УДК 517.95

О разрешимости аналога третьей краевой задачи с граничным оператором дробного порядка

© **Б. Х. Турметов**[1], **Б. Т. Торебек**[2]

Аннотация. В работе исследуются вопросы разрешимости аналога третьей краевой задачи с граничным оператором дробного порядка.

Ключевые слова: оператор дробного дифференцирование, краевая задача, гармоническая функция.

1. Введение

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - n-мерный единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{|x| = 1\}$ - единичная сфера. Пусть далее, функция $u(x)$ - гармоническая в шаре Ω, m - натуральное число, $r = |x|$, $\theta = \frac{x}{|x|}$, $0 < \alpha < 1$.

Рассмотрим оператор

$$D^{\alpha}[f](t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int\limits_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s) ds,$$

где $\Gamma(\alpha)$ - гамма-функция Эйлера. Оператор D^{α} - называется оператором дифференцирования порядка α в смысле Римана-Лиувилля(см. [1]).

Введем обозначения

$$B[u](x) = B^{\alpha_1}[u](x) = r^{\alpha_1} D^{\alpha_1}[u](x),$$

$$B^m[u](x) = B^{\alpha_1}[B^{\alpha_2}...B^{\alpha_m}[u](x)] = B^{\alpha_m}[B^{\alpha_m-1}...B^{\alpha_1}[u](x)], 0 < \alpha_j < 1, j = 1, 2, ..., m.$$

Отметим, что аналогичные операторы с производными целого порядка в классе гармонических функций рассматривались в работах [2, 3], а в более общем случае для полигармонических функций в работе [4].

2. Свойства оператора B^m

Лемма 2.1. *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $H_k(x)$ - однородный гармонический полином степени k, при $k = 0, 1, \ldots$. Тогда справедливо равенство $B[H_k](x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} H_k(x)$.*

Доказательство. Пусть $H_k(x)$ - однородный гармонический полином степени k и $k = 0, 1, \ldots$. Тогда, используя связь гамма и бета функций Эйлера $\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$, и, в соответствии с определением оператора $B = B^{\alpha}[u](x) = r^{\alpha} D^{\alpha}[u](x)$, запишем

$$B[H_k](x) = \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{dr} \int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha} H_k(\tau\theta) d\tau = \frac{r^{\alpha} H_k(\theta)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^k d\tau =$$

[1]Профессор кафедры математики, Международный казахско-турецкий университет имени Х. А. Ясави, г. Туркестан, Казахстан; turmetovbh@mail.ru.

[2]Магистр-преподаватель кафедры математики, Международный казахско-турецкий университет имени Х. А. Ясави, г. Туркестан, Казахстан; turebekb85@mail.ru.

$$= \frac{r^{\alpha} H_k(\theta)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \left\{ r^{k+1-\alpha} \int\limits_0^1 (1-\xi)^{-\alpha} \xi^k d\xi \right\} = \frac{r^k H_k(\theta) \Gamma(1-\alpha) \Gamma(k+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+2-\alpha)} (k+1-\alpha) =$$

$$= \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} H_k(x).$$

Лемма доказана.

С л е д с т в и е 2.1. *Пусть* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $0 < \alpha_j < 1$ *и* $H_k(x)$ *- однородный гармонический полином степени* k *. Тогда справедливо равенство*

$$B^m[H_k](x) = \gamma_{k,m} H_k(x), \tag{2.1}$$

где обозначено

$$\gamma_{k,m} = \frac{\Gamma^m(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha_1)\cdots\Gamma(k+1-\alpha_m)}$$

Следствие доказывается последовательным применением леммы 2.1.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть* $u(x)$ *- гармоническая в шаре* Ω *функция, тогда функция* $B^m[u](x)$ *также является гармоническим в шаре* Ω *.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(x)$ - гармоническая функция в шаре Ω. Тогда известно (см. [5]), что функция $u(x)$ представляется в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x), \tag{2.2}$$

