УДК 519.6:517.962

Разностные аналоги некоторых мультипликативных неравенств О.А. Ладыженской для функциональных пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $W_{2,0}^2(\Omega)$

© Ф.В. Лубышев[1], М.Э. Файрузов[2]

Аннотация. Даются доказательства ряда мультипликативных неравенств для пространств сеточных функций $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\overline{\omega})$, $W_{2,0}^2(\overline{\omega})$, заданных на сетке $\overline{\omega} \subset \overline{\Omega}$, которые являются сеточными аналогами некоторых мультипликативных неравенств О.А. Ладыженской для пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $W_{2,0}^2(\Omega)$.

Ключевые слова: сетка, сеточная функция, конечные разности, теорема вложения.

1. Введение

При исследовании краевых задач, задач оптимального управления, обратных задач для уравнений математической физики, чрезвычайно большую роль играет теория вложения функциональных пространств [1]-[4]. При этом наиболее тонкие зависимости между функциональными пространствами $W_p^l(\Omega$, $L_q(\Omega)$, $C^m(\Omega)$ отражают так называемые "мультипликативные"неравенства [2]-[4]. Проблема численного решения прямых и обратных задач, задач оптимального управления для уравнений математической физики, приводит к необходимости их конечномерных аппроксимаций методом сеток или методом конечных элементов [5]-[10]. При этом, при исследовании сходимости и точности аппроксимаций, наряду с теоремами вложения Соболева и мультипликативными неравенствами для пространств функций непрерывного аргумента, чрезвычайна большую роль играют их разностные аналоги.

Здесь мы дадим доказательства ряда мультипликативных неравенств для пространств сеточных функций $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)$, $W_{2,0}^2(\omega)$, заданных на сетке $\overline{\omega} \subset \overline{\Omega}$, которые являются сеточными аналогами некоторых мультипликативных неравенств О.А. Ладыженской для пространств $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $W_{2,0}^2(\Omega)$ функций непрерывного аргумента. Установленные в работе разностные аналоги мультипликативных неравенств и следствия из них могут найти широкое приложение при доказательстве центральных положений о разрешимости и единственности решения сеточных краевых задач, обосновании сходимости и точности разностных аппроксимаций уравнений математической физики, обратных задач и задач оптимального управления для уравнений математической физики, сходимость итерационных процессов.

[1]Профессор кафедры вычислительной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; v.lubyshev@mail.ru.

[2]Доцент кафедры вычислительной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

2. Некоторые обозначения и вспомогательные утверждения

Для функций $u(x)$ непрерывного аргумента, заданных в $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, введем полунормы и нормы Соболева [1]-[4]:

$$|u|_{W_2^s(\Omega)} = \left[\int\limits_{\Omega} \sum_{s_1+s_2=s} \left(\frac{\partial^s u}{\partial x_1^{s_1} \partial x_2^{s_2}} \right)^2 dx_1 dx_2 \right]^{1/2},$$

$$|u|_{W_2^0(\Omega)} = \|u\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \|u\|^2_{W_2^s(\Omega)} = \sum_{k=0}^{s} |u|^2_{W_2^k(\Omega)}.$$

Здесь символом $|u|_{W_2^s(\Omega)}$ обозначена полунорма в $W_2^s(\Omega)$, $s > 0$.

В частности, нормы в $W_2^1(\Omega)$ и $W_2^2(\Omega)$ определяются равенствами

$$\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{\alpha=1}^{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 + u^2 \right] dx_1 dx_2,$$

$$\|u\|^2_{W_2^2(\Omega)} = |u|^2_{W_2^2(\Omega)} + \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)}, \qquad |u|^2_{W_2^2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \sum_{\alpha,\beta=1} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)^2 dx_1 dx_2.$$

