УДК 517.956.225

Частные решения уравнения Пуассона с правой частью специального вида

© А. О. Сыромясов[1]

Аннотация. В работе рассматривается уравнение Пуассона, правая часть которого имеет вид $|\vec{x}|^{\alpha}x_j\ldots x_k$. Предложен алгоритм поиска частных решений этого уравнения.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, уравнение Пуассона, аналитическое решение.

1. Введение

Несмотря на интенсивное развитие численных методов, разработка процедур аналитического решения дифференциальных уравнений по-прежнему является актуальной задачей. Во-первых, во многих случаях исследовать поведение решения проще, если оно представлено в аналитическом виде. Во-вторых, известные аналитические решения могут служить «пробным камнем» при построении новых численных методов.

В приложениях часто встречается уравнение Пуассона. Одна из трудностей, возникающих при исследовании подобного рода задач, – подбор частного решения этого уравнения.

Так, медленное течение вязкой жидкости описывается уравнениями Стокса [1]:

$$\eta\Delta\vec{u}=\nabla p,\ \nabla\cdot\vec{u}=0.$$

Здесь η, $\vec{u}$, p – вязкость, скорость течения и давление в жидкости. Если изучается обтекание жидкостью одной частицы, то переменные в уравнениях Стокса разделяются с помощью сферической замены. При математическом моделировании течения относительно совокупности частиц случаи, когда переход к криволинейным координатам приводит к разделению переменных, единичны. Кроме того, если заданный на бесконечности поток имеет сложную структуру, преобразование независимых переменных проблематично даже при обтекании одиночной частицы. В [2] частное решение уравнений Стокса построено в декартовых координатах. Поскольку давление p – гармоническая функция, его можно разложить по мультиполям, т.е. частным производным от $1/|\vec{x}|$. Тогда компоненты u_i вектора скорости удовлетворяют уравнению Пуассона, в правой части которого находится линейная комбинация мультиполей.

Иногда давление в жидкости не удовлетворяет уравнению Лапласа и указанного алгоритма для решения задачи об обтекании частиц недостаточно. Например, так обстоит дело, если вязкость η является переменной величиной. В этом случае и p, и u_i являются линейными комбинациями решений уравнений

$$\Delta f=F(\vec{x}), \tag{1.1}$$

где правая часть имеет вид обобщенного монома:

$$F(\vec{x})=|\vec{x}|^{\alpha}x_{j_1}\ldots x_{j_n}. \tag{1.2}$$

[1]Доцент кафедры математики и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; syal1@yandex.ru.

Здесь и далее предполагается, что вектор $\vec{x}$ имеет декартовы координаты x_i , $i = \overline{1,3}$. И количество множителей-координат n , и степень α могут быть произвольными, причем α не обязано быть целым или положительным.

Целью данной работы является построение частных решений уравнения (1.1) с правой частью вида (1.2).

2. Представление решения в виде обобщенного полинома

Найдем частное решение (1.1), исходя из свойств правой части уравнения. Функция (1.2) симметрична по индексам $j_1, \dots, j_n$. Кроме того, поскольку координата $x_k \sim |\vec{x}|$, то $F(\vec{x})$ имеет порядок $|\vec{x}|^{\alpha+n}$. Поэтому будем искать функцию f , удовлетворяющую (1.1) и следующим дополнительным условиям:

Симметрия. f симметрична по индексам $j_1, \dots, j_n$. Если f включает в себя несколько слагаемых, то симметричным должно быть каждое из них.

Однородность. Если f включает несколько слагаемых, то они все имеют одинаковый порядок по $|\vec{x}|$.

Повышение степени. Взятие производной понижает степень выражения относительно переменной, по которой производится дифференцирование. Поэтому порядок f по $|\vec{x}|$ равен $\alpha + n + 2$.