где $\left\{ H_k^{(i)}(x),\, i = 1, \ldots, h_k \right\}$ - полная система однородных гармонических полиномов, а $u_k^{(i)}$ - коэффициенты разложения (2.2). Известно, что $h_k = (1 + 2k/(n-2))C_{k+n-3}^{n-3} \sim 2k^{n-2}/(n-2)!$, $k \to \infty$. Более того, ряд (2.2) сходится абсолютно и равномерно по x при $|x| \le \rho < 1$ и, значит, $\forall \rho < 1, \exists C_\rho, \forall x, |x| \le \rho, |u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x)| \le C_\rho$. Применяя формально оператор B^m к ряду (2.2) и учитывая равенство (2.1), получим

$$B^m[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{\Gamma^m(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha_1)\cdots\Gamma(k+1-\alpha_m)} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x). \tag{2.3}$$

В силу асимптотической оценки [6, с.366] $\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha_j)} \sim k^{\alpha_j}$ при $k \to \infty$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1, \ldots, m$ получаем $\gamma_{k,m} \sim k^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m}$ когда $k \to \infty$ и значит $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{h_k \gamma_{k,m}} = 1$. Поэтому, при $|x| \le r\rho$ и $r < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} |u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x)| \le C_\rho \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,m} h_k r^k < \infty$$

и значит ряд (2.3) сходится абсолютно и равномерно по x при $|x| \le r\rho < 1$, и его сумма представляет собой гармоническую функцию. В силу произвольности $\rho < 1$ функция $B^m[u](x)$ определена во всем шаре Ω.
Теорема доказана.

Л е м м а 2.2. *Пусть $H_k(x)$ - однородный гармонический полином степени k при $k = 0, 1, \dots$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $0 < \alpha_j < 1$. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{\gamma_{k,m}} H_k(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} H_k(sx) ds_m, \tag{2.4}$$

где $(1 - s)^{\alpha-1} = (1 - s_1)^{\alpha_1-1} \dots (1 - s_m)^{\alpha_m-1}$, $s^{-\alpha} = s_1^{-\alpha_1} \dots s_m^{-\alpha_m}$, $sx = (s_1 \dots s_m x_1, \dots, s_1 \dots s_m x_n)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $s = s_1 \dots s_m$, то в силу однородности полинома $H_k(x)$ имеем $H_k(sx) = s^k H_k(x)$, где $s^k = s_1^k s_2^k \dots s_m^k$ и, значит,

$$\int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \dots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} H_k(sx) ds_m = \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \dots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{k-\alpha} ds_m H_k(x) =$$

$$= \int_0^1 (1-s_1)^{\alpha_1-1} s_1^{k-\alpha_1} ds_1 \cdots \int_0^1 (1-s_m)^{\alpha_m-1} s_m^{k-\alpha_m} ds_m H_k(x) = H_k(x) \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(\alpha_j)\Gamma(k+1-\alpha_j)}{\Gamma(k+1)}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \dots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} H_k(sx) ds_m =$$

$$= H_k(x) \prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(k+1-\alpha_j)}{\Gamma(k+1)} = \frac{1}{\gamma_{k,m}} H_k(x)$$

и, значит, равенство (2.4) доказано.

Т е о р е м а 2.2. *Пусть функция $u(x)$ - гармоническая в шаре Ω, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$, $0 < \alpha_j < 1$. Тогда в обозначениях леммы 2.2 для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство*

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B^m[u](sx) ds_m. \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$ в виде ряда

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \frac{1}{\gamma_{k,m}} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x). \tag{2.6}$$

Далее, учитывая равенства (2.1), (2.3) и равномерную сходимость ряда (2.4) по x при $|x| \le \rho < 1$ (поэтому для этих $x \in \Omega$ суммирование по x и интегрирование по $s_1, \dots, s_m$ можно поменять местами) его можно привести к виду