Через $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, как обычно, мы обозначаем подпространство пространства $W_2^1(\Omega)$, плотным множеством в котором является совокупность $\overset{\bullet}{C}{}^\infty(\Omega)$ всех бесконечно дифференцируемых финитных в Ω функций. Через $W_{2,0}^2(\Omega)$ обозначаем подпространство пространства $W_2^2(\Omega)$, плотным множеством в котором являются все дважды непрерывно дифференцируемые в $\overline{\Omega}$ функции, равные нулю на $\partial\Omega$ – границе области Ω. Пусть $\overline{\Omega}$ – прямоугольник $\overline{\Omega} = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1,2 \right\}$ с границей $\Gamma = \partial\Omega$. В данном случае $W_{2,0}^2(\Omega)$ совпадает с $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. В дальнейшем нам понадобятся сетки на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1,2$ и прямоугольнике $\overline{\Omega} = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_\alpha \le l_\alpha, \alpha = 1,2 \right\}$: $\overline{\omega}_\alpha = \left\{ x_\alpha^{i_\alpha} = i_\alpha h_\alpha \in [0, l_\alpha] : i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha \right\}$, $\omega_\alpha = \overline{\omega}_\alpha \cap (0, l_\alpha)$, $\omega_\alpha^+ = \overline{\omega}_\alpha \cap (0, l_\alpha]$, $\omega_\alpha^- = \overline{\omega}_\alpha \cap [0, l_\alpha)$, $\alpha = 1,2$; $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2$, $\omega = \omega_1 \times \omega_2$; $\gamma = \overline{\omega} \setminus \omega$, $\overset{\circ}{\gamma} = (\overline{\omega}_1 \setminus \omega_1) \times (\overline{\omega}_2 \setminus \omega_2)$ – множество угловых точек прямоугольника $\overline{\Omega}$, $\gamma_{\pm\alpha} = \left\{ x \in \gamma \setminus \overset{\circ}{\gamma} : \cos(n, x_\alpha) = \pm 1 \right\}$, $\alpha = 1,2$, где n – внешняя нормаль к границе $\Gamma = \partial\Omega$; $\gamma_\alpha = \gamma_{-\alpha} \cup \gamma_{+\alpha}$, $\alpha = 1,2$; $\omega^{(\pm 1)} = \omega_1^\pm \times \overline{\omega}_2$, $\omega^{(\pm 2)} = \overline{\omega}_1 \times \omega_2^\pm$, $\omega^+ = \omega_1^+ \times \omega_2^+$, $\omega^- = \omega_1^- \times \omega_2^-$.

Введем также средний шаг сетки $\overline{\omega}_\alpha$: $\hbar_\alpha = \hbar(x_\alpha) = h_\alpha$, если $x \in \omega_\alpha$ и $\hbar_\alpha = 0.5 h_\alpha$, если $x_\alpha = 0, l_\alpha$, $\alpha = 1,2$.

Для функций $y(x)$, заданных на сетке $\overline{\omega}$ или на ее частях $\omega_* \subset \overline{\omega}$ будем использовать следующие обозначения:

$$y = y(x) = y(x_1, x_2), \qquad y^{(\pm 1_1)}(x) = y(x_1 \pm h_1, x_2), \qquad y^{(\pm 1_2)}(x) = y(x_1, x_2 \pm h_2);$$

$$y_{x_\alpha} = y_{x_\alpha}(x) = \frac{y^{(+1_\alpha)} - y}{h_\alpha} = D_\alpha y, \qquad y_{\overline{x}_\alpha} = y_{\overline{x}_\alpha}(x) = \frac{y - y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha} = \overline{D}_\alpha y.$$

Это правые и левые разностные отношения по x_α, $\alpha = 1,2$;

$$y_{\overline{x}_\alpha x_\alpha} = y_{\overline{x}_\alpha x_\alpha}(x) = \frac{y^{(+1_\alpha)} - 2y + y^{(-1_\alpha)}}{h_\alpha^2} = D_\alpha \overline{D}_\alpha y, \qquad \alpha = 1,2.$$

Множество сеточных функций, заданных на сетке $\overline{\omega}$ будем обозначать через H_h, а его подмножество, состоящее из сеточных функций, обращающихся в нуль на γ_h – через $\overset{\circ}{H}_h$.

