4	3	1	0	3
10	0	1	2	1	0	3	23	0	1	0	1	0	3
11	1	2	3	1	0	3	24	0	2	1	1	0	3
12	2	3	4	1	0	3	25	1	3	2	1	0	3
13	0	0	0	0	1	3							

Таблица 1: допустимые значения параметров со степенью недоопределенности $j = 3$ и $j = 4$.

Если $\Phi_3 = 0$, $\Phi_2 = const$, то решение описывает течения газа в соплах Лаваля с постоянным ускорением потока $\Phi_{xx} = 2a = const$. При этом функции Φ_0, Φ_1 находятся из линейной системы уравнений

$$\begin{cases} \Phi_{1yy} - \Phi_{1tt} = 0, \\ \Phi_{0yy} - \Phi_{0tt} = 2\Phi_{1t} + 2a\Phi_1. \end{cases}$$

общие решения которых несложно записать.

Решения с $\omega = 1$ имеют степенной вид по переменной y. Например, можно показать, что существуют решения типа «простая волна»

$$v = v_0(u), w = w_0(u), x = x_0(u) + x_1(u)y + x_2(u)t. \tag{2.6}$$

Подставляя (2.6) в (2.3) и полагая $y = \eta$, $\xi = u$, для функций $x_0(u)$, $x_1(u)$, $x_2(u)$, $v_0(u)$, $w_0(u)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = -{v_0}', \\ x_2 = -w_0', \\ (w_0')^2 - (v_0')^2 + 2w_0' + u = 0, \end{cases}$$

в которой одна из функций $v_0(u)$, $w_0(u)$ может быть выбрана произвольно. Произвольной также является функция $x_0(u)$.

3. Трансзвуковые течения газа с местными сверхзвуковыми зонами в соплах Лаваля.

Неустановившиеся «медленные» околозвуковые плоские течения идеального газа описываются системой уравнений

$$2u_\tau + uu_x - v_y = 0, \qquad u_y = v_x. \tag{3.1}$$

Здесь u, v - проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат x, y; τ -время. Рассмотрим для системы уравнений (3.1) следующий класс решений:

$$\begin{array}{ll} u = e^{2n\tau}u_*(x_*, y_*, \tau) + 2\lambda'(\tau), & v = e^{3n\tau}v_*(x_*, y_*, \tau) + \frac{4}{\omega+1}\lambda''(\tau)y, \\ x_* = [x - \lambda(\tau)]e^{-2n\tau}, & y_* = ye^{-n\tau}. \end{array} \tag{3.2}$$

Для (3.2) существуют решения, описывающие течения с местными сверхзвуковыми зонами. Они имеют вид (запишем их сразу в физических переменных x, y, τ)

$$\begin{array}{ll} u = me^{2n\tau}U(\xi, \tau) + 4c^2y^2 + 2\lambda'(\tau), & x = m\xi e^{2n\tau} + cy^2 + \lambda(\tau), \\ v = 2cme^{2n\tau}(4c\xi - U)y + \frac{16}{\omega+3}c^3y^3 + \frac{4}{\omega+1}\lambda''(\tau)y. & \end{array} \tag{3.3}$$

Здесь m, c, n - произвольные постоянные, $\lambda(\tau)$ - произвольная функция, $\omega = 0$ для плоских и $\omega = 1$ для осесимметричных течений.

После перехода к переменным (τ, ξ, y) система (3.1) запишется

$$\begin{cases} 2(u_\tau x_\xi - u_\xi x_\tau) + uu_\xi - v_y x_\xi + v_\xi x_y = 0, \\ u_y x_\xi - u_\xi x_y - v_\xi = 0. \end{cases}$$

Тогда для функции $U(\tau, \xi)$ получим уравнение

$$2U_\tau + (U - 4n\xi)U_\xi + 2[2n + (\omega+1)c]U - 8(\omega+1)c^2\xi = 0. \tag{3.4}$$

Рассмотрим автомодельный случай $U = U(\xi)$. Для U имеем тогда обыкновенное дифференциальное уравнение, в которое входят два произвольных параметра c и n. Поведение интегральных кривых в этом случае зависит от значений величин λ_1, λ_2 :

$$\lambda_k = q_k - 4n, \qquad q_{1,2} = (-\omega - 1 \pm (\omega^2 + 10\omega + 9)^{0.5})c.$$