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} \frac{1}{\gamma_{k,m}} H_k^{(i)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{u_k^{(i)}}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_m)}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\dots\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}\gamma_{k,m}H_k^{(i)}(sx)\,ds_m =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{u_k^{(i)}}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_m)}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\dots\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B^m[H_k^{(i)}](sx)ds_m =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_m)}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\dots\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B^m\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}u_k^{(i)}H_k^{(i)}\right](sx)ds_m =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\dots\Gamma(\alpha_m)}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\dots\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B^m[u](sx)ds_m.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2, а точнее равенство (2.5) позволяет определить следующий оператор

$$B^{-m}[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\cdots\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}u(sx)ds_m, \tag{2.7}$$

где $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, $0<\alpha_j<1$, $(1-s)^{\alpha-1} = (1-s_1)^{\alpha_1-1}\cdots(1-s_m)^{\alpha_m-1}$, $s^{-\alpha} = s_1^{-\alpha_1}\cdots s_m^{-\alpha_m}$, $sx = (s_1\cdots s_m x_1,\dots,s_1\cdots s_m x_n)$.

Теорема 2.3. *Если функция $u(x)$ - гармоническая в шаре Ω, тогда функция $B^{-m}[u](x)$ также является гармонической в шаре Ω.*

Доказательство. Непосредственным подсчетом находим, что в шаре Ω верно равенство

$$\Delta\left(B^{-m}[u](x)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\cdots\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{2-\alpha}\Delta u(sx)ds_m = 0, \quad x\in\Omega$$

Следовательно, функция $B^{-m}[u](x)$ - гармоническая в шаре Ω.
Теорема доказана.

Основное свойство оператора $B^{-m}[u](x)$ сформулировано в следующем утверждении.

Теорема 2.4. *Если функция $u(x)$ - гармоническая в шаре Ω, то справедливы равенства $B^{-m}\left[B^m[u]\right](x) = u(x)$, $B^m\left[B^{-m}[u]\right](x) = u(x)$.*

Доказательство. Докажем первое равенство теоремы. Применим к функции $B^m[u](x)$ оператор B^{-m}. По определению оператора $B^{-m}[u](x)$ (2.7) и в соответствии с теоремой 2.2 будем иметь $B^{-m}\left[B^m[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\cdots\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B^m[u](sx)ds_m = u(x)$. Для доказательства второго равенства теоремы применим оператор $B = B^{\alpha_1}[u](x) = r^{\alpha_1}D^{\alpha_1}[u](x)$ к функции $B^{-m}[u](x)$. Будем иметь

$$B\left[B^{-m}[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}B\left[\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\cdots\int_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}u(sx)ds_m\right] =$$

$$= \frac{r^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\frac{d}{dr}\int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha_1}\left[\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_0^1 ds_2\cdots\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}u(s\tau\theta)ds_m\right]d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_0^1 ds_2\cdots\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}\frac{r^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{d}{dr}\int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha_1}u(s\tau\theta)d\tau ds_m.$$

Далее, нетрудно убедится в следующих равенствах

$$\frac{r^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{d}{dr}\int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha_1}u(s\tau\theta)d\tau \underset{s\tau=t}{=} \frac{r^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{d}{dr}\int\limits_0^{rs}(r-t/s)^{-\alpha_1}u(t\theta)\frac{d\tau}{s} =$$

$$= \frac{r^{\alpha_1}s^{\alpha_1-1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{d}{dr}\int\limits_0^{sr}(sr-t)^{-\alpha_1}u(t\theta)\,dt = \frac{(sr)^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{d}{d(sr)}\int\limits_0^{sr}(sr-t)^{-\alpha_1}u(t\theta)\,dt = B[u](sx),$$

где учтено, что $\theta = \frac{x}{|x|} = \frac{sx}{|sx|}$.