Введем сеточные аналоги градиента

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$$

с помощью соотношений

$$\overset{(+)}{\nabla} y = (D_1 y, D_2 y) = (y_{x_1}, y_{x_2}), \qquad \overset{(-)}{\nabla} y = (\overline{D}_1 y, \overline{D}_2 y) = (y_{\overline{x}_1}, y_{\overline{x}_2}),$$

а также следующие операторы сеточного дифференцирования Λ_α второй производной по направлению x_α, $\alpha = 1, 2$ и Λ – пятиточечный разностный оператор Лапласа

$$\Lambda_\alpha y = D_\alpha \overline{D}_\alpha y = y_{\overline{x}_\alpha x_\alpha}, \qquad \alpha = 1, 2,$$

$$\Lambda y = \Lambda_1 y + \Lambda_2 y = \sum_{\alpha=1}^{2} D_\alpha \overline{D}_\alpha y = \sum_{\alpha=1}^{2} y_{\overline{x}_\alpha x_\alpha}.$$

Далее, обозначим

$$|\overset{(+)}{\nabla} y| = \left(y_{x_1}^2 + y_{x_2}^2\right)^{1/2}, \qquad |\overset{(-)}{\nabla} y| = \left(y_{\overline{x}_1}^2 + y_{\overline{x}_2}^2\right)^{1/2}.$$

Для сеточных функций, заданных на сетке $\overline{\omega}$ и ее частях введем следующие полунормы и нормы:

$$\|y\|_{C(\overline{\omega})} = \|y\|_{L_\infty(\overline{\omega})} = \max_{\overline{\omega}} |y(x)|, \qquad \|y\|_{L_2(\overline{\omega})}^2 = \sum_{\overline{\omega}} \hbar_1 \hbar_2 y^2(x),$$

$$\|y_{\overline{x}_1}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \overline{\omega}_2)}^2 = \sum_{\omega_1^+ \times \overline{\omega}_2} h_1 \hbar_2 y_{\overline{x}_1}^2(x), \qquad \|y_{\overline{x}_2}\|_{L_2(\overline{\omega}_1 \times \omega_2^+)}^2 = \sum_{\overline{\omega}_1 \times \omega_2^+} \hbar_1 h_2 y_{\overline{x}_2}^2(x),$$

$$|y|_{W_2^1(\overline{\omega})}^2 = \|y_{\overline{x}_1}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \overline{\omega}_2)}^2 + \|y_{\overline{x}_2}\|_{L_2(\overline{\omega}_1 \times \omega_2^+)}^2,$$

$$\|y\|_{W_2^1(\overline{\omega})}^2 = |y|_{W_2^1(\overline{\omega})}^2 + \|y\|_{L_2(\overline{\omega})}^2,$$

$$\|y_{\overline{x}_1 x_1}\|_{L_2(\omega_1 \times \overline{\omega}_2)}^2 = \|\Lambda_1 y\|_{L_2(\omega_1 \times \overline{\omega}_2)}^2 = \sum_{\omega_1 \times \overline{\omega}_2} h_1 \hbar_2 y_{\overline{x}_1 x_1}^2(x),$$

$$\|y_{\overline{x}_2 x_2}\|_{L_2(\overline{\omega}_1 \times \omega_2)}^2 = \|\Lambda_2 y\|_{L_2(\overline{\omega}_1 \times \omega_2)}^2 = \sum_{\overline{\omega}_1 \times \omega_2} \hbar_1 h_2 y_{\overline{x}_2 x_2}^2(x),$$

$$\|y_{\overline{x}_1 \overline{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2 = \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{\overline{x}_1 \overline{x}_2}(x),$$

$$|y|_{W_2^2(\overline{\omega})}^2 = \|y_{\overline{x}_1 x_1}\|_{L_2(\omega_1 \times \overline{\omega}_2)}^2 + \|y_{\overline{x}_2 x_2}\|_{L_2(\overline{\omega}_1 \times \omega_2)}^2 + 2\|y_{\overline{x}_1 \overline{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2,$$

$$\|y\|_{W_2^2(\overline{\omega})}^2 = |y|_{W_2^2(\overline{\omega})}^2 + \|y\|_{W_2^1(\overline{\omega})}^2.$$

Здесь $\|y\|_{C(\overline{\omega})}$ – дискретный аналог чебышевской нормы $\|y\|_{C(\Omega)}$; $\|y\|_{W_2^s(\overline{\omega})}$ – дискретные аналоги соболевских норм $\|y\|_{W_2^s(\Omega)}$, $s = 0, 1, 2$, а $|y|_{W_2^s(\overline{\omega})}$ – разностные аналоги полунорм $|y|_{W_2^s(\Omega)}$ в соболевских пространствах $W_2^s(\Omega)$, $s = 1, 2$.