Перечисленным условиям удовлетворяет, например, функция вида (1.2), если заменить $|\vec{x}|^\alpha$ на $|\vec{x}|^{\alpha+2}$. Но она не является решением уравнения (1.1). Учитывая соотношения

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_s} = \delta_{is}, \ \frac{\partial |\vec{x}|}{\partial x_s} = \frac{x_s}{|\vec{x}|}, \ \Delta f = \frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial}{\partial x_s} f,$$

нетрудно показать, что

$$\Delta(|\vec{x}|^\beta x_{i_1} \dots x_{i_m}) = \beta(\beta + 2m + 1)|\vec{x}|^{\beta-2} x_{i_1} \dots x_{i_m} + 2|\vec{x}|^\beta \delta_{(i_1 i_2} x_{i_3} \dots x_{i_m)}. \tag{2.1}$$

Здесь и далее δ_{is} – символ Кронекера, равный 1, если $i = s$, и 0 – в противном случае. По повторяющимся индексам производится суммирование в пределах от 1 до 3, а по индексам, взятым в скобки, – симметризация выражения (без деления на количество слагаемых). Например, $x_{(i)} x_{(j)} = x_i x_j + x_j x_i$.

Таким образом, лапласиан функции (1.2) есть сумма выражений того же вида. Поэтому и решение (1.1) будем искать в виде обобщенного полинома:

$$f(\vec{x}) = \sum_{0 \le k \le n/2} A_k |\vec{x}|^{\alpha+2+2k} \delta_{(j_1 j_2} \dots \delta_{j_{2k-1} j_{2k}} x_{j_{2k+1}} \dots x_{j_n)}, \ A_k = \mathrm{const} \tag{2.2}$$

Такая f удовлетворяет всем трем условиям, наложенным выше. Остается подобрать такие коэффициенты A_k , чтобы для указанной функции выполнялось и уравнение (1.1).

Подстановка (2.1) в формулу (2.2) дает

$$\Delta f = A_0 (\alpha + 2)(\alpha + 2n + 3)|\vec{x}|^\alpha x_{j_1} \dots x_{j_n} + \dots,$$

многоточием обозначены слагаемые, содержащие хотя бы один символ Кронекера. Отсюда

$$A_0 = \frac{1}{(\alpha + 2)(\alpha + 2n + 3)} \tag{2.3}$$

Из (2.1) следует, что при вычислении Δf каждое выражение вида

$$A_k|\vec{x}|^{\alpha+2+2k}\delta_{(j_1j_2}\dots\delta_{j_{2k-1}j_{2k}}x_{j_{2k+1}}\dots x_{j_n)} \tag{2.4}$$

дает два слагаемых, которые далее обозначены через $\Delta_I(k)$ и $\Delta_{II}(k)$. В первом из них степень $|\vec{x}|$ понижается с $\alpha+2+2k$ до $\alpha+2k$, но количество множителей-координат остается прежним. Во втором степень $|\vec{x}|$ сохраняется, но на 2 снижается число множителей вида x_i. Индексы «потерянных» координат замещаются умножением на δ_{is}. Таким образом, $\Delta_{II}(k)$ содержит $|\vec{x}|$ в такой же степени и имеет столько же множителей вида x_i, сколько $\Delta_I(k+1)$. Значит, A_k и A_{k+1} должны быть такими, чтобы эти выражения взаимно уничтожались. Выясним, сколько однотипных слагаемых содержит каждое из них.

До применения оператора Δ функция (2.4) содержала

$$\frac{1}{k!}C_n^{n-2k,2,\dots,2}=\frac{n!}{k!(n-2k)!2^k}$$

слагаемых. Это объясняется тем, что из индексов $j_1,\dots,j_n$ только $n-2k$ приходятся на долю координат вектора $\vec{x}$ (и множители вида x_i можно менять местами). Оставшиеся $2k$ индексов распределены между k символами Кронекера; полиномиальный коэффициент необходимо поделить на $k!$, поскольку эти символы также можно менять местами. В выражении $\Delta_{II}(k)$ на один множитель вида δ_{is} больше, чем в (2.4). Два индекса для него надо выбрать из тех $n-2k$, что ранее относились к множителям вида x_i. Таким образом, количество слагаемых в $\Delta_{II}(k)$ составляет

$$C_{n-2k}^2\cdot\frac{1}{k!}C_n^{n-2k,2,\dots,2}=\frac{n!}{k!(n-2k-2)!2^{k+1}}.$$

Из (2.1) вытекает, что каждое из этих слагаемых надо умножить на 2.