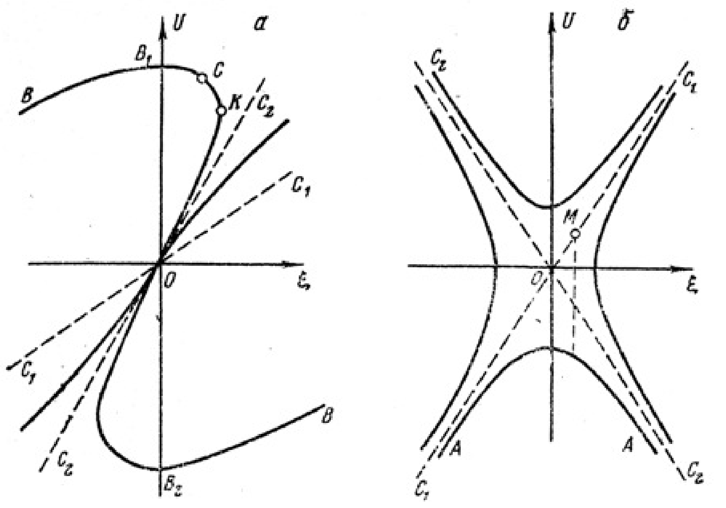

Рисунок **3.1**

Если λ_1, λ_2 различные и одного знака, то в начале координат плоскости (U, ξ) имеем особую точку типа узел (Рис. 3.1, а), если разных знаков – седло (Рис. 3.1, б); если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, то имеем вырожденный узел; в случае, когда одна из величин λ_k (или обе) равна нулю, решение на плоскости (U, ξ) изображается параллельными прямыми. Решения, которые изображаются прямыми, проходящими через особую точку (им соответствуют пунктирные прямые), имеют вид

$$U = q_1\xi, \qquad U = q_2\xi.$$

В плоском случае $(\omega = 0)$ $q_1 = -4c$, $q_2 = 2c$.

В случае узла кривые касаются в особой точке прямой $U = q_1\xi$, если $|\lambda_1| < |\lambda_2|$, и прямой $U = q_2\xi$, если $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. В случае, когда $\lambda_1 \neq \lambda_2$, решение уравнения (3.4) записывается в виде:

$$(U - q_1\xi)^{-\lambda_1}(U - q_2\xi)^{-\lambda_2} = A = const \tag{3.5}$$

или в параметрической форме

$$U = \frac{q_2}{q_2 - q_1}\eta + q_1 B\eta^{\chi}, \qquad \xi = \frac{1}{q_2 - q_1}\eta + B\eta^{\chi}, \qquad \chi = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}. \tag{3.6}$$

В формулах (3.5)-(3.6) A и B - произвольные постоянные. Уравнение звуковой линии имеет вид (взяли $m = 1$)

$$y^2 = -\frac{\lambda'(\tau)}{2c^2} - \frac{1}{4c^2}e^{2n\tau}U(\eta), \qquad x = -\frac{\lambda'(\tau)}{2c^2} + e^{2n\tau}(\xi(\eta) - \frac{1}{4c}U(\eta)) \tag{3.7}$$

Из первой формулы (3.7) ясно, что звуковую линию можно построить при $c \neq 0$. Анализируя поведение интегральных кривых на Рис.3.1 и учитывая первую формулу (3.3), приходим к выводу, что кривые AA и C_1OC_2, изображенные на Рис.3.1,б, при $c \neq 0$ могут описывать течения с местными сверхзвуковыми зонами в соплах Лаваля. Формулы (3.7) дают ясное представление об изменении звуковых линий с течением времени. При $n > 0$ (и соответствующей функции $\lambda(\tau)$), как видно из (3.7), решения описывают процесс «затухания» местных сверхзвуковых зон в соплах Лаваля, при $n < 0$ наблюдается развитие местных сверхзвуковых зон.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК N1122.

Список литературы

1. Vel'misov, P.A. Some klasses of the solutions of aerohydromechanic equations // P.A.Velmisov, M.D.Todorov, J.A.Kazakova. - Applications of Mathematics in Engineering and Economics. - Soft trade, Sofia, Bulgaria, 2008, p.427-441.

2. Рыжов О.С. О работе сопел Лаваля в нерасчетных режимах. Ж.выч., матем. и матем. физ., 1967, т.7, №4.

3. Вельмисов П.А. Неустановившееся движение газа в сопле Лаваля. В сб.: Аэродинамика. Изд-во Саратовск. ун-та, вып. 2, 1973.

About parametric solutions of partial differential equations; applications to transonic gas dynamics.

© P. A. Velmisov[3], J. A. Kazakova[4]

Abstract. In this work the method of constructing of the parametric solutions of partial differential equations is offered. The parametric solutions of transonic gas dynamic equation are constructed in terms of this method, their classification is carried, and the applications are showed for solutions of specific physic problems. Particularly, the solutions of simple wave are derived, and the solutions, describing gas flows with local supersonic zones in Laval nozzles, are constructed.

Key Words: Transonic gas dynamics, Partial differential equations, Parametric solutions.

[3]Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

[4]Postgraduate student of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; sunwave@inbox.ru