Пусть теперь $\overset{\circ}{H}_h = \{y(x) : x \in \overline{\omega}, y(x) = 0, x \in \gamma\}$ – подмножество из H_h, состоящее из сеточных функций, обращающихся в нуль на $\gamma = \overline{\omega} \setminus \omega$. Для сеточных функций из множества $\overset{\circ}{H}_h$ введем скалярные произведения и нормы:

$$(y, v)_{L_2(\omega)} = \sum_{\omega} h_1 h_2 y(x) v(x), \qquad \|y\|_{L_2(\omega)}^2 = (y, y)_{L_2(\omega)} = \sum_{\omega} h_1 h_2 y^2(x), \tag{2.1}$$

$$\|y\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\overline{\omega})} = \|y\|^2_A = (Ay,y)_{L_2(\omega)} = \|y_{\overline{x}_1}\|^2_{L_2(\omega_1^+\times\omega_2)} + \|y_{\overline{x}_2}\|^2_{L_2(\omega_1\times\omega_2^+)},$$

$$\|y\|_{W^2_{2,0}(\overline{\omega})} = \|y\|^2_{A^2} = \|Ay\|^2_{L_2(\omega)} = \|y_{\overline{x}_1x_1} + y_{\overline{x}_2x_2}\|^2_{L_2(\omega)} = \|A_1y\|^2_{L_2(\omega)} + \|A_2y\|^2_{L_2(\omega)} +$$
$$+2\,(A_1y, A_2y)_{L_2(\omega)} = \|y_{\overline{x}_1x_1}\|^2_{L_2(\omega)} + \|y_{\overline{x}_2x_2}\|^2_{L_2(\omega)} + 2\|y_{\overline{x}_1\overline{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+\times\omega_2^+)}.$$

Здесь A – разностный оператор, определенный в пространстве $\overset{\circ}{H}_h$ формулами:

$$A = A_1 + A_2, \qquad A_\alpha y = -\Lambda y = -y_{\overline{x}_\alpha x_\alpha}, \qquad \alpha = 1,2.$$

Нетрудно убедиться, что разностные операторы A_1 и A_2 являются самосопряженными, положительно определенными и перестановочными в $\overset{\circ}{H}_h$ в смысле скалярного произведения (2.1): $A_\alpha = A_\alpha^* > 0$, $\alpha = 1,2$, и $A_1A_2 = A_2A_1$. Так что оператор $A = A_1 + A_2$ является самосопряженным и положительно определенным в $\overset{\circ}{H}_h$ в смысле скалярного произведения (2.1).

Кроме того, при определении нормы $\|y\|_{W^2_{2,0}(\overline{\omega})}$ мы негласно воспользовались тождеством

$$(A_1y, A_2y)_{L_2(\omega)} = \sum_{\omega} y_{\overline{x}_1x_1}y_{\overline{x}_2x_2}h_1h_2 = \sum_{\omega_1^+\times\omega_2^+} y_{\overline{x}_1\overline{x}_2}h_1h_2 = \|y_{\overline{x}_1\overline{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+\times\omega_2^+)},$$

в справедливости которого для $\forall y \in \overset{\circ}{H}_h$ можно убедиться, используя формулы суммирования по частям.

Заметим, что сеточная норма $\|y\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\overline{\omega})}$ отличается от стандартной сеточной нормы $\|y\|_{W^1_2(\overline{\omega})}$, определенной выше. Однако нетрудно убедиться, что эти сеточные нормы эквивалентны для функций, обращающихся в нуль на $\gamma_h = \overline{\omega}\setminus\omega$.

Действительно, так как для любой сеточной функции $y(x) \in \overset{\circ}{H}_h$ справедливо неравенство (разностный аналог неравенства Фридрихса)

$$\|y\|^2_{L_2(\omega)} \le C_\Omega^2\|y\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\overline{\omega})}, \qquad C_\Omega^2 = \left(\frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2}\right)^{-1}, \tag{2.2}$$

то как следствие из этого неравенства, получим, что в пространстве $\overset{\circ}{H}_h$ полунорма $|y|_{W^1_2(\overline{\omega})} \equiv \|y\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\overline{\omega})}$ определяет норму, эквивалентную норме $\|y\|_{W^1_2(\overline{\omega})}$, так как справедливы оценки

$$(1 + C_\Omega^2)^{-1}\|y\|^2_{W^1_2(\overline{\omega})} \le \|y\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\overline{\omega})} \le \|y\|^2_{W^1_2(\overline{\omega})}.$$