Поэтому будем иметь

$$B\left[B^{-m}[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_0^1 ds_2\cdots\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B\left[u\right](sx)ds_m.$$

Следовательно, вспоминая определение оператора $B^m[u](x) = B^{\alpha_m}[\cdots B^{\alpha_1}[u]](x)$, можно записать

$$B^m\left[B^{-m}[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_0^1 ds_2\cdots\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B^m\left[u\right](sx)ds_m = u(x).$$

Второе равенство теоремы доказано.

Таким образом, из утверждения теоремы 2.4 следует, что операторы B^m и B^{-m} являются взаимно обратными на гармонических в шаре Ω функциях.

3. Постановка и решение основной краевой задачи.

Теперь перейдем к постановке и решению основной краевой задачи, включающей значение оператора B^m на границе.

Задача А. Найти гармоническую в шаре Ω функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C\left(\overline{\Omega}\right)$, для которой функция $B^m[u](x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере равенству

$$B^m[u](x) + au(x) = f(x), \mathrm{x} \in \partial\Omega, \tag{3.1}$$

где a - действительное число.

Заметим, что аналогичные задачи для операторов целого порядка рассматривались в работах [2, 3, 4], а для операторов дробного порядка в работах [7, 8].

Пусть $v(x)$ - классическое решение задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, x \in \Omega \\ v(x) = f(x), x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.2}$$

Приведем теорему единственности решении задачи А. Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть* $a \in R$ *и* $f(x) \in C(\partial\Omega)$.
Тогда

1) если $a \geq 0$ *или* $a < 0$ *и* $a \neq \gamma_{k,m}, k = 0, 1, ...,$ *то решение задачи A единственно;*

2) если $a < 0$ *и для некоторого* $l \in N$, $a = -\gamma_{l,m}$, *то решение задачи A единственно с точностью до однородного гармонического полинома* $H_l(x)$ *степени* l .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что при $f(x) \equiv 0$ решение задачи A существует и пусть это $u(x)$. Обозначим $v(x) = B^m[u](x) + au(x)$.

Тогда в силу теоремы 2.1 функция $B^m[u](x)$ гармоническая в Ω, и поэтому $v(x)$ является решением задачи Дирихле (3.2) с граничным значением $f(x) \equiv 0$. В силу единственности решения задачи Дирихле $v(x) \equiv 0, x \in \overline{\Omega}$.

Следовательно, $B^m[u](x) + au(x) \equiv 0, x \in \overline{\Omega}$.

Разложим функцию $u(x)$ в ряд в виде (2). Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} [\gamma_{k,m} + a]\, u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) = 0.$$

Отсюда либо $\gamma_{k,m} + a = 0$, либо $u_k^{(i)} = 0$ для всех $k = 0, 1, ..., i = 1, 2, ..., h_k$.

Если $a \geq 0$ или $a < 0$ и $a \neq \gamma_{k,m}$, то очевидно, что $u_k^{(i)} = 0.$

Следовательно, в этом случае $u(x) = 0, x \in \Omega$.

Тогда по непрерывности $u(x) \equiv 0, x \in \overline{\Omega}$.

Если $a < 0$ и для некоторого $l \in N$, $a = -\gamma_{l,m}$, то $u_l^{(i)} \neq 0, i = 1, ..., h_l$.

Тогда функция вида $u(x) = \sum\limits_{i=0}^{h_l} u_l^{(i)} H_l^{(i)}(x) \equiv H_l(x)$ будет решением однородной задачи A.

Теорема доказана.