С другой стороны, для получения $\Delta_I(k)$ надо в (2.4) понизить степень $|\vec{x}|$, не вводя новых символов Кронекера. Поэтому выражение $\Delta_I(k+1)$ содержит столько же слагаемых, сколько и выражение вида (2.4) с заменой k на $k+1$, т.е.

$$\frac{1}{(k+1)!}C_n^{n-2k-2,2,\dots,2}=\frac{n!}{(k+1)!(n-2k-2)!2^{k+1}}.$$

Согласно (2.1), каждое из них надо умножить на $\beta(\beta+2m+1)$, где $\beta=\alpha+2+2(k+1)$ и $m=n-2(k+1)$. Отсюда

$$2A_k\frac{n!}{k!(n-2k-2)!2^{k+1}}+(\alpha+2k+4)(\alpha+2n-2k+1)A_{k+1}\frac{n!}{(k+1)!(n-2k-2)!2^{k+1}}=0,$$

или, окончательно,

$$A_{k+1}=-\frac{2(k+1)}{(\alpha+2k+4)(\alpha+2n-2k+1)}A_k,\ 0\le k<n/2. \tag{2.5}$$

Сумма (2.2) коэффициенты которой определены равенствами (2.3) и (2.5), доставляет искомое частное решение уравнения (1.1) с правой частью (1.2). Полученные равенства были проверены при произвольных α и $n=\overline{0,6}$.

3. Случай целых отрицательных степеней $|\vec{x}|$

Построенное выше решение может оказаться неприменимым, если α – целое отрицательное число: в этом случае знаменатели дробей (2.3) и (2.5) могут обратиться в нуль.

Рассмотрим, например, уравнения

$$\Delta f_2(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|^2},\ \Delta f_3(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|^3}.$$

Поскольку для них $\alpha = -2$ и $\alpha = -3$, соответственно, то коэффициент A_0 не определен. Однако переход к сферическим координатам позволяет найти частные решения, которые (как и правые части уравнений) зависят только от $|\vec{x}|$:

$$f_2(\vec{x}) = \ln|\vec{x}|,\ f_3(\vec{x}) = \frac{\ln|\vec{x}|}{|\vec{x}|}.$$

Поэтому логично предположить, что если одно из выражений

$$\alpha + 2,\ \alpha + 2n + 3,\ \alpha + 2k + 4,\ \alpha + 2n - 2k + 1 \tag{3.1}$$

обращается в нуль, то разложение (2.2) должно быть дополнено слагаемыми вида

$$|\vec{x}|^\beta x_{i_1} \dots x_{i_m} \ln|\vec{x}|. \tag{3.2}$$

Отметим, что при $0 \le k < n/2$ никакие два из выражений (3.1) не могут быть равны нулю одновременно.

Аналогично рассуждениям предыдущего пункта, предварительно вычислим

$$\begin{aligned}\Delta\Big(|\vec{x}|^\beta x_{i_1} \dots x_{i_m} \ln|\vec{x}|\Big) &= (2\beta + 2m + 1)|\vec{x}|^{\beta-2} x_{i_1} \dots x_{i_m} + \\ &+\Big(\beta(\beta + 2m + 1)|\vec{x}|^{\beta-2} x_{i_1} \dots x_{i_m} + 2|\vec{x}|^\beta \delta_{(i_1 i_2} x_{i_3} \dots x_{i_m)}\Big) \ln|\vec{x}|\end{aligned} \tag{3.3}$$

Следовательно, применение оператора Лапласа к функции (3.2) дает сумму выражений той же структуры. Поэтому, если какое-либо выражение (3.1) обращается в нуль, частное решение задачи (1.1), (1.2) может быть представлено суммой

$$f(\vec{x}) = \sum_{0 \le k \le n/2} \Big(A_k + B_k \ln|\vec{x}|\Big)|\vec{x}|^{\alpha+2+2k} \delta_{(j_1 j_2} \dots \delta_{j_{2k-1} j_{2k}} x_{j_{2k+1}} \dots x_{j_n)},\ A_k, B_k = \mathrm{const}. \tag{3.4}$$

Такая функция f удовлетворяет поставленному выше условию симметрии, а если не учитывать множитель $\ln|\vec{x}|$, то и двум остальным условиям. Величины A_k и B_k должны быть такими, чтобы эта функция удовлетворяла (1.1) с правой частью (1.2).