Кроме того, из (2.2) следует, что оператор A является положительно определенным:

$$(Ay,y)_{L_2(\omega)} = \|y\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\overline{\omega})} \ge C_\Omega^{-2}\|y\|^2_{L_2(\omega)}.$$

Заметим также, что сеточная норма $\|y\|_{W^2_2(\overline{\omega})}$ отличается от стандартной сеточной нормы $\|y\|_{W^2_2(\overline{\omega})}$, определенной выше. Однако нетрудно убедиться, что в пространстве $\overset{\circ}{H}_h$ сеточных функций, обращающихся в нуль на границе $\gamma_h = \overline{\omega}\setminus\omega$, полунорма $|y|_{W^2_2(\overline{\omega})} \equiv \|y\|_{W^2_{2,0}(\overline{\omega})}$ эквивалентна норме $\|y\|_{W^2_2(\overline{\omega})}$.

Действительно, можно показать, что справедлива оценка

$$\|y\|^2_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(\overline{\omega})} = |y|^2_{W^1_2(\overline{\omega})} \le \frac{l_1^2 + l_2^2}{8}\|y_{\overline{x}_1\overline{x}_2}\|^2_{L_2(\omega_1^+\times\omega_2^+)}. \tag{2.3}$$

Далее, применяя неравенство (2.2) к оценке неравенства (2.3), получим

$$C_\Omega^{-2}\|y\|^2_{L_2(\omega)} \le \frac{l_1^2+l_2^2}{8}\|y_{\overline{x}_1\overline{x}_2}\|^2_{L_2(\omega_1^+\times\omega_2^+)}. \tag{2.4}$$

Используя теперь неравенства (2.3), (2.4), после некоторых оценок, установим неравенство

$$\frac{16}{16+(l_1^2+l_2^2)(1+C_\Omega^2)}\|y\|^2_{W_2^2(\overline{\omega})} \le \|y\|^2_{W_{2,0}^2(\overline{\omega})} \le \|y\|^2_{W_2^2(\overline{\omega})}.$$

То есть для сеточных функций, заданных на сетке $\overline{\omega}=\overline{\omega}_1\times\overline{\omega}_2$ и обращающихся в нуль на γ_h, сеточные нормы $\|y\|_{W_{2,0}^2(\overline{\omega})}$ и $\|y\|_{W_2^2(\overline{\omega})}$ эквивалентны.

Вводя на множестве сеточных функций $\overset{\circ}{H}_h$ различные нормы $\|y\|_{L_2(\omega)}$, $\|y\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\overline{\omega})}$, $\|y\|_{W_{2,0}^2(\overline{\omega})}$, мы превратили это множество в нормированные пространства, которые обозначили через $L_2(\omega)$, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\overline{\omega})$, $W_{2,0}^2(\overline{\omega})$ соответственно.

Нетрудно видеть, что сеточную норму $\|y\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\overline{\omega})}$ в пространстве $\overset{\circ}{H}_h$ можно записать также в виде

$$\|y\|^2_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\overline{\omega})} = (Ay,y)_{L_2(\omega)} = \sum_{\alpha=1}^2 \|y_{\overline{x}_\alpha}\|^2_{L_2(\omega_1^+\times\omega_2^+)} = \|\overset{(-)}{\nabla} y\|^2_{L_2(\omega_1^+\times\omega_2^+)}.$$

3. Сеточные аналоги некоторых мультипликативных неравенств Ладыженской

Справедливы следующие лемма и следствие [2]:

Л е м м а 3.1. *Для любой функции $u(x)\in W_2^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, где Ω – открытая выпуклая ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, справедливо следующее мультипликативное неравенство Ладыженской*

$$\left(\int\limits_\Omega |\nabla u|^4 d\Omega\right)^{1/2} \le (2+\sqrt{2})\|u\|_{C(\overline{\Omega})}\left(\int\limits_\Omega \sum_{\alpha,\beta=1}^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)^2 d\Omega\right)^{1/2}, \tag{3.1}$$