Теперь перейдем к изучению существования решения задачи A. Рассмотрим случай когда $a = 0$. Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.2. *Пусть* $a = 0$ *и* $f(x) \in C(\partial\Omega)$.
Тогда решение задачи A существует, единственно и представляется в виде

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)...\Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 ... \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} v(sx) ds_m, \tag{3.3}$$

где $v(x)$ *- решение задачи Дирихле* (3.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть решение задачи A существует. Обозначим его $u(x)$. Применим к функции $u(x)$ оператор B^m и обозначим $B^m[u](x) = v(x)$. Ясно, что $v(x) \in C(\partial\Omega)$. Поскольку $u(x)$ - гармоническая функция в Ω, то в силу утверждения теоремы 2.1 функция $v(x)$ - тоже гармоническая в шаре Ω и $v(x)|_{\partial\Omega} = B^m[u(x)]|_{\partial\Omega} = f(x)$ Таким образом, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (3.2). Причем, если $f(x) \in C(\partial\Omega)$, то решение этой задачи существует, единственно и $v(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Применим к равенству $B^m[u](x) = v(x)$ оператор B^{-m} из (2.7). Поскольку интеграл вида $\int\limits_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^{-\alpha} v(\tau x) d\tau$ при $\alpha \in (0, 1)$ имеет слабые особенности при $\tau = 0$ и $\tau = 1$, то он является непрерывной функцией по $x \in \overline{\Omega}$ при непрерывной функции $v(x) \in C(\overline{\Omega})$. Значит, оператор B^{-m} применим к функциям из $C(\overline{\Omega})$. В силу первого равенства из теоремы 2.4 получим (3.3).

Пусть наоборот, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (3.2) при $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Ясно что $v(x) \in C(\overline{\Omega})$. Рассмотрим функцию $u(x) = B^{-m}[v](x)$. В силу второго

равенства из теоремы 2.4 будем иметь $B^m[u](x) = B^m[B^{-m}[v](x)] = v(x)$. Значит, функция $u(x)$ гармоническая в Ω и $B^m[u]\,|_{\partial\Omega} = v\,|_{\partial\Omega} = f(x)$.
Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Пусть $a = 0$ и $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи A можно представить в виде*

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} P_m(x,y)f(y)ds_y, \tag{3.4}$$

где функция $P_m(x,y)$ определяется равенством

$$P_m(x,y) = \frac{1}{\omega_n}\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)...\Gamma(\alpha_m)}\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_0^1 ds_2\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1}\, s^{-\alpha}\frac{1-|sx|^2}{|sx-y|^n}ds_m. \tag{3.5}$$

Доказательство. В силу утверждения теоремы 3.2 решения задачи A представляется в виде (3.3).

Далее, представляя решение задачи Дирихле (3.2) в виде интеграла Пуассона

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}f(y)ds_y$$

и меняя местами порядок интегрирования в (3.3) получаем равенство (3.4).

В дальнейшем символом C будем обозначать положительное постоянное, значение которой нас не интересует.

Лемма 3.1. *Если $x, y \in \partial\Omega$, то справедливо равенство*

$$|P_m(x,y)| \le C\,|x-y|^{-(n-1-\alpha_1-\alpha_2-...-\alpha_m)}. \tag{3.6}$$

Доказательство. Очевидно, что для ядра Пуассона $P(sx,y) = \frac{1}{\omega_n}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}$ справедлива оценка

$$0 < P(x,y) \le C\,|x-y|^{-(n-1)}.$$

Пусть $q = (x,y)$ и $f(s) = |sx-y|^2 = 1 - 2sq + s^2, x, y \in \partial\Omega, s = s_1...s_{m-1}s_m$.

Если $q = 0$, то $f(s) = 1 + s^2 \ge 1$, а если $q < 0$, то - $q > 0$ и $f(s) = 1 - 2sq + s^2 \ge 1 + s^2 \ge 1$.

Следовательно, при $q \le 0$ ядро $P_m(x,y)$ - ограниченно.