Пользуясь (2.1) и (3.3), можно попытаться получить для A_k и B_k рекуррентные соотношения, аналогичные (2.3) и (2.5) и пригодные для любых α и n. Однако это сопряжено с громоздкими комбинаторными вычислениями. Проще в каждом конкретном случае пользоваться методом неопределенных коэффициентов, подставляя (1.2) и (3.4) в (1.1). Для ускорения вычислений можно пользоваться следующим соображением. Если $\alpha + 2 \ne 0$ и $\alpha + 2n + 3 \ne 0$, то A_0 определяется формулой (2.3), а $B_0 = 0$. Аналогично, A_{k+1} можно выражать через A_k по формуле (2.5) до тех пор, пока она применима; соответствующие B_{k+1} равны нулю. Слагаемые, содержащие $\ln|\vec{x}|$, появляются лишь с того момента, как в (2.3) и (2.5) возникает деление на нуль.

П р и м е р 3.1. *Рассмотрим уравнение*

$$\Delta f = \frac{x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}}{|\vec{x}|^4}. \tag{3.5}$$

Для него $\alpha = -4$ *и* $n = 4$, *поэтому коэффициент* $A_0 = -1/14$ *находится из (2.3). Поскольку* $\alpha + 2k + 4 = 0$ *уже при* $k = 0$, *то рекуррентное соотношение (2.5) неприменимо. Значит, частное решение (3.5) надо искать в виде*

$$\begin{aligned} f \;=\; & \frac{1}{14}x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}|\vec{x}|^{-2} + (A_1 + B_1 \ln|\vec{x}|)(\delta_{i_1i_2}x_3x_4 + \delta_{i_1i_3}x_2x_4 + \delta_{i_1i_4}x_2x_3 + \\ & +\delta_{i_2i_3}x_1x_4 + \delta_{i_2i_4}x_1x_3 + \delta_{i_3i_4}x_1x_2)|\vec{x}|^0 + (A_2 + B_2 \ln|\vec{x}|)(\delta_{i_1i_2}\delta_{i_3}\delta_{i_4} + \\ & +\delta_{i_1i_3}\delta_{i_2}\delta_{i_4} + \delta_{i_1i_4}\delta_{i_2}\delta_{i_3}). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь развернуты все слагаемые, симметризованные по индексам i_1, i_2, i_3, i_4. *Вычислив* Δf, *получим (выражения вновь свернуты для краткости записи):*

$$\begin{aligned} \Delta f \;=\; & \frac{x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}}{|\vec{x}|^4} + \left(5B_1 - \frac{1}{7}\right)\frac{1}{|\vec{x}|^2}\delta_{(i_1i_2}x_{i_3}x_{i_4)} + \\ & +(4A_1 + 6A_2 + 5B_2)\delta_{(i_1i_2}\delta_{i_3i_4)} + (4B_1 + 6B_2)\delta_{(i_1i_2}\delta_{i_3i_4)} \ln|\vec{x}|. \end{aligned}$$

Сравнивая полученное выражение с правой частью (3.5), получим систему линейных уравнений, имеющую решение $B_1 = 1/35$, $B_2 = -2/105$, $2A_1 + 3A_2 = 1/21$. *Подставив эти коэффициенты в (3.6), найдем частное решение в виде*

$$f = \frac{1}{14}\frac{x_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}x_{i_4}}{|\vec{x}|^2} + \left(A_1 + \frac{1}{35}\ln|\vec{x}|\right)\delta_{(i_1i_2}x_{i_3}x_{i_4)} + \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{21} - 2A_1\right) - \frac{2}{105}\ln|\vec{x}|\right)|\vec{x}|^2\delta_{(i_1i_2}\delta_{i_3i_4)}$$

Таким образом, существует целое семейство функций вида (3.4), удовлетворяющих (3.5).

Список литературы

1. Хаппель Дж. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М. : Мир, 1976. – 632 с.

2. Мартынов С.И. Гидрологическое взаимодействие частиц / С.И. Мартынов // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 1998. – N 2. – С. 112–119.

Particular solutions of Poisson equation with special right-hand side

© A. O. Syromyasov[2]

Abstract. The paper deals with Poisson equation with right-hand side $|\vec{x}|^\alpha x_j \ldots x_k$. The algorithm obtaining particular solutions of such equations is discussed.

Key Words: PDE, Poisson equation, analytical solution.

[2]Associate professor of Mathematics and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian Ogaryov State University, Saransk; syal1@yandex.ru.