где

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right), \qquad |\nabla u| = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2\right]^{1/2}.$$

С л е д с т в и е 3.1. *Имеет место неравенство*

$$\|\nabla u\|_{L_4(\Omega)} \le (2+\sqrt{2})^{1/2} C_0^{1/2}(\Omega)|u|_{W_2^2(\Omega)}, \qquad \forall u\in W_{2,0}^2(\Omega),$$

где

$$\|\nabla u\|^4_{L_4(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla u|^4 d\Omega; \qquad |u|^2_{W_2^2(\Omega)} \equiv \|u\|_{W_{2,0}^2(\Omega)} = \int\limits_\Omega \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\right)^2 d\Omega$$

– полунорма в Соболевском пространстве $W_2^2(\Omega)$, которая в пространстве $W_{2,0}^2(\Omega)$ эквивалентна стандартной норме $\|u\|_{W_2^2(\Omega)}$, $C_0(\Omega)=Const>0$ из хорошо известного утверждения [4]*: функции из $W_{2,0}^2(\Omega)$ суть непрерывные функции x, если размерность пространства $\mathbb{R}^n$ не более 3, причем для них справедливо неравенство*

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} \le C_0(\Omega)|u|_{W_2^2(\Omega)}, \qquad \forall u\in W_{2,0}^2(\Omega).$$

Справедливы следующие разностные аналоги леммы 3.1 и следствия 3.1.

Л е м м а 3.2. *Для любой сеточной функции* $y(x)$, *заданной на сетке* $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1,2\}$ *и обращающейся в нуль на границе* $\gamma = \overline{\omega} \setminus \omega$, *справедлив сеточный аналог мультипликативного неравенства* (3.1)

$$\left(\sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 |\overset{(-)}{\nabla} y|^4 \right)^{1/2} \leq 8 \|y\|_{C(\overline{\omega})} \|y\|_{W_{2,0}^2(\overline{\omega})},$$

где $\overset{(-)}{\nabla} y = (y_{\overline{x}_1}, y_{\overline{x}_2}) = (\overline{D}_1 y, \overline{D}_2 y)$ *– разностный аналог градиента* ∇u; $|\overset{(-)}{\nabla} y| = \left(y_{\overline{x}_1}^2 + y_{\overline{x}_2}^2\right)^{1/2}$;

$$\|y\|_{W_{2,0}^2(\overline{\omega})}^2 = \sum_{\omega_1 \times \omega_2} h_1 h_2 \left(y_{\overline{x}_1 x_1}^2 + y_{\overline{x}_2 x_2}^2\right) + 2 \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{\overline{x}_1 \overline{x}_2}^2$$

– сеточный аналог выражения

$$|u|_{W_2^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega \sum_{\alpha,\beta=1}^{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \right)^2 d\Omega \equiv \|u\|_{W_{2,0}^2(\Omega)}^2,$$

определяющего в Соболевском пространстве $W_2^2(\Omega)$ *полунорму, которая в пространстве* $W_{2,0}^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ *эквивалентна стандартной норме* $\|u\|_{W_2^2(\Omega)}$.

С л е д с т в и е 3.2. *Для любой сеточной функции* $y(x)$, *заданной на сетке* $\overline{\omega} \subset \overline{\Omega}$ *и обращающейся в нуль на границе* $\gamma = \overline{\omega} \setminus \omega$, *имеет место неравенство*

$$\| \overset{(-)}{\nabla} y \|_{L_4(\omega_1^+ \times \omega_2^+)} \leq 2\sqrt{2} C_1^{1/2}(\Omega) \|y\|_{W_{2,0}^2(\overline{\omega})},$$

где

$$\| \overset{(-)}{\nabla} y \|_{L_4(\omega_1^+ \times \omega_2^+)} = \left(\sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 |\overset{(-)}{\nabla} y|^4 \right)^{1/4},$$

а $C_1(\Omega) = Const > 0$ *из сеточного аналога неравенства* (2.3), *не зависящая от* y [5]:

$$\|y\|_{C(\overline{\omega})} \leq C_1(\Omega) \|y\|_{W_{2,0}^2(\overline{\omega})}, \qquad C_1(\Omega) = \frac{l_0^2}{2(l_1 l_2)^{1/2}}, \quad l_0 = \max\{l_1, l_2\}.$$