Пусть $q > 0$. Рассмотрим интеграл

$$I = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)...\Gamma(\alpha_m)}\int\limits_0^1 (1-s_m)^{\alpha_m-1}\, s_m^{-\alpha_m}\,|sx-y|^{-(n-1)}\,ds_m.$$

Представим этот интеграл в виде

$$I = \int\limits_0^{\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^1 = I_1 + I_2,$$

где ε - фиксированное число из $(0,1)$. Оценим I_1. Так как $0 \le s_m \le \varepsilon$, то

$$|sx-y| = |y-sx| \ge |y| - s\,|x| = 1 - s_1...s_m \ge 1 - s_m \ge 1-\varepsilon.$$

Отсюда

$$|sx-y|^{-(n-1)} \le (1-\varepsilon)^{-(n-1)} = C.$$

Тогда очевидно, что $I_1 \le C$. Заметим, что в дальнейшем можно считать, что $s_j \ge \varepsilon$ при всех $j=1,2,...,m$.

Для оценки интеграла I_2 найдем экстремумы функции $f(s_m) = 1 - 2\widetilde{s}qs_m + \widetilde{s}^2 s_m^2$, $\widetilde{s} = s_1 s_2 ... s_{m-1}$ на отрезке $[\varepsilon, 1]$.

Вычислим производную $f^{'}(s_m)$ и приравниваем к нулю

$$f^{'}(s_m) = 2s_m\widetilde{s}^2 - 2\widetilde{s}q = 0.$$

Тогда $s_m^* = \frac{q}{\widetilde{s}}$. Следовательно, точками минимума функции $f(s)$ могут быть $s_m^1 = \varepsilon, s_m^2 = 1, s_m^3 = \frac{q}{\widetilde{s}}$.

Вычислим значения функции $f(s_m)$ в этих точках:

$$f(\varepsilon) = 1 - 2\widetilde{s}q\varepsilon + \widetilde{s}^2\varepsilon^2, f(1) = 1 - 2\widetilde{s}q + \widetilde{s}^2, f\left(\frac{q}{\widetilde{s}}\right) = 1 - 2q^2 + q^2 = (1-q)^2.$$

Так как при $\widetilde{s} = q$ $f(1) = f\left(\frac{q}{\widetilde{s}}\right)$ и при $\varepsilon = 1$ имеет место равенство $f(\varepsilon) = f(1)$, то экстремум функции $f(s_m)$ достаточно изучить в точке $s_m^2 = 1$.

Тогда

$$f(1) = 1 - 2\widetilde{s}q + \widetilde{s}^2 = |\widetilde{s}x - y|^2.$$

Следовательно, в этом случае

$$I_2 \le |\widetilde{s}x - y|^{-(n-1)} \int\limits_{\varepsilon}^{1} (1-s_m)^{\alpha_m - 1} s_m^{-\alpha_m} ds_m \le$$

$$\le C\,|\widetilde{s}x - y|^{-(n-1)} \int\limits_{\varepsilon}^{1} (1-s_m)^{\alpha_m - 1} ds_m = C\,|\widetilde{s}x - y|^{-(n-1)} (1-\varepsilon)^{\alpha_m}.$$

Далее, так как

$$1 - \varepsilon = |y| - \varepsilon|x| \le |y - \varepsilon x| = |\varepsilon x - y| \le |x-y|,$$

то для I_2 имеем оценку

$$I_2 \le C\,|\widetilde{s}x - y|^{-(n-1)} |x-y|^{\alpha_m}.$$

Если проделаем эту процедуру вычисление по всем $s_j, j = \overline{1,m}$, то окончательно получаем оценку

$$0 < P_m(x,y) \le C\,|x-y|^{-(n-1-\alpha_1-\alpha_2-...-\alpha_m)}.$$

Лемма доказана.

Теперь сформулируем основное утверждение.

Т е о р е м а 3.3. *Пусть* $a \in R, a \ne 0$ *и* $f(x) \in C(\partial\Omega)$.

Тогда

1) если $a > 0$ *или* $a < 0$ *и* $a \ne -\gamma_{k,m}, k = 0,1,...,$ *то решение задачи A существует и единственно.*

2) если $a < 0$ и для некоторого $l \in N_0$, $a = -\gamma_{l,m}$, то для существования решения задачи А необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(x) H_l(x) ds_x = 0, \tag{3.7}$$

где $H_l(x)$ - однородный гармонический полином степени l , l такое, что $\gamma_{l,m} = -a$.

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до однородного гармонического полинома степени l .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решение задачи А будем искать в виде

$$u(x) = \int\limits_{\partial\Omega} P_m(x, y) \mu(y) ds_y, \tag{3.8}$$

где $P_m(x, y)$ определяется равенством (3.5), а $\mu(x)$ - неизвестная функция.

Если $\mu(x) \in C(\partial\Omega)$, то в силу утверждения теоремы 3.1 $u(x)$ гармоническая функция и $B^m[u](x)|_{\partial\Omega} = \mu(x)$.

Поэтому подставляя функцию (3.8) в граничное условие (3.1) получаем интегральное уравнения относительно $\mu(x)$

$$\mu(x) + \int\limits_{\partial\Omega} K(x, y) \mu(y) ds_y = f(x), x \in \partial\Omega, \tag{3.9}$$

где $K(x, y) = a P_m(x, y)$.

В силу оценки (3.6) $K(x, y)$ обладает свойствами полярного ядра и поэтому интегральному уравнению (3.9) можно применить альтернативу Фредгольма.

По теореме Фредгольма при $a > 0$ или $a < 0$ и $a \neq -\gamma_{k,m}$ в силу теоремы о единственности решение задачи существует при любом $f(x) \in C(\partial\Omega)$.

Если $a < 0$ и для некоторого l выполняется равенство $a = -\gamma_{l,m}$, то однородная задача А и следовательно и однородное интегральное уравнения соответствующее уравнению (3.8) имеет ненулевое решение вида $H_l(x)$ - однородный гармонический полином степени l .

Далее, так как для всех $x, y \in \partial\Omega$ имеет место равенство

$$\frac{1 - |sx|^2}{|sx - y|^n} = \frac{1 - s^2 |y|^2}{|sy - x|^n},$$

то ядро $K(x, y) = K(y, x) = K^*(x, y)$ - симметрично.

Поэтому, при тех же значение a сопряженное однородное интегральное уравнение имеет ненулевое решение вида $H_l(x)$.

Следовательно, для разрешимости интегрального уравнения (3.8) необходимо и достаточно выполнение условия (3.7).
Теорема доказана.

Список литературы

1. Самко С.Г., Кильбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск. Наука и Техника. – 1987. – 688с.

2. Баврин И.И. Операторы для гармонических функций и их приложения. //Дифференциальные уравнения. – 1985. – т.21. –№1. – С.9-15.

3. Карачик В.В., Турметов Б.Х. Об одной задаче для гармонического уравнения. //Изв. АН Уз ССР сер. Физ.-мат. наук, – 1990, – №4, – С.17-21.

4. Карачик В.В. Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре. //Сиб. мат. журнал, – 1991. – Т.32, –№5, – С.51-58.

5. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М: «Мир», – 1974, – 333с.

6. Бари Н.К. Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961.

7. Турметов Б.Х. Об одной краевой задаче для гармонического уравнения //Дифференциальные уравнения, – Минск, – 1996. – Т.32, – №8, – С.1089-1092.

8. Турметов Б.Х. О гладкости решения одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка //Математические труды, – 2004. – Т.7, – №1, – Новосибирск, Изд-во Института математики, – С.189-199.

An analogue of the third boundary value problem with boundary operator of fractional order

© B. Kh. Turmetov[3], B. T. Torebek[4]

Abstract. The article deals with the solvability of an analogue of the third boundary problem with boundary operator of fractional order.

Key Words: operator of fractional differentiation, boundary value problem, harmonic function.

[3]Professor of Mathematics Chair, International Kazakh-Turkish University after H.A. Yassawi, Turkestan, Kazakhstan; turmetovbh@mail.ru.

[4]Master-teacher of Mathematics Chair, International Kazakh-Turkish University after H. A. Yassawi, Turkestan, Kazakhstan; turebekb85@mail.ru.