Справедливы следующие лемма и следствие [4]

Л е м м а 3.3. *Для любой функции* $u(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, *где* Ω *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^2$, *справедливы следующие мультипликативные неравенства Ладыженской*

$$\|u\|_{L_4(\Omega)}^4 \leq 4 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L_2(\Omega)} \leq 2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}^2, \tag{3.2}$$

где

$$\|u\|_{L_4(\Omega)} = \left(\int_\Omega u^4(x)\, d\Omega \right)^{1/4}.$$

С л е д с т в и е 3.3. *Имеет место неравенство*

$$\|u\|_{L_4(\Omega)} \leq \left(2\tilde{C}_\Omega^2\right)^{1/4} \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}, \qquad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega),$$

где Ω *– ограниченная область в* $\mathbb{R}^2$, *а* $\tilde{C}_\Omega = Const > 0$ *(зависящая лишь от области* Ω *) из неравенства Фридрихса*

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \tilde{C}_\Omega^2 \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)}^2, \qquad \forall u \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega).$$

Справедливы следующие разностные аналоги леммы 3.3 и следствия 3.3.

Л е м м а 3.4. *Для любой сеточной функции* $y(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\overline{\omega})$, *заданной на двумерной сетке* $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega} = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\right\}$, *имеют место следующие сеточные аналоги мультипликативных неравенств* (3.2)

$$\|y\|_{L_4(\omega)}^4 \leq 4\|y\|_{L_2(\omega)}^2 \|y_{\overline{x}_1}\|_{L_2(\omega)}^2 \|y_{\overline{x}_2}\|_{L_2(\omega)}^2 \leq 2\|y\|_{L_2(\omega)}^2 \|y\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\overline{\omega})}^2,$$

где

$$\|y\|_{L_4(\omega)}^4 = \sum_{\omega} h_1 h_2 y^4(x).$$

С л е д с т в и е 3.4. *Имеет место неравенство*

$$\|y\|_{L_4(\omega)} \leq \left(2C_\Omega^2\right)^{1/4} \|y\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\overline{\omega})}, \qquad \forall y \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\overline{\omega}),$$

где $y(x)$ *– сеточная функция, заданная на сетке* $\overline{\omega} = \overline{\omega}_1 \times \overline{\omega}_2 \subset \overline{\Omega} = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\right\}$ *и обращающаяся в нуль на* $\gamma = \overline{\omega} \setminus \omega$, *а* $C_\Omega = const > 0$ *из сеточного аналога неравенства Фридрихса*

$$\|y\|_{L_2(\omega)}^2 \leq C_\Omega^2 \|y\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(\overline{\omega})}, \qquad C_\Omega^2 = \left(\frac{8}{l_1^2} + \frac{8}{l_2^2}\right)^{-1}.$$

Список литературы

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. - 334с.

2. Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. - 575с.

3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. - 407с.

4. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. - 288с.

5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. - 614с.

6. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. - 350с.

7. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Численные методы решения обратных задач математической физики. М.: Издательство ЛКИ, 2009. - 480с.

8. Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Уфа: БашГУ, 1999. - 244с.

9. Лубышев Ф.В. Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах // Доклады РАН. 1996. Т.349. №5. С.598-602.

10. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах // Журнал вычисл. математики и математической физики. 2007. Т.47. №3. С.376-396.

Difference analogues of O.A. Ladygenskaya's multiplicative inequalities for functional spaces $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $W_{2,0}^2(\Omega)$

© **F.V. Lubyshev**[3], **M.E. Fairuzov**[4]

Abstract. Here we prove several multiplicative inequalities for the spaces $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\overline{\omega})$, $W_{2,0}^2(\overline{\omega})$ of grid functions defined on the grid $\overline{\omega} \subset \overline{\Omega}$. The inequalities are the grid analogues of O.A. Ladygenskaya's multiplicative inequalities for functional spaces $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $W_{2,0}^2(\Omega)$.

Key Words: grid, grid function, finite differences, embedding theorem.

%begin thebibliographyEn *УДК 517.9*

[3]Professor of mathematics department, Bashkir State University, Ufa; v.lubyshev@mail.ru.
[4]Associate professor of mathematics department, Bashkir State University, Ufa; fairuzovme@mail.